
Zbl 038.18106
Selberg, Atle; Erdős, Pál; van der Corput, J.G.
Démonstration élementaire du théorème sur la distribution des nombres premiers.
Elementary proof of theorem about the distribution of prime numbers. (In French)
Scriptum, Math. Centrum, Amsterdam 1948, No.1, 32 S. (1948).

Dieses hektographierte Heft ist von J. G. van der Corput nach Vorlesungen von *P. Erdős*, gehalten im Jahre 1948 in Amsterdam, abgefaßt; das war die erste im Druck erschienene Mitteilung des elementaren Beweises des Primzahlsatzes

$$(1) \qquad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (\pi(x) = \text{ Anzahl der Primzahlen } \leq x)$$

von *A.Selberg* und *P.Erdős*. [Seitdem sind die Arbeiten von *A. Selberg* (Zbl 036.30603; Zbl 036.30604; Zbl 036.30605) und von *P. Erdős* (Zbl 034.31403) erschienen.] "Elementar" heißt hier, daß die Methoden der höheren Analysis nicht benützt werden und insbesondere der Satz $\zeta(1+it) \neq 0$ für $t \neq 0$ reell, welche dem Primzahlsatz im gewissen Sinne äquivalent ist, nicht vorausgesetzt wird. Lange Zeit dachte man, daß dies unmöglich ist; die hervorragende Leistung von *A. Selberg* und *P. Erdős* war eine große Überraschung.
Der Beweis besteht aus zwei Teilen:
1. Beweis der Formel von A. Selberg:

$$(2) \qquad \vartheta(x)\ln x + 2\sum_{p\leq x} + 2\sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p \sim 2x\ln x + o(x\ln x),$$

wo $\vartheta = \sum_{p\leq x} \ln p$ und p über Primzahlen läuft.
[In der Tat hat Selberg auch gezeigt, daß statt $o(x\ln x)$ auch $O(x)$ gilt, aber das ist für den Beweis von (1) nicht nötig.]
Der Beweis von (2) beruht auf den folgenden Formeln: einerseits ist

$$\vartheta(x)\ln x + 2\sum_{p\leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right)\ln p = \sum_{m\leq x} f(m) + O(x\ln x),$$

wo $f(m) = \sum_{d/m} \mu(d)\ln^2 \frac{x}{d}$; anderseits erhält man durch leichte Umformung

$$\sum_{m\leq x} f(m) = x\sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d}\ln^2\frac{x}{d} + o(x\ln x)$$

und endlich

$$\sum_{d\leq x} \frac{\mu(d)}{d}\ln^2\frac{x}{d} = 2\ln x + o(\ln x).$$

2. Der zweite Teil des Beweises besteht vom Schluß aus (2) zu (3) $\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$, was bekanntlich mit (1) äquivalent ist. Dieser Schluß ist

vom Typus eines "nichtlinearen" Tauberschen Satzes (und erinnert etwas an den Satz von Mercer); in der Tat hat seitdem *P. Erdős* in einer anderen Arbeit (Zbl 034.31501) einen allgemeinen Tauberschen Satz bewiesen der den obigen Schluß enthält. Der Anteil der beiden Mathematiker an dem zweiten Teil des Beweises (der erste Teil ist ausschließlich von Selberg gefunden) ist in der vorliegenden Arbeit nicht erörtert; aus der Arbeit von Erdős (a.a. O.) erfahren wir, daß, nachdem Selberg (2) bewiesen und Erdős mitgeteilt hatte, Erdős, von (2) ausgehend, die Relation $\lim_{n\to\infty} p_{n+1}/p_n = 1$ (p_n bedeutet die n-te Primzahl), und noch mehr, nämlich, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\pi((1+\varepsilon)x) - \pi(x) > \frac{K(\varepsilon)x}{\ln x} \text{ mit } K(\varepsilon) > 0$$

gibt [aber nicht (1) bzw. (3), elementar bewiesen und seinen Beweis Selberg mitgeteilt hat; die Gedanken von Erdős benutzend und weiterentwickelend hat Selberg (3) bewiesen; später haben Selberg und Erdős den Beweis von Selberg noch vereinfacht.

Der zweite Teil des Beweises operiert wie folgt: es kann elementar bewiesen werden, daß $a = \liminf \vartheta(x)/x > 0$ und $A = \limsup \vartheta(x)/x < \infty$ (Sätze von Tchebyscheff). Aus (2) folgt erstens, daß $a + A = 2$, weiter wird folgendes "Kompensationsprinzip" angewandt: wenn für ein $x \geq x_0 \vartheta(x)$ "groß", d.h. nahezu Ax ist, so muß für die "meisten" $p < x$ $\vartheta(x/p)$ "klein" (d.h. nahezu ax/p) sein; wenn aber $\vartheta(x/p)$ für nicht zu großes $p < x$ "klein" ist, so erhält man durch nochmalige Anwendung desselben Kompensationsprinzips, daß $\vartheta(x/pq)$ (q prim) für die "meisten" $q < x/q$ "groß" (d.h. nahezu Aa/pq) ist. Auf diesem Weg wird die Unmöglichkeit von $A \neq a$ und somit $A = a = 1$ bewiesen, was mit (3) bzw. (1) äquivalent ist: für die Details des Beweises muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

A.Rényi (Budapest)

Classification:
11N05 Distribution of primes