Zbl 039.04902

Erdős, Pál

Some remarks on set theory. (In English)

Proc. Am. Math. Soc. 1, 127-141 (1950). [0002-9939]

1. Der Verf. bestimmt für jedes natürliche n die Maximalanzahl $f(n)$ verschiedener Ordinalzahlen, die man durch beliebige Addition von n Ordinalzahlen erhalten kann: $f(n) = \max_{k \leq n-1}[(k^{2k-1}+1)f(n-k)]$.
2. Es sei X eine Menge und m ihre Mächtigkeit. Zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Teilmengen A und B von X heißen k-orthogonal, wenn für $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{B}$ die Mächtigkeit des Durchschnittes $A \cap B$ stets kleiner als $\aleph_k$ ist; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen vollständig k-orthogonal, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ k-orthogonal sind, zu $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ jedoch keine Mengen $\subseteq X$ hinzugefügt werden können, ohne die k- Orthogonalität zu zerstören. Der Verf. zeigt, daß die Kardinalzahl der vollständig k-orthogonalen Paare $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gleich $2^{m^{\aleph_k}}$ ist (der Beweis verwendet die verallgemeinerte Kontinuumshyposthese $2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1}$).
3. Der Verf. zeigt: Jede unendliche Teilmenge des k-dimensionalen Euklidischen Raumes enthält eine Teilmenge M gleicher Mächtigkeit derart, daß keine zwei Punktepaare aus M gleiche Abstände haben.
4. Es sei G ein Graph der Ordnung m (unendliche Kardinalzahl), d. h. jeder Eckpunkt von G sei Endpunkt von m "Strecken". Jeder Eckpunkt sei mit m verschiedenen Eckpunkten durch "Strecken" verbunden. Der Verf. zeigt, daß dann G das Produkt von Linearfaktoren ist (d.h. von Teilgraphen der Ordnung 1 mit denselben Ecken wie G).
5. Es sei S eine Menge und m ihre Mächtigkeit. Jedem $a \in S$ sei eine Menge $f(a) \subseteq S$ mit $a \notin f(a)$ zugeordnet. $a \in S$ und $b \in S$ heißen unabhängig, wenn $a \notin f(b)$ und $b \notin f(a)$. $S' \subseteq S$ heißt unabhängig, wenn je zwei Elemente aus S' unabhängig sind oder der Durchschnitt $S' \cap f(S'')$ leer ist. Der Verf. zeigt: Ist n eine Kardinalzahl $< m$ und hat jedes $f(a)$ eine Mächtigkeit $< n$, so existiert eine unabhängige Menge $S' \subseteq S$ mit der Mächtigkeit m (der Beweis benutzt die verallgemeinerte Kontinuumshypothese).
7. Der Verf. zeigt, daß es für jedes natürliche k eine Hamel-Basis $(a_1, a_2, ...)$ gibt derart, daß H_k das Maß 0 hat und H_{k+1} nicht meßbar ist (H_k ist die Menge aller $\sum_{r=1}^{k} c_r a_r$ mit rationalen c_r).

Nöbeling (Erlangen)

Classification:
04A99 Miscellaneous topics in set theory
04A10 Ordinal and cardinal numbers; generalizations