Zbl 099.03903

Erdős, Pál; Rény, Alfréd

A probabilistic approach to problems of diophantine approximation. (In English)

Ill. J. Math. 1, 303-315 (1957). [0019-2082]

Es seien stets $z_j = e^{i\varphi_j}$ $(0 \leq \varphi_j < 2\pi;\ j = 1, ..., n)$ komplexe Zahlen vom Betrag 1, $S_k = \sum_{j=1}^n z_j^k$ (k natürliche Zahl). Wir bezeichnen eine Menge $(z_1, ..., z_n)$ stets mit Z_n. Dann zeigen die Verff. folgende Sätze.

Satz 1: Es gibt für jedes $n \geq 2$ ein Z_n, so daß $|S_k| < \sqrt{6n \log(k+1)}(k = 1, 2, ...)$. Ein ähnliches Resultat gilt, wenn k reell beliebig ist. Satz 2: Es gibt für $n \geq 2$ stets ein Z_n, so daß $|S_k| < cn$ für alle k mit $1 \leq k < \frac{1}{4} \exp(nc^2/2)$ für jedes c in $0 < c < 1$.

Dagegen (Satz 6) ist für alle Z_n und $2 \leq c \leq n-1$,

$$\max_{1 \leq k \leq 2n(4\pi n\sqrt{c+2})^{c+2}} |S_k| \geq c.$$

Satz 3: Für $n \geq 10$ und $0 < \varepsilon < 1/16$ gibt es Z_n, so daß

$$|S_k| < n(1-\varepsilon), \qquad (1 \leq k \leq (16n\varepsilon^{n-1})^{-1/2}).$$

Der Beweis dieser Sätze stützt sich auf das Lemma: Sind $\varphi_1, ..., \varphi_n$ unabhängige zufällige Variable, gleich verteilt auf $(0, 2\pi)$, dann ist für jedes c mit $0 < c < 1$, $P(|S_k| \geq cn) \leq 4e^{-c^2 n/2}$ (P: Wahrscheinlichkeit). In den Sätzen kann noch angenommen werden, daß die z_j Einheitswurzeln vom Grad p (p Primzahl $> p_0(n)$) sind. In Verbindung mit dem Satz von *Erdős-Turán* aus der Theorie der Gleichverteilung (Zbl 031.25402) folgt aus Satz 1: Es gibt ein Z_n, so daß für die Anzahl $N_n^{(k)}(\alpha, \beta)$ der $z_1^k, ..., z_n^k$ auf dem Bogen (α, β) des Einheitskreises gilt

$$|N_n^{(k)}(\alpha, \beta)/n - (\beta - \alpha)/2\pi| < c\sqrt{\delta}[\log(e\delta)]^{3/2} \text{ für } k \leq e^{\delta n} - 2$$

$0 < \delta < 1$ (c absolute Konstante). Zur Bedeutung dieser Sätze siehe das Buch von *P. Turán* (Zbl 052.04601).

E.Hlawka

Classification:
11N30 Turan theory
11K06 General theory of distribution modulo 1

©European Mathematical Society & FIZ Karlruhe & Springer-Verlag