Zbl 137.43202
Erdős, Pál; Goodman, A.W.; Pósa, L.
The representation of a graph by set intersections (In English)
Can. J. Math. 18, 106-112 (1966). [0008-414X]

Eine Familie von Mengen $S_1, S_2, ...$ läßt sich auf natürliche Weise als Graph interpretieren, indem man jede Menge S_α als Punkt dieses Graphen auffaßt und vereinbart: $(^*)$ Zwei Punkte sind genau dann durch eine Kante miteinander verbunden, wenn der Durchschnitt der beiden entsprechenden Mengen nicht leer ist. Es ist bekannt (vgl. *E. Szpilrajn- Marczewski*, Zbl 060.12508), daß auch umgekehrt zu jedem Graphen G eine Menge S und Untermengen $S_1, S_2, ...$ von S existieren, so daß eine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten x_α von G und den Untermengen S_α von S so möglich ist, daß $(^*)$ gilt. Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen ist die Minimalzahl der Elemente von S. Die Verff. beweisen:

Theorem 1. Ist G ein Graph mit n Punkten, dann gibt es eine Menge S mit $[n^2/4]$ Elementen und eine Familie von n Untermengen von S, so daß $(^*)$ gilt. Weiterhin ist $[n^2/4]$ die kleinste solche Zahl.

Die Verff. zeigen, daß G sich als Summe von höchsten $[n^2/4]$ vollständigen Teilgraphen G_k angeben läßt [Kanten und Dreiecke (Theorem 2), diese können kantenfremd gewählt werden (Theorem 4)]. Zum Beweis von Theorem 1 wird jedem Punkt x_α von G die Menge S_α derjenigen Summanden G_k zugeordnet, die x_α enthalten. Interessant sind die Fragen der Verff. nach der minimalen Elementezahl von S bei Vorgabe auch der Kantenzahl von G sowie die Vermutung, daß sich jeder Graph mit n Punkten als Summe von höchstens $n - 1$ Kreisen (auch eine einzelne Kante als Kreis gezählt) darstellen läßt. Ein Beweis von Theorem 1 für $n \geq 4$ mit der zusätzlichen Forderung, daß die n Untersuchungen von S paarweise verschieden sind, beschließt die anregende Arbeit.

W.Wessel (Berlin)

Classification:
05C35 Extremal problems (graph theory)
05C99 Graph theory