Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides.

Bernhard Riemann

[Aus dem neunten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1861.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides.

Bernhard Riemann

[Aus dem neunten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1861.]

Für die Untersuchungen über die Bewegung eines gleichartigen flüssigen Ellipsoides, dessen Elemente sich nach dem Gesetze der Schwere anziehen, hat *Dirichlet* durch seine letzte von *Dedekind* herausgegebene Arbeit auf überraschende Weise eine neue Bahn gebrochen. Die Verfolgung dieser schönen Entdeckung hat für den Mathematiker ihren besondern Reiz, ganz abgesehen von der Frage nach den Gründen der Gestalt der Himmelskörper, durch welche diese Untersuchungen veranlasst worden sind. *Dirichlet* selbst hat die Lösung der von ihm behandelten Aufgabe nur in den einfachsten Fällen vollständig durchgeführt. Für die weitere Ausführung der Untersuchung ist es zweckmässig, den Differentialgleichungen für die Bewegung der flüssigen Masse eine von dem gewählten Anfangszeitpunkte unabhängige Form zu geben, was z. B. dadurch geschehen kann, dass man die Gesetze aufsucht, nach welchen die Grösse der Hauptaxen des Ellipsoides und die relative Bewegung der flüssigen Masse gegen dieselben sich ändert. Indem wir hier die Aufgabe in dieser Weise behandeln, werden wir zwar die *Dirichlet*'sche Abhandlung voraussetzen, müssen aber dabei zur Vermeidung von Irrungen gleich bevorworten, dass es nicht möglich gewesen ist, die dort gebrauchten Zeichen unverändert beizubehalten.

1.

Wir bezeichnen durch a, b, c die Hauptaxen des Ellipsoides zur Zeit t, ferner durch x, y, z die Coordinaten eines Elements der flüssigen Masse zur Zeit t und die Anfangswerthe dieser Grössen durch Anhängung des Index 0 und nehmen an, dass für die Anfangszeit die Hauptaxen des Ellipsoides mit den Coordinatenaxen zusammenfallen.

Den Ausgangspunkt für die Untersuchung *Dirichlet*'s bildet bekanntlich die Bemerkung, dass man den Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeitstheile genügen kann, wenn man die Coordinaten x, y, z linearen Ausdrücken von ihren Anfangswerthen gleichsetzt, in denen die Coefficienten blosse Functionen der Zeit sind. Diese Ausdrücke setzen wir in die Form

$$
\begin{aligned}
x &= l\frac{x_0}{a_0} + m\frac{y_0}{b_0} + n\frac{z_0}{c_0}, \\
y &= l'\frac{x_0}{a_0} + m'\frac{y_0}{b_0} + n'\frac{z_0}{c_0}, \\
z &= l''\frac{x_0}{a_0} + m''\frac{y_0}{b_0} + n''\frac{z_0}{c_0}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Bezeichnet man nun durch ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes (x, y, z) in Bezug auf ein bewegliches Coordinatensystem, dessen Axen in jedem Augenblicke mit den Hauptaxen des Ellipsoides zusammenfallen, so sind bekanntlich ξ, η, ζ gleich linearen Ausdrücken von x, y, z

$$
\begin{aligned}
\xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\
\eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\
\zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

worin die Coefficienten die Cosinus der Winkel sind, welche die Axen des einen Systems mit den Axen des andern bilden, $\alpha = \cos\xi x$, $\beta = \cos\xi y$ etc., und zwischen diesen Coefficienten finden sechs Bedingungsgleichungen statt, welche sich daraus herleiten lassen, dass durch die Substitution dieser Ausdrücke

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

werden muss.

Da die Oberfläche stets von denselben Flüssigkeitstheilchen gebildet wird, so muss

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{c^2} = \frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} + \frac{z_0^2}{c_0^2}$$

sein; setzt man also

$$
\begin{aligned}
\frac{\xi}{a} &= \alpha_{\prime}\frac{x_0}{a_0} + \beta_{\prime}\frac{y_0}{b_0} + \gamma_{\prime}\frac{z_0}{c_0}, \\
\frac{\eta}{b} &= \alpha'_{\prime}\frac{x_0}{a_0} + \beta'_{\prime}\frac{y_0}{b_0} + \gamma'_{\prime}\frac{z_0}{c_0}, \\
\frac{\zeta}{c} &= \alpha''_{\prime}\frac{x_0}{a_0} + \beta''_{\prime}\frac{y_0}{b_0} + \gamma''_{\prime}\frac{z_0}{c_0},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

d. h. bezeichnet man in den Ausdrücken von $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ durch $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$, welche man durch Einsetzung der Werthe (1) in die Gleichungen (2) erhält, die Coefficienten durch $\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \ldots, \gamma''_{\prime}$, so bilden diese Grössen $\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \ldots, \gamma''_{\prime}$ ebenfalls die Coefficienten einer orthogonalen Coordinatentransformation: sie können betrachtet werden als die Cosinus der Winkel, welche die Axen eines beweglichen Coordinatensystems der $\xi_{\prime}$, $\eta_{\prime}$, $\zeta_{\prime}$ mit den Axen des festen Coordinatensystems der x, y, z bilden. Drückt man die Grössen x, y, z mit Hülfe der Gleichungen (2) und (3) in $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$ aus, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
l &= a\alpha\alpha_{\prime} + b\alpha'\alpha'_{\prime} + c\alpha''\alpha''_{\prime},\\
m &= a\alpha\beta_{\prime} + b\alpha'\beta'_{\prime} + c\alpha''\beta''_{\prime},\\
n &= a\alpha\gamma_{\prime} + b\alpha'\gamma'_{\prime} + c\alpha''\gamma''_{\prime},\\
l' &= a\beta\alpha_{\prime} + b\beta'\alpha'_{\prime} + c\beta''\alpha''_{\prime},\\
m' &= a\beta\beta_{\prime} + b\beta'\beta'_{\prime} + c\beta''\beta''_{\prime},\\
n' &= a\beta\gamma_{\prime} + b\beta'\gamma'_{\prime} + c\beta''\gamma''_{\prime},\\
l'' &= a\gamma\alpha_{\prime} + b\gamma'\alpha'_{\prime} + c\gamma''\alpha''_{\prime},\\
m'' &= a\gamma\beta_{\prime} + b\gamma'\beta'_{\prime} + c\gamma''\beta''_{\prime},\\
n'' &= a\gamma\gamma_{\prime} + b\gamma'\gamma'_{\prime} + c\gamma''\gamma''_{\prime}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Wir können daher die Lage der Flüssigkeitstheilchen oder die Werthe der Grössen $l, m, \ldots, n''$ zur Zeit t als abhängig betrachten von den Grössen a, b, c und der Lage zweier beweglichen Coordinatensysteme und können zugleich bemerken, dass durch Vertauschung dieser beiden Coordinatensysteme in dem Systeme der Grössen l, m, n die Horizontalreihen mit den Verticalreihen vertauscht werden, also l, m', n'' ungeändert bleiben, während von den Grössen m und l', n und l'', n' und m'' jede in die andere übergeht. Es wird nun unser nächstes Geschäft sein, die Differentialgleichungen für die Veränderungen der Hauptaxen und die Bewegung dieser beiden Coordinatensysteme aus der in der *Dirichlet*'schen Abhandlung (§. 1, 1) angegebenen Grundgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen abzuleiten.

2.

Offenbar ist es erlaubt, in jenen Gleichungen statt der Derivirten nach den Anfangswerthen der Grössen x, y, z, welche dort durch a, b, c bezeichnet sind, die Derivirten nach den Grössen ξ, η, ζ zu setzen; denn die hierdurch gebildeten Gleichungen lassen sich als Aggregate von jenen darstellen und umgekehrt. Wir erhalten dadurch wenn wir für $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, $\ldots$, $\frac{\partial z}{\partial \zeta}$ ihre

Werthe einsetzen,

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma' &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\alpha'' + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\beta'' + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\gamma'' &= \varepsilon\frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial P}{\partial \zeta},
\end{aligned}$$

worin V das Potential, P den Druck im Punkte x, y, z zur Zeit t und ε die Constante bezeichnet, welche die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Entfernungseinheit ausdrückt.

Es handelt sich nun zunächst darum, die Grössen links vom Gleichheitszeichen in die Form linearer Functionen von den Grössen ξ, η, ζ zu setzen, wozu einige Vorbereitungen nöthig sind.

Durch Differentiation der Gleichungen (2) erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$(2)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t}\alpha + \frac{\partial y}{\partial t}\beta + \frac{\partial z}{\partial t}\gamma &= \xi',\\
\frac{\partial x}{\partial t}\alpha' + \frac{\partial y}{\partial t}\beta' + \frac{\partial z}{\partial t}\gamma' &= \eta',\\
\frac{\partial x}{\partial t}\alpha'' + \frac{\partial y}{\partial t}\beta'' + \frac{\partial z}{\partial t}\gamma'' &= \zeta'
\end{aligned}$$

setzt,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{d\alpha}{dt}x + \frac{d\beta}{dt}y + \frac{d\gamma}{dt}z + \xi',\\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{d\alpha'}{dt}x + \frac{d\beta'}{dt}y + \frac{d\gamma'}{dt}z + \eta',\\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{d\alpha''}{dt}x + \frac{d\beta''}{dt}y + \frac{d\gamma''}{dt}z + \zeta'
\end{aligned}$$

und wenn man hierin x, y, z wieder durch ξ, η, ζ ausdrückt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha + \frac{d\beta}{dt}\beta + \frac{d\gamma}{dt}\gamma\right)\xi + \left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha' + \frac{d\beta}{dt}\beta' + \frac{d\gamma}{dt}\gamma'\right)\eta\\
&\quad + \left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha'' + \frac{d\beta}{dt}\beta'' + \frac{d\gamma}{dt}\gamma''\right)\zeta + \xi',\\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha + \frac{d\beta'}{dt}\beta + \frac{d\gamma'}{dt}\gamma\right)\xi + \left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha' + \frac{d\beta'}{dt}\beta' + \frac{d\gamma'}{dt}\gamma'\right)\eta
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha''+\frac{d\beta'}{dt}\beta''+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma''\right)\zeta+\eta',$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha+\frac{d\beta''}{dt}\beta+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma\right)\xi+\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha'+\frac{d\beta''}{dt}\beta'+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma'\right)\eta\\ &\quad+\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha''+\frac{d\beta''}{dt}\beta''+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma''\right)\zeta+\zeta'.\end{aligned}$$

Nun giebt aber die Differentiation der bekannten Gleichungen

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\ \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt} &= 0,\\ \alpha'\frac{d\alpha'}{dt}+\beta'\frac{d\beta'}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma'}{dt} &= 0,\\ \alpha''\frac{d\alpha''}{dt}+\beta''\frac{d\beta''}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma''}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha'}{dt}\alpha''+\frac{d\beta'}{dt}\beta''+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma'' &= -\left(\frac{d\alpha''}{dt}\alpha'+\frac{d\beta''}{dt}\beta'+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma'\right),\\ \frac{d\alpha''}{dt}\alpha+\frac{d\beta''}{dt}\beta+\frac{d\gamma''}{dt}\gamma &= -\left(\frac{d\alpha}{dt}\alpha''+\frac{d\beta}{dt}\beta''+\frac{d\gamma}{dt}\gamma''\right),\\ \frac{d\alpha}{dt}\alpha'+\frac{d\beta}{dt}\beta'+\frac{d\gamma}{dt}\gamma' &= -\left(\frac{d\alpha'}{dt}\alpha+\frac{d\beta'}{dt}\beta+\frac{d\gamma'}{dt}\gamma\right),\end{aligned}\tag{3}$$

und es wird folglich, wenn man diese letzteren drei Grössen durch p, q, r bezeichnet,

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{\partial\xi}{\partial t}-r\eta+q\zeta,\\ \eta' &= r\xi+\frac{\partial\eta}{\partial t}-p\zeta,\\ \zeta' &= -q\xi+p\eta+\frac{\partial\zeta}{\partial t}.\end{aligned}\tag{4}$$

Durch ein ganz ähnliches Verfahren ergiebt sich aus den Gleichungen (2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2x}{\partial t^2}\alpha+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\beta+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\gamma &= \frac{\partial\xi'}{\partial t}-r\eta'+q\zeta',\\ \frac{\partial^2x}{\partial t^2}\alpha'+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\beta'+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\gamma' &= r\xi'+\frac{\partial\eta'}{\partial t}-p\zeta',\\ \frac{\partial^2x}{\partial t^2}\alpha''+\frac{\partial^2y}{\partial t^2}\beta''+\frac{\partial^2z}{\partial t^2}\gamma'' &= -q\xi'+p\eta'+\frac{\partial\zeta'}{\partial t},\end{aligned}\tag{5}$$

und aus den Gleichungen Art. 1, (3), wenn $p_\prime$, $q_\prime$, $r_\prime$ die Grössen bezeichnen, welche von den Functionen $\alpha_\prime, \beta_\prime, \ldots, \gamma_\prime''$ ebenso abhängen, wie die Grössen p, q, r von den Functionen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial \frac{\xi}{a}}{\partial t} &= r_\prime \frac{\eta}{b} - q_\prime \frac{\zeta}{c}, \\
\frac{\partial \frac{\eta}{b}}{\partial t} &= p_\prime \frac{\zeta}{c} - r_\prime \frac{\xi}{a}, \\
\frac{\partial \frac{\zeta}{c}}{\partial t} &= q_\prime \frac{\xi}{a} - p_\prime \frac{\eta}{b}.
\end{aligned}
$$

Setzt man die Werthe $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ aus (6) in (4) ein, so erhält man

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\xi' &= \frac{da}{dt}\frac{\xi}{a} + (ar_\prime - br)\frac{\eta}{b} + (cq - aq_\prime)\frac{\zeta}{c}, \\
\eta' &= (ar - br_\prime)\frac{\xi}{a} + \frac{db}{dt}\frac{\eta}{b} + (bp_\prime - cp)\frac{\zeta}{c}, \\
\zeta' &= (cq_\prime - aq)\frac{\xi}{a} + (bp - cp_\prime)\frac{\eta}{b} + \frac{dc}{dt}\frac{\zeta}{c}.
\end{aligned}
$$

Was die geometrische Bedeutung dieser Grössen betrifft, so sind, wie leicht ersichtlich ist, ξ', η', ζ' die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes x, y, z der flüssigen Masse parallel den Axen ξ, η, ζ; $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ die ebenso zerlegten relativen Geschwindigkeiten gegen das Coordinatensystem der ξ, η, ζ; ferner in den Gleichungen (1) die Grössen auf der linken Seite die Beschleunigungen und die auf der rechten die beschleunigenden Kräfte parallel diesen Axen; endlich sind p, q, r die augenblicklichen Rotationen des Coordinatensystems der ξ, η, ζ um seine Axen und $p_\prime$, $q_\prime$, $r_\prime$ haben dieselbe Bedeutung für das Coordinatensystem der $\xi_\prime$, $\eta_\prime$, $\zeta_\prime$.

3.

Wenn man nun die Werthe der Grössen, ξ', η', ζ' aus (7) in die Gleichungen (5) substituirt und mit Hülfe der Gleichungen (6) die Derivirten von $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ wieder durch die Grössen ξ, η, ζ ausdrückt, so nehmen die Grössen auf der linken Seite der Gleichungen (1) die Form linearer Ausdrücke von den Grössen ξ, η, ζ an. Auf der rechten Seite hat V die Form

$$H - A\xi^2 - B\eta^2 - C\zeta^2,$$

worin H, A, B, C auf bekannte Weise von den Grössen a, b, c abhängen; und man genügt ihnen daher, wenn an der Oberfläche der Druck den constanten Werth Q hat, indem man

$$P = Q + \sigma \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right)$$

setzt und die zehn Functionen der Zeit a, b, c; p, q, r; $p_{\prime}$, $q_{\prime}$, $r_{\prime}$ und σ so bestimmt, dass die neun Coefficienten der Grössen ξ, η, ζ auf beiden Seiten einander gleich werden und zugleich die aus der Incompressibilität folgende Bedingungsgleichung $abc = a_0 b_0 c_0$ befriedigt wird. Durch Gleichsetzung der Coefficienten von $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$ in der ersten und von $\frac{\xi}{a}$ in der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$\frac{d^2a}{dt^2} + 2brr_{\prime} + 2cqq_{\prime} - a(r^2 + r_{\prime}^2 + q^2 + q_{\prime}^2) = 2\frac{\sigma}{a} - 2\varepsilon a A,$$

$$\begin{aligned} a\frac{dr}{dt} - b\frac{dr_{\prime}}{dt} + 2\frac{da}{dt}r - 2\frac{db}{dt}r_{\prime} + apq + bp_{\prime}q_{\prime} - 2cpq_{\prime} &= 0, \\ a\frac{dr_{\prime}}{dt} - b\frac{dr}{dt} + 2\frac{da}{dt}r_{\prime} - 2\frac{db}{dt}r + ap_{\prime}q_{\prime} + bpq - 2cp_{\prime}q &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die sechs übrigen durch cyclische Versetzung der Axen, oder auch durch beliebige Vertauschungen, wenn man nur dabei beachtet, dass durch Vertauchung zweier Axen nicht bloss die ihnen entsprechenden Grössen vertauscht werden, sondern zugleich die sechs Grössen $p, q, \ldots, r_{\prime}$ ihr Zeichen ändern.

Man kann diesen Gleichungen eine für die weitere Untersuchung bequemere Form geben, wenn man statt der Grössen p, $p_{\prime}$; q, $q_{\prime}$; r, $r_{\prime}$ ihre halben Summen und Differenzen

$$u = \frac{p + p_{\prime}}{2}, \quad v = \frac{q + q_{\prime}}{2}, \quad w = \frac{r + r_{\prime}}{2},$$

$$u' = \frac{p - p_{\prime}}{2}, \quad v' = \frac{q - q_{\prime}}{2}, \quad w' = \frac{r - r_{\prime}}{2},$$

als unbekannte Functionen einführt.

Dadurch wird das System von Gleichungen, welchen die zehn unbekannten Functionen der Zeit genügen müssen

$$
(\alpha)\begin{cases}
(a-c)v^2+(a+c)v'^2+(a-b)w^2+(a+b)w'^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2a}{dt^2}=\varepsilon aA-\dfrac{\sigma}{a},\\[2ex]
(b-a)w^2+(b+a)w'^2+(b-c)u^2+(b+c)u'^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2b}{dt^2}=\varepsilon bB-\dfrac{\sigma}{b},\\[2ex]
(c-b)u^2+(c+b)u'^2+(c-a)v^2+(c+a)v'^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2c}{dt^2}=\varepsilon cC-\dfrac{\sigma}{c},\\[2ex]
(b-c)\dfrac{du}{dt}+2\dfrac{d(b-c)}{dt}u+(b+c-2a)vw+(b+c+2a)v'w'=0,\\[2ex]
(b+c)\dfrac{du'}{dt}+2\dfrac{d(b+c)}{dt}u'+(b-c+2a)vw'+(b-c-2a)v'w=0,\\[2ex]
(c-a)\dfrac{dv}{dt}+2\dfrac{d(c-a)}{dt}v+(c+a-2b)wu+(c+a+2b)w'u'=0,\\[2ex]
(c+a)\dfrac{dv'}{dt}+2\dfrac{d(c+a)}{dt}v'+(c-a+2b)wu'+(c-a-2b)w'u=0,\\[2ex]
(a-b)\dfrac{dw}{dt}+2\dfrac{d(a-b)}{dt}w+(a+b-2c)uv+(a+b+2c)u'v'=0,\\[2ex]
(a+b)\dfrac{dw'}{dt}+2\dfrac{d(a+b)}{dt}w'+(a-b+2c)uv'+(a-b-2c)u'v=0,\\[2ex]
abc=a_0b_0c_0.
\end{cases}
$$

Die Werthe von A, B, C ergeben sich aus dem bekannten Ausdrucke für V

$$
V=H-A\xi^2-B\eta^2-C\zeta^2=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\left(1-\frac{\xi^2}{a^2+s}-\frac{\eta^2}{b^2+s}-\frac{\zeta^2}{c^2+s}\right),
$$

worin

$$
\Delta=\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}\,.
$$

Nach ausgeführter Integration dieser Differentialgleichungen hat man noch, um die Functionen $\alpha,\beta,\dots,\gamma''$ zu bestimmen, die allgemeine Lösung θ, θ', θ'' der Differentialgleichungen

$$
(\beta)\qquad \frac{d\theta}{dt}=r\theta'-q\theta'',\quad \frac{d\theta'}{dt}=-r\theta+p\theta'',\quad \frac{d\theta''}{dt}=q\theta-p\theta'
$$

zu suchen,—von welchen, wie aus Art. 2, (3) hervorgeht, α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'' die drei particularen Auslösungen sind, die für $t=0$ die Werthe

1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 annehmen,—und zur Bestimmung der Functionen $\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \dots, \gamma''_{\prime}$ die allgemeine Lösung der simultanen Differentialgleichungen

$$(\gamma) \qquad \frac{d\theta_{\prime}}{dt} = r_{\prime}\theta'_{\prime} - q_{\prime}\theta''_{\prime}, \quad \frac{d\theta'_{\prime}}{dt} = -r_{\prime}\theta_{\prime} + p_{\prime}\theta''_{\prime}, \quad \frac{d\theta''_{\prime}}{dt} = q_{\prime}\theta_{\prime} - p_{\prime}\theta'_{\prime}.$$

4.

Es fragt sich nun, welche Hülfsmittel für die Integration dieser Differentialgleichungen (α), (β), (γ) die allgemeinen hydrodynamischen Principien darbieten, aus denen *Dirichlet* sieben Intergrale erster Ordnung der durch die Functionen $l, m, \dots, n''$ zu erfüllenden Differentialgleichungen (§. 1. (a)) schöpfte. Die aus ihnen fliessenden Gleichungen lassen sich mit Hülfe der oben für ξ', η', ζ' gegebenen Ausdrücke leicht herleiten.

Der Satz von der Erhaltung der Flächen giebt

$$(1) \qquad \begin{aligned} (b-c)^2u + (b+c)^2u' &= g = \alpha g^0 + \beta h^0 + \gamma k^0, \\ (c-a)^2v + (c+a)^2v' &= h = \alpha' g^0 + \beta' h^0 + \gamma' k^0, \\ (a-b)^2w + (a+b)^2w' &= k = \alpha'' g^0 + \beta'' h^0 + \gamma'' k^0, \end{aligned}$$

worin die Constanten g^0, h^0, k^0, die Anfangswerthe von g, h, k, mit den Constanten $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ in der Abhandlung von *Dirichlet* übereinkommen, er liefert also das aus den sechs letzten Differentialgleichungen (α) leicht zu bestätigende Resultat, dass $\theta = g$, $\theta' = h$, $\theta'' = k$ eine Lösung der Differentialgleichungen (β) ist.

Aus dem *Helmholtz*'schen Princip der Erhaltung der Rotation folgen die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} (b-c)^2u + (b+c)^2u' &= g_{\prime} = \alpha_{\prime} g^0_{\prime} + \beta_{\prime} h^0_{\prime} + \gamma_{\prime} k^0_{\prime}, \\ (c-a)^2v + (c+a)^2v' &= h_{\prime} = \alpha'_{\prime} g^0_{\prime} + \beta'_{\prime} h^0_{\prime} + \gamma'_{\prime} k^0_{\prime}, \\ (a-b)^2w + (a+b)^2w' &= k_{\prime} = \alpha''_{\prime} g^0_{\prime} + \beta''_{\prime} h^0_{\prime} + \gamma''_{\prime} k^0_{\prime}, \end{aligned}$$

in welchen die Constanten $g^0_{\prime}$, $h^0_{\prime}$, $k^0_{\prime}$ den Grössen $BC\mathfrak{A}$, $CA\mathfrak{B}$, $AB\mathfrak{C}$ der genannten Abhandlung gleich sind.

Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft endlich giebt ein Integral erster Ordnung der Differentialgleichungen (α)

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right) \\ +(b-c)^2u^2 + (c-a)^2v^2 + (a-b)^2w^2 \\ +(b+c)^2u^2_{\prime} + (c+a)^2v^2_{\prime} + (a+b)^2w^2_{\prime} \end{array} \right\} = 2\varepsilon H + \mathrm{const.}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgen zunächst noch zwei Integrale der Gleichungen (α)

(II) $$g^2 + h^2 + k^2 = \text{const.} = \omega^2,$$

(III) $$g_{\prime}^2 + h_{\prime}^2 + k_{\prime}^2 = \text{const.} = \omega_{\prime}^2.$$

Ferner lassen sich von den Gleichungen (β) zwei Integrale

(IV) $$\theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2 = \text{const.},$$

(V) $$\theta g + \theta' h + \theta'' k = \text{const.}$$

angeben, wodurch ihre Integration *allgemein* auf eine Quadratur zurückgeführt wird. Zur Aufstellung ihrer allgemeinen Lösung ist es jedoch, da sie linear und homogen sind, nur nöthig, noch zwei von der Lösung g, h, k verschiedene *particulare* Lösungen zu suchen, für welchen Zweck man die willkürlichen Constanten in diesen beiden Integralgleichungen so wählen kann, dass sich die Rechnung vereinfacht. Giebt man beiden den Werth Null, so hat man

(3) $$\theta' h + \theta'' k = -g\theta,$$

und ferner erhält man, wenn man diese Gleichung quadrirt und dazu die Gleichung

$$-\theta'^2 - \theta''^2 = \theta^2$$

multiplicirt mit $h^2 + k^2$, addirt

$$-(\theta' k - \theta'' h)^2 = \omega^2\theta^2,$$

folglich

(4) $$\theta' k - \theta'' h = \omega i\theta.$$

Durch Auflösung dieser beiden linearen Gleichungen (3) und (4) findet sich

(5) $$\theta' = -\frac{-gh + k\omega i}{h^2 + k^2}\theta,$$

(6) $$\theta'' = -\frac{-gk - h\omega i}{h^2 + k^2}\theta$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in die erste der Gleichungen (β)

$$\frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{-g\dfrac{dg}{dt}}{h^2 + k^2} + \frac{rk + qh}{h^2 + k^2}\omega i,$$

(7) $$\log\theta = \tfrac{1}{2}\log(h^2 + k^2) + \omega i\int\frac{qh + rk}{h^2 + k^2}\,dt + \text{const.}$$

Aus dieser in (5), (6) und (7) enthaltenen Lösung der Differentialgleichungen (β) erhält man eine dritte, indem man für $\sqrt{-1}$ überall $-\sqrt{-1}$ setzt, und es ist dann leicht aus den gefundenen drei particularen Lösungen die Ausdrücke für die Functionen $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ zu bilden.

Die geometrische Bedeutung jeder reellen Lösung der Differentialgleichungen (β) besteht darin, dass sie, mit einem geeigneten constanten Factor multiplicirt, die Cosinus der Winkel ausdrückt, welche die Axen der ξ, η, ζ zur Zeit t mit einer festen Linie machen. Diese feste Linie wird für die erste der drei eben gefundenen Lösungen durch die Normale auf der unveränderlichen Ebene der ganzen bewegten Masse gebildet, für den reellen und den imaginären Bestandtheil der beiden andern durch zwei in dieser Ebene enthaltene und auf einander senkrechte Linien. Die Cosinus der Winkel zwischen den Axen und jener Normalen sind demnach $\frac{g}{\omega}$, $\frac{h}{\omega}$, $\frac{k}{\omega}$; die Lage der Axen gegen diese Normale ergiebt sich also nach Auflösung der Gleichungen (α) ohne weitere Integration und zur vollständigen Bestimmung ihrer Lage genügt eine einzige Quadratur, z. B. die Integration

$$\omega \int\limits_0^t \frac{qh + rk}{h^2 + k^2}\, dt,$$

welche die Drehung der durch die Normale und die Axe der ξ gehenden Ebene um die Normale giebt.

Ganz Aehnliches gilt von den Differentialgleichungen (γ). Man kann auf demselben Wege aus den beiden Integralen

$$\text{(VI)} \qquad \theta_{\prime}^2 + \theta_{\prime}'^2 + \theta_{\prime}''^2 = \text{const.},$$

$$\text{(VII)} \qquad \theta_{\prime} g_{\prime} + \theta_{\prime}' h_{\prime} + \theta_{\prime}'' k_{\prime} = \text{const.}$$

ihre allgemeine Lösung und folglich auch die Werthe der Grössen $\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \ldots, \gamma_{\prime}''$ zur Zeit t ableiten, und es wird dabei nur eine Quadratur erforderlich sein. Es ergiebt sich dann schliesslich der Ort eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens zur Zeit t aus den oben (Art. 1, (1) und (4)) für die Grössen x, y, z und die Functionen $l, m, \ldots, n''$ gegebenen Ausdrücken.

5.

Wir wollen uns jetzt Rechenschaft darüber geben, was durch die Zurückführung der Differentialgleichungen zwischen den Functionen $l, m, \ldots, n''$ (der Differentialgleichungen (a) §. 1 bei *Dirichlet*) auf unsere Differentialgleichungen für das Geschäft der Integration gewonnen ist. Das System der Differentialgleichungen (a) ist von der sechszehnten Ordnung, und man kennt von denselben sieben Integrale erster Ordnung, wodurch es auf ein System der neunten Ordnung zurückgeführt wird. Das System (α) ist nur von der zehnten Ordnung, und man kennt von demselben noch drei Integrale erster Ordnung. Durch die hier bewirkte Umformung jener Differentialgleichung ist also die Ordnung des noch zu integrirenden Systems von Differentialgleichungen um zwei Einheiten erniedrigt, und man hat statt dessen nur schliesslich noch zwei Quadraturen auszuführen. Diese Umformung leistet also dasselbe, wie die Auffindung von zwei Integralen erster Ordnung.

Wir bemerken indess ausdrücklich, dass hierdurch unsere Form der Differentialgleichungen nur für die Integration und die wirkliche Bestimmung der Bewegung einen Vorzug erhält. Für die allgemeinsten Untersuchungen über diese Bewegung ist dagegen diese Form der Differentialgleichungen weniger geeignet, nicht bloss, weil ihre Herleitung weniger einfach ist, sondern auch deshalb, weil der Fall der Gleichheit zweier Axen eine besondere Betrachtung erfordert. Bei Gleichheit zweier Axen tritt nämlich der besondere Umstand ein, dass die ihnen zu gebende Lage durch die Gestalt der flüssigen Masse nicht völlig bestimmt ist; sie hängt dann im Allgemeinen auch von der augenblicklichen Bewegung ab und bleibt nur dann willkürlich, wenn diese Bewegung so beschaffen ist, dass die Axen fortwährend einander gleich bleiben. Die Untersuchung dieses Falles ist zwar immer leicht und bedarf daher keiner weiteren Ausführung, kann aber in speciellen Fällen noch wieder besondere Formen annehmen, und die allgemeinen Untersuchungen, wie z. B. der allgemeine Nachweis der Möglichkeit der Bewegung (§. 2 bei *Dirichlet*), würden daher wegen der Menge von besonders zu behandelnden Fällen ziemlich weitläufig werden.

Ehe wir zur Behandlung von speciellen Fällen schreiten, in welchen sich die Differentialgleichungen (α) integriren lassen, ist es zweckmässig, zu bemerken, dass in einer Lösung dieser Differentialgleichungen, wie unmittelbar aus der Form dieser Gleichungen hervorgeht, jede Zeichenänderung der Functionen $u, v, \dots, w'$ zulässig ist, bei welcher uvw, $uv'w'$, $u'vw'$, $u'v'w$ ungeändert bleiben. Es können also erstens die Zeichen der Functionen u', v', w' gleichzeitig geändert werden, und dadurch werden die Grössen $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ mit den Grössen $\alpha_{\prime}, \beta_{\prime}, \dots, \gamma''_{\prime}$, also in dem System der Grössen $l, m, \dots, n''$ die Horizontalreihen mit den Verticalreihen vertauscht. Zweitens können gleichzeitig zwei der Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' mit den entgegengesetzten Zeichen versehen werden, und diese Aenderung lässt sich auf eine Aenderung in dem Zeichen einer Coordinatenaxe zurückführen, wobei die Bewegung in eine ihr symmetrisch gleiche übergeht. In dieser Bemerkung ist der von *Dedekind* gefundene Reciprocitätssatz enthalten.

6.

Wir wollen nun den Fall untersuchen, in welchem eins der Grössenpaare

u, u'; v, v'; w, w' fortwährend gleich Null ist, also z. B. $u = u' = 0$; die geometrische Bedeutung dieser Voraussetzung ist diese, dass die Hauptaxe stets in der unveränderlichen Ebene der ganzen bewegten Masse liegt und die augenblickliche Rotationsaxe auf dieser Hauptaxe senkrecht steht.

Aus den sechs letzten Differentialgleichungen (α) folgt sogleich, dass in diesem Falle die Grössen

$$(\mu) \qquad (c-a)^2 v, \quad (c+a)^2 v', \quad (a-b)^2 w, \quad (a+b)^2 w'$$

constant sind und die Gleichungen

$$(\nu) \qquad \begin{aligned} (b+c-2a)vw + (b+c+2a)v'w' = 0, \\ (b-c+2a)vw' + (b-c-2a)v'w = 0 \end{aligned}$$

stattfinden müssen.

Bei der weiteren Untersuchung ist zu unterscheiden, ob noch ein zweites der drei Grössenpaare Null ist oder nicht, und wir können im Allgemeinen nur noch bemerken, dass in Folge der Gleichungen (μ) die Grössen h, k, $h_{,}$, $k_{,}$ constant sind und folglich auch die Winkel zwischen den Hauptaxen und der unveränderlichen Ebene der ganzen bewegten Masse, und dass dann ferner aus der Differentialgleichungen (β) und (γ) die Verhältnissgleichungen

$$g : h : k = p : q : r$$

$$g_{,} : h_{,} : k_{,} = p_{,} : q_{,} : r_{,}$$

folgen, wodurch die Lösungen dieser Gleichungen sich vereinfachen.

Erster Fall. Nur eins der drei Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' ist gleich Null.

Wenn weder zugleich v und v', noch zugleich w und w' Null sind, folgt aus den Gleichungen (μ) und (ν)

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{v'^2}{v^2} &= \frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b+c)} = \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^4 \text{const.}, \\ \frac{w'^2}{w^2} &= \frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 \text{const.}, \end{aligned}$$

woraus sich mit Hinzuziehung von

$$abc = \text{const.}$$

ergiebt, dass a, b, c und folglich auch v, v', w, w' constant sind.

Setzen wir nun

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\frac{v^2}{(2a+b+c)(2a-b+c)} &= \frac{v'^2}{(2a-b-c)(2a+b-c)} = S,\\
\frac{w^2}{(2a+b+c)(2a+b-c)} &= \frac{w'^2}{(2a-b-c)(2a-b+c)} = T,
\end{aligned}
$$

so erhalten wir aus den drei ersten Differentialgleichungen (α) die drei Gleichungen

$$
(3)\qquad (4a^2-b^2-3c^2)S+(4a^2-3b^2-c^2)T = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\sigma^2}{2a^2},
$$

$$
(4)\qquad \begin{cases} (b^2-c^2)T = \dfrac{\varepsilon B}{2} - \dfrac{\sigma^2}{2b^2}, \\[2ex] (c^2-b^2)S = \dfrac{\varepsilon C}{2} - \dfrac{\sigma^2}{2c^2}. \end{cases}
$$

Um hieraus die Werthe von S, T und σ abzuleiten, beide man aus den Gleichungen (4) die Gleichungen

$$
b^2T + c^2S = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)},
$$

$$
T+S = \frac{\sigma}{2b^2c^2} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)(c^2+s)},
$$

und substituire diese Werthe in der Gleichung (3)

$$
(4a^2-b^2-c^2)(T+S) - 2(b^2T+c^2S) = \frac{\varepsilon A}{2} - \frac{\sigma}{2a^2},
$$

wodurch man

$$
(5)\qquad \frac{D\sigma}{2a^2b^2c^2} = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(\frac{2s+4a^2-b^2-c^2}{(b^2+s)(c^2+s)} + \frac{1}{a^2+s}\right)
$$

erhält, wenn zur Abkürzung

$$
(6)\qquad 4a^4 - a^2(b^2+c^2) + b^2c^2 = D
$$

gesetzt wird.

Durch Einsetzung des Werthes von σ in die Gleichungen (4) findet sich dann

$$(7)\qquad \frac{b^2-c^2}{b^2-a^2}DS = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)}\left(\frac{4a^2-c^2+b^2}{c^2+s} - \frac{b^2}{a^2+s}\right),$$

$$(8)\qquad \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}DT = \frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(c^2+s)}\left(\frac{4a^2-b^2+c^2}{b^2+s} - \frac{c^2}{a^2+s}\right).$$

Es bleibt nun noch zu untersuchen, welchen Bedingungen a, b, c genügen müssen, damit sich aus den Gleichungen (7) und (8) und den Gleichungen (2) für v, v', w, w' reelle Werthe ergeben.

Damit $\left(\frac{v'}{v}\right)^2$ und $\left(\frac{w'}{w}\right)^2$ nicht negativ werden, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Grösse

$$(4a^2-(b+c)^2)(4a^2-(b-c)^2) \geqq 0$$

sei. Es muss also a^2 entweder $\geqq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ oder $\leqq \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$ sein.

Wenn $a \geqq \frac{b+c}{2}$, müssen die Grössen S und T beide $\geqq 0$ sein, damit die Gleichungen (2) für v, v', w, w' reelle Werthe liefern. Man kann nun aber leicht zeigen, dass, wenn $a \geqq \frac{b+c}{2}$, D und die beiden Integrale auf der rechten Seite der Gleichungen (7) und (8) immer positiv sind. Man hat dazu nur nöthig, D in die Form zu setzen

$$a^2(4a^2-(b+c)^2) + bc(2a^2+bc)$$

und das in (7) enthaltene Integral in die Form

$$\frac{\varepsilon\pi}{2a^2b^2c^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3}((4a^2-c^2)s + a^2(4a^2+b^2-c^2) - b^2c^2),$$

und dann zu bemerken, dass aus $a \geqq \frac{b+c}{2}$ die folgenden Ungleichheiten fliessen: $4a^2-(b+c)^2 \geqq 0$, $4a^2-c^2 > 0$, ferner

$$4a^2+b^2-c^2 \geqq (b+c)^2+b^2-c^2 = 2b(b+c),$$

und folglich

$$a^2(4a^2+b^2-c^2) \geqq 2b(b+c)a^2 \geqq \tfrac{1}{2}b(b+c)^3 > b^2c^2.$$

Aus diesen Ungleichheiten folgt, dass sowohl D, als das betrachtete Integral nur positive Bestandtheile hat, und dasselbe gilt auch von dem Integral auf der rechten Seite der Gleichung (8), welches aus diesem durch Vertauschung von b und c erhalten wird. Lassen wir nun a die Werthe von $\frac{b+c}{2}$ bis ∞ durchlaufen, so wird, wenn $b > c$, T immer positiv bleiben, S aber nur so lange $a < b$. Die Bedingungen für diesen Fall sind also, wenn b die grössere der beiden Axen b und c bezeichnet,

$$\text{(I)} \qquad \frac{b+c}{2} \leqq a \leqq b.$$

Für die Untersuchung des zweiten Falles, wenn $a^2 \leqq \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, wollen wir annehmen, dass b die grössere der beiden Axen b und c sei, so dass $a \leqq \frac{b-c}{2}$. Es muss dann, damit v, v', w, w' reell werden, $S \leqq 0$ und $T \geqq 0$ sein. Da aus den Ungleichheiten

$$b^2 \geqq (2a+c)^2 > 4a^2 + c^2$$

hervorgeht, dass das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (8) in unserm Falle stets negativ ist, so wird die letztere Bedingung $T \geqq 0$ nur erfüllt werden, wenn $D(c^2 - a^2) \geqq 0$, also c^2 entweder $< \frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2}$, oder $\geqq a^2$ ist. Dieser Fall spaltet sich also wieder in zwei Fälle, und diese sind, da $\frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2} < a^2$, durch einen endlichen Zwischenraum getrennt, so dass von einem zum andern kein stetiger Uebergang stattfindet. Da das Integral in der Gleichung (7), so lange $c^2 \leqq a^2$ ist, wegen der beiden Ungleichheiten $c^2 + s \leqq a^2 + s$, $4a^2 - c^2 + b^2 > b^2$ nur positiv sein kann, so reduciren sich die zu erfüllenden Bedingungen im ersten dieser Fälle auf $a \leqq \frac{b-c}{2}$ oder

$$\text{(II)} \qquad c \leqq b - 2a \quad \text{und} \quad c^2 < \frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2}$$

und im zweiten auf

$$\text{(III)} \qquad a \leqq \frac{b-c}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta(b^2+s)} \left(\frac{4a^2-c^2+b^2}{c^2+s} - \frac{b^2}{a^2+s}\right) \leqq 0.$$

Es ist leicht zu sehen, dass das Integral auf der linken Seite der letzten Ungleichheit, wenn a die Werthe von 0 bis c durchläuft, negativ bleibt, so lange

$a \leqq \dfrac{c}{2}$ ist, während er für $a = c$ einen positiven Werth annimmt; die genaue Bestimmung der Grenzen aber, innerhalb deren diese Ungleichheit erfüllt ist, hängt, wie man sieht, von der Auflösung einer transcendenten Gleichung ab.

In Bezug auf das Zeichen von σ, welches bekanntlich entscheidet, ob die Bewegung ohner äussern Druck möglich ist, können wir bemerken, dass sich der oben gefundene Werth dieser Grösse in die Form

$$\frac{\varepsilon\pi}{D}\int\limits_0^\infty \frac{3s^2 + 6a^2 s + D}{\Delta^3}\,ds$$

setzten lässt, und also in den Fällen I und III, wo $D > 0$, jedenfalls positiv ist, für einen negativen Werth von D aber, wenigstens so lange dieser Werth absolut genommen unter einer gewissen Grenze liegt, negativ wird.

7.

Zweiter Fall. Zwei der Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' sind gleich Null.

Wir haben nun noch den Fall zu behandeln, wenn zwei der Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' fortwährend Null sind, und also nur um eine Hauptaxe eine Rotation stattfindet.

Wenn ausser u und u' auch v und v' fortwährend Null sind, so reduciren sich die Gleichungen (μ) und (ν) auf

$$(a-b)^2 w = \text{const.} = \tau \quad \text{und} \quad (a+b)^2 w' = \text{const.} = \tau'$$

und die ersten drei Differentialgleichungen (α) liefern daher die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\tau^2}{(a-b)^3} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^3} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2} &= \varepsilon a A - \frac{\sigma}{a}, \\ \frac{\tau^2}{(b-a)^3} + \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2} &= \varepsilon b B - \frac{\sigma}{b}, \\ -\tfrac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2} &= \varepsilon c C - \frac{\sigma}{c}, \end{aligned}$$

welche verbunden mit

$$abc = a_0 b_0 c_0$$

die Grössen a, b, c und σ als Functionen der Zeit bestimmen. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft giebt für diese Differentialgleichungen das Integral erster Ordnung

$$(2)\ \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right) + \frac{\tau^2}{(a-b)^2} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} = 2\varepsilon H + \text{const.},$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass wenn τ nicht Null ist, die Hauptaxen a und b nie einander gleich werden können.

Ausser den schon von *Mac Laurin* und *Dirichlet* untersuchten Fällen, wenn $a = b$, lässt noch der Fall, wenn die Grössen a, b, c constant sind, eine Bestimmung der Bewegung in geschlossenen Ausdrücken zu. In diesem Falle erhält man aus (1) durch Elimination von σ die beiden Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} + \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\varepsilon\pi}{b} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \frac{(b^2-c^2)s}{(b^2+s)(c^2+s)} = K, \\ \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} - \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\varepsilon\pi}{a} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \frac{(a^2-c^2)s}{(a^2+s)(c^2+s)} = L, \end{aligned}$$

worin die Integrale auf der rechten Seite durch K und L bezeichnet werden mögen; sie lassen sich auch in die Form setzen

$$(4) \qquad w'^2 = \frac{\tau'^2}{(b+a)^4} = \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left(\frac{s+ab}{(a^2+s)(b^2+s)} - \frac{c^2}{ab(c^2+s)} \right),$$

$$(5) \qquad w^2 = \frac{\tau^2}{(b-a)^4} = \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left(\frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)} + \frac{c^2}{ab(c^2+s)} \right).$$

Nehmen wir an, dass b, wie in den früher betrachteten Fällen, die grössere der beiden Axen a und b bezeichne, so liefern diese beiden Gleichungen dann und auch nur dann für τ^2 und τ'^2 positive Werthe, wenn K positiv und abgesehen vom Zeichen grösser als L ist; und es ist klar, dass die erste Bedingung erfüllt ist, so lange $c < b$. Der zweiten Bedingung wird genügt, wenn $c = a$, also $L = 0$ ist, und folglich auch, da K und L sich mit c stetig ändern, innerhalb eines endlichen Gebiets zu beiden Seiten dieses Werthes. Dieses erstreckt sich aber nicht bis zu den Werthen b und 0; denn für $c = b$ würde τ'^2 negativ werden, für ein unendlich kleines c aber τ^2, da dann

$$\frac{K}{c} = \varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{b^2}{a^2}s\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{L}{c} = \varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}s\right)^{\frac{1}{2}}}$$

und folglich $L > K$ wird. Wächst b, während a und c endlich bleiben, in's Unendliche, so kann L nur dann kleiner als K bleiben, wenn zugleich $a^2 - c^2$ in's Unendliche abnimmt; beide Grenzen für c sind also dann nur unendlich wenig von a verschieden. Wenn dagegen b seiner unteren Grenze a unendlich nahe kommt, so convergirt die obere Grenze für c, wo $\tau'^2 = 0$ wird, gegen a, die untere Grenze aber gegen einen Werth, für welchen das Integral auf der rechten Seite von (5) verschwindet. Zur Bestimmung dieses Werthes erhält man, wenn man $\frac{c}{a} = \sin\psi$ setzt, die Gleichung

$$(-5 + 2\cos 2\psi + \cos 4\psi)(\pi - 2\psi) + 10\sin 2\psi + 2\sin 4\psi = 0,$$

und diese hat zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$ nur eine Wurzel, welche

$$\frac{c}{a} = 0,303327\ldots$$

giebt. Für $b = a$ kann freilich c jeden Werth zwischen 0 und b annehmen, da dann τ^2 wegen des Factors $b - a$ immer Null wird. Man erhält dann den von *Mac Laurin* untersuchten Fall, während sich für $w^2 = w'^2$ die beiden von *Jacobi* und *Dedekind* gefundenen Fälle ergeben.

Der eben behandelte Fall fällt für $b = a$ mit der Falle (I) des vorigen Artikels zusammen und, wenn

$$\frac{w^2}{(b+c+2a)(b-c+2a)} = \frac{w'^2}{(b+c-2a)(b-c-2a)},$$

mit dem Falle (III). Von den bisher gefundenen vier Fällen, in denen das flüssige Ellipsoid während der Bewegung seine Form nicht ändert, hängen also diese drei Fälle stetig unter einander zusammen, während der Fall (II) isolirt bleibt.

8.

Die Untersuchung, ob ausser diesen vier Fällen noch andere vorhanden sind, in denen die Hauptaxen während der Bewegung constant bleiben, führt auf eine ziemlich weitläufige Rechnung, welche wir nur kurz andeuten wollen, da sie nur ein negatives Resultat liefert.

Aus der Voraussetzung, dass a, b, c, constant sind, kann man zunächst leicht folgern, dass σ constant ist, indem man die drei ersten Differentialgleichungen (α), multiplicirt mit a, b, c, zu einander addirt und dann die Integralgleichung I, Art. 4. also den Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, benutzt.

Durch Differentiation dieser drei Gleichungen erhält man dann ferner, wenn man die Werthe von $\frac{du}{dt}, \frac{du'}{dt}, \ldots, \frac{dw'}{dt}$, aus den sechs letzten Differentialgleichungen (α) einsetzt, die drei Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} (b-c)u(vw - v'w') + (b+c)u'(v'w - vw') &= 0, \\ (c-a)v(wu - w'u') + (c+a)v'(w'u - wu') &= 0, \\ (a-b)w(uv - u'v') + (a+b)w'(u'v - uv') &= 0, \end{aligned}$$

von denen eine eine Folge der übrigen ist.

I. Wenn nun keine von den sechs Grössen $u, u', \dots, w'$ Null ist, folgt aus diesen Gleichungen die Gleichheit der folgenden drei Grössenpaare, deren Werthe wir durch $2a'$, $2b'$, $2c'$ bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned}
(a-c)\frac{v}{v'} + (a+c)\frac{v'}{v} &= (a-b)\frac{w}{w'} + (a+b)\frac{w'}{w} = 2a', \\
(b-a)\frac{w}{w'} + (b+a)\frac{w'}{w} &= (b-c)\frac{u}{u'} + (b+c)\frac{u'}{u} = 2b', \\
(c-b)\frac{u}{u'} + (c+b)\frac{u'}{u} &= (c-a)\frac{v}{v'} + (c+a)\frac{v'}{v} = 2c'.
\end{aligned}$$

Es ergiebt sich dann $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, $b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2$, so dass wir

$$aa - a'a' = bb - b'b' = cc - c'c' = \theta$$

setzen können, und aus den drei ersten Differentialgleichungen (α)

$$2\varpi a' = \text{const.}, \quad 2\chi b' = \text{const.}, \quad 2\varrho c' = \text{const.},$$

wenn wir $vv' + ww'$, $ww' + uu'$, $uu' + vv'$ zur Abkürzung durch ϖ, χ, ϱ bezeichnen. Aus diesen Gleichungen und der aus den Integralgleichungen II und III leicht herzuleitenden Gleichung

$$(a^2-b^2)(a^2-c^2)\varpi + (b^2-a^2)(b^2-c^2)\chi + (c^2-b^2)(c^2-b^2)\varrho = \tfrac{1}{4}(\omega^2 - \omega_{\prime}^2)$$

folgt, wenn nicht $a = b = c$, dass θ und folglich $u, u', \dots, w'$ constant sein müssen. Es ergiebt sich aber leicht, dass dann die sechs letzten Differentialgleichungen (α) nicht erfüllt werden können; und hierdurch ist, wenn nicht alle drei Axen einander gleich sind, die Unzulässigkeit der Annahme, dass $u, u', \dots, w'$ sämmtlich von Null verschieden sind, erwiesen.

Die Annahme $a = b = c$ würde auf den Fall einer ruhenden Kugel führen; u', v', w' ergeben sich $= 0$, u, v, w aber bleiben ganz willkürlich, was davon herrührt, dass die Lage der Axen in jedem Augenblicke willkürlich geändert werden kann.

II. Es bleibt also nur die Annahme übrig, dass eine der Grössen $u, u', \dots, w'$ Null ist, und diese zieht, wie wir gleich sehen werden, immer die früher untersuchte Voraussetzung nach sich, dass eins der drei Grössenpaare u, u'; v, v'; w, w' verschwinde.

1. Wenn eine der Grössen u', v', w', z. B. $u' = 0$ ist, folgen aus (1) die Gleichungen

$$(b-c)uvw = 0, \quad (b-c)uv'w' = 0$$

und diese lassen nur eine von den folgenden Annahmen zu: erstens die früher untersuchte Voraussetzung, zweitens $b = c$, drittens $v = 0$ und $w' = 0$ oder $v' = 0$ und $w = 0$, was nicht wesentlich verschieden ist.

Wenn $b = c$, bleibt u ganz willkürlich und kann also auch $= 0$ gesetzt werden, wodurch der früher untersuchte Fall eintritt.

Wenn $v = 0$ und $w' = 0$, erhält man aus den Differentialgleichungen (α)

$$\begin{aligned}(b - c - 2a)uv'w &= 0,\\ (c + a - 2b)uv'w &= 0,\\ (a - b + 2c)uv'w &= 0,\end{aligned}$$

und, wenn man die erste dieser Gleichungen zur zweiten addirt,

$$-(a + b)uv'w = 0;$$

es muss also ausser den Grössen u', v, w' noch eine der Grössen u, v', w Null sein, wodurch wieder der früher untersuchte Fall eintritt.

2. Wenn endlich eine der Grössen u, v, w, z. B. $u = 0$ ist, folgt aus den Gleichungen (1)

$$u'v'w = 0, \quad u'vw' = 0$$

und diese Gleichungen führen entweder zu unserer früheren Voraussetzung, oder zu der Annahme, $u' = v' = w' = 0$, welche von der eben untersuchten $u' = v = w' = 0$ nicht wesentlich verschieden ist, oder endlich zu der Annahme $u = v = w = 0$. Unter dieser Voraussetzung aber geben die Differentialgleichungen (α) $v'w' = w'u' = u'v' = 0$, und es müssen also noch zwei von den Grössen u', v', w' Null sein, was wieder den früher behandelten Fall liefert.

Es hat sich also ergeben, dass mit der Beständigkeit der Gestalt nothwendig eine Beständigkeit des Bewegungszustandes verbunden ist d. h., dass allemal, wenn die flüssige Masse fortwährend denselben Körper bildet, auch die relative Bewegung aller Theile dieses Körpers immerfort dieselbe bleibt. Die absolute Bewegung im Raume kann man sich in diesem Falle aus zwei einfacheren zusammengesetzt denken, indem man sich zuerst der flüssigen Masse eine innere Bewegung ertheilt denkt, bei welcher sich die Flüssigkeitstheilchen in ähnlichen, parallelen und auf einem Hauptschnitte senkrechten Ellipsen bewegen, und dann dem ganzen System eine gleichförmige Rotation um eine in diesem Hauptschnitte liegende Axe. Wenn dieser Hauptschnitt, wie oben angenommen, senkrecht zur Hauptaxe a ist, so sind die Cosinus der Winkel zwischen der Umdrehungsaxe und den Hauptaxen $0, \frac{h}{\omega}, \frac{k}{\omega}$ und die Umdrehungszeit $\frac{2\pi}{\sqrt{q^2 + r^2}}$. Ferner sind $0, b\frac{h_\prime}{\omega_\prime}, c\frac{k_\prime}{\omega_\prime}$ die auf die Hauptaxen bezogenen Coordinaten des Endpunkts der augenblicklichen Rotationsaxe, und bei der innern Bewegung sind die elliptischen Bahnen der Flüssigkeitstheilchen der in diesem Punkte an das Ellipsoid gelegten Tangentialebene parallel, so dass ihre Mittelpunkte in dieser Rotationsaxe liegen. Die Theilchen bewegen sich in diesen Bahnen so, dass die nach den Mittelpunkten gezogenen Radienvectoren in gleichen Zeiten gleiche Flächen durchstreichen, und durchlaufen sie in der Zeit $\dfrac{2\pi}{\sqrt{q_{\prime}^2 + r_{\prime}^2}}$.

9.

Wir kehren jetzt zurück zur Betrachtung der Bewegung der flüssigen Masse in dem Falle, wenn u, u'; v, v' fortwährend Null sind und also nur um eine Hauptaxe eine Rotation stattfindet, und bemerken zunächst, dass sich den Gleichungen (1) Art. 7, nach welchen sich die Hauptaxen in diesem Falle ändern, noch eine andere anschaulichere mechanische Bedeutung geben lässt. Man kann sie nämlich betrachten als die Gleichungen für die Bewegung eines materiellen Punktes (a, b, c) von der Masse 1, der gezwungen ist auf einer durch die Gleichung $abc = \text{const.}$ bestimmten Fläche zu bleiben und von Kräften getrieben wird, deren Potentialfunction der Grösse

$$\frac{\tau^2}{(a-b)^2} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} - 2\varepsilon H$$

dem Werthe nach gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt ist.

Bezeichnen wir diese Grösse mit G, so lassen sich die Gleichungen für beide Bewegungen in die Form setzen:

$$(1) \qquad \frac{d^2a}{dt^2}\,\delta a + \frac{d^2b}{dt^2}\,\delta b + \frac{d^2c}{dt^2}\,\delta c + \delta G = 0$$

für alle unendlich kleinen Werthe von δa, δb, δc, welche der Bedingung $abc =$ const. genügen; und der Satz von der Erhaltung der mechanischen Kraft giebt

$$\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right) + G = \text{const.},$$

wonach der von der Formänderung der flüssigen Masse unabhängige Theil der mechanischen Kraft $= G$ ist.

Damit a, b, c und folglich Form und Bewegungszustand des flüssigen Ellipsoids constant bleiben, wenn $\dfrac{da}{dt}, \dfrac{db}{dt}, \dfrac{dc}{dt}$ Null sind, ist es offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Variation erster Ordnung der Function G von den veränderlichen Grössen a, b, c, zwischen welchen die Bedingung $abc = \text{const.}$

stattfindet, verschwinde, was auf die Gleichungen (3) oder (4) und (5) des Art. 7 führt. Diese Beständigkeit des Bewegungszustandes wird aber nur eine labile sein, wenn der Werth der Function kein Minimumwerth ist; es lassen sich dann immer beliebig kleine Aenderungen des Zustandes der flüssigen Masse angeben, welche eine völlige Aenderung desselben zur Folge haben.

Die directe Untersuchung der Variation zweiter Ordnung für den Fall, wenn die Variation erster Ordnung der Function G verschwindet, würde sehr verwickelt werden; es lässt sich jedoch die Frage, ob die Function für diesen Fall einen Minimumwerth habe, auf folgendem Wege entscheiden.

Zunächst lässt sich leicht zeigen, dass die Function immer, welche Werthe auch τ^2, τ'^2 und a, b, c haben mögen, für ein System von Werthen der unabhängig veränderlichen Grössen ein Minimum haben müsse; es folgt dies offenbar aus den drei Umständen, dass erstens die Function G für den Grenzfall, wenn die Axen unendlich klein oder unendlich gross werden, sich einem Grenzwerth nähert, der nicht negativ ist, dass zweitens sich immer Werthe von a, b, c angeben lassen, für welche G negativ wird und das drittens G nie negative unendlich werden kann. Diese drei Eigenschaften der Function G ergeben sich aber aus bekannten Eigenschaften der Function H. Die Function H erhält ihren grössten Werth in dem Fall, wenn die flüssige Masse die Gestalt einer Kugel annimmt, nämlich den Werth $2\pi\varrho^2$, wenn ϱ den Radius dieser Kugel, also $\sqrt[3]{abc}$ bezeichnet; ferner wird H unendlich klein, wenn eine der Axen unendlich gross und folglich wenigstens Eine andere unendliche klein wird, jedoch so, dass, wenn b in's Unendliche wächst, Hb nicht unendlich klein wird, und folglich in der Function G, wenn nicht zugleich a in's Unendliche wächst, der negative Bestandtheil schliesslich immer den positiven überwiegt.

Wenn τ^2 nicht Null ist, muss schon unter den Werthen von a, b, c, welche der Bedingung $b > a$ genügen, ein Werthensystem enthalten sein, für welches die Function ein Minimum wird; denn dann sind die obigen drei Bedingungen, aus welchen die Existenz eines Minimums folgt, schon für dieses Grössengebiet erfüllt, da G auch für den Grenzfall $a = b$ nicht negativ wird.

Man kann nun ferner untersuchen, wie viele Lösungen die Gleichungen (3) Art. 7 zulassen, welche das Verschwinden der Variation erster Ordnung bedingen. Diese Untersuchung lässt sich leicht führen, wenn man die Werthe der aus ihnen sich ergebenden Ausdrücke für τ^2 und τ'^2 auch für complexe Werthe der Grössen a, b, c in Betracht zieht. Wir können jedoch diese Untersuchung in die gegenwärtige Abhandlung nicht aufnehmen und müssen uns begnügen, das Resultat derselben anzugeben, dessen wir in der Folge bedürfen.

Wenn τ^2 nicht Null ist, lassen die Gleichungen (3) auf jeder Seite von $b = a$ nur Eine Lösung zu; die Variation erster Ordnung verschwindet also auf jeder

Seite dieser Gleichung nur für ein Werthensystem und die Function G muss für dieses ihr Minimum haben, welches wir durch G^* bezeichnen wollen.

Wenn τ^2 Null ist, verschwindet die Variation erster Ordnung immer für $b = a$ und einen Werth von c, der für $\tau'^2 = 0$ gleich a ist und mit wachsendem τ'^2 beständig abnimmt. Die Variation zweiter Ordnung lässt sich für dieses Werthensystem leicht in die Form eines Aggregats von $(\delta a + \delta b)^2$ und $(\delta a - \delta b)^2$ setzen, und hierin ist der Coefficient von $(\delta a + \delta b)^2$ immer positiv, da die Function, wie aus den früheren Untersuchungen bekannt ist, unter allen Werthen, die sie für $b = a$ annehmen kann, hier ihren kleinsten Werth hat.

Der Coefficient von $(\delta a - \delta b)^2$ aber ist

$$\frac{\varepsilon\pi}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left(\frac{s - ab}{(a^2 + s)(b^2 + s)} + \frac{c^2}{ab(c^2 + s)} \right),$$

also nur positiv, wenn $\frac{c}{a} > 0,303327\ldots$ und folglich $\tau'^2 < \varepsilon\pi\varrho^4 \,.\, 8,64004\ldots$, aber negativ, wenn $\frac{c}{a}$ diesen Werth überschreitet.

Die Function G hat also für dieses Werthensystem nur im ersten Falle ein Minimum (G^*), und die Untersuchung der Gleichungen (3) zeigt, dass die Variation erster Ordnung dann nur für dieses Werthensystem verschwindet; in letztern Falle aber hat sie einen Sattelwerth; sie muss dann nothwendig noch für zwei Werthensysteme ein Minimum (G^*) haben, und aus der Untersuchung der Gleichungen (3) folgt, dass die Variation erster Ordnung nur noch für zwei Werthensysteme verschwindet, welche durch Vertauschung von b und a aus einander erhalten werden.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich also, dass in dem schon seit *Mac Laurin* bekannten Falle der Rotation eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoids um seine kleinere Axe die Beständigkeit des Bewegungszustandes nur labil ist, sobald das Verhältniss der kleinern Axe zu den andern kleiner ist als $0,303327\ldots$; bei der geringsten Verschiedenheit der beiden andern würde in diesem Falle die flüssige Masse Form und Bewegungszustand völlig ändern und ein fortwährendes Schwanken um den Zustand eintreten, welcher dem Minimum der Function G entspricht. Dieser besteht in einer gleichförmigen Umdrehung eines ungleichaxigen Ellipsoids um seine kleinste Axe verbunden mit einer gleichgerichteten innern Bewegung, bei welcher die Theilchen sich in einander ähnlichen zur Umdrehungsaxe senkrechten Ellipsen bewegen. Die Umlaufszeit ist dabei der Umdrehungszeit gleich, so dass jedes Theilchen schon nach einer halben Umdrehung des Ellipsoids in seine Anfangslage zurückkehrt.

10.

Wenn die mechanische Kraft des Systems,

$$\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{da}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)_0^2\right) + G_0 = \Omega,$$

welche offenbar nicht kleiner als G^* sein kann, negativ ist, so kann die Form des Ellipsoids nur innerhalb eines endlichen durch die Ungleichheit $G \leqq \Omega$ begrenzten Gebiets fortwährend schwanken.

Für den Fall, dass $\Omega - G^*$ als unendlich klein betrachtet werden kann, können wir diese Schwankungen leicht untersuchen.

Denken wir uns in der Function G für c seinen Werth aus der Gleichung $abc = a_0b_0c_0$ substituirt, so giebt die Gleichung (1) des vorigen Artikels

$$\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{c}{a}\frac{d^2c}{dt^2} + \frac{\partial G}{\partial a} = 0, \quad \frac{d^2b}{dt^2} - \frac{c}{b}\frac{d^2c}{dt^2} + \frac{\partial G}{\partial b} = 0.$$

Die Werthe von a, b, c können nun stets nur unendlich wenig von den Werthen, die dem Minimum von G entsprechen, abweichen, und wenn wir die Abweichungen zur Zeit t mit δa, δb, δc bezeichnen und die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen, so erhalten wir zwischen diesen die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta c}{c} &= 0, \\ \frac{d^2\delta a}{dt^2} - \frac{c}{a}\frac{d^2\delta c}{dt^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial a^2}\,\delta a + \frac{\partial^2 G}{\partial a\,\partial b}\,\delta b &= 0, \\ \frac{d^2\delta b}{dt^2} - \frac{c}{b}\frac{d^2\delta c}{dt^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial b^2}\,\delta b + \frac{\partial^2 G}{\partial a\,\partial b}\,\delta a &= 0, \end{aligned}$$

welchen man bekanntlich genügen kann, wenn man

$$\frac{d^2\delta a}{dt^2} = -\mu\mu\,\delta a, \quad \frac{d^2\delta b}{dt^2} = -\mu\mu\,\delta b,$$

also auch

$$\frac{d^2\delta c}{dt^2} = -\mu\mu\,\delta c$$

setzt und dann die Constante $\mu\mu$ so bestimmt, dass Eine eine Folge der übrigen wird. Die letztere Bedingung für $\mu\mu$ kommt mit der Bedingung überein, den Ausdruck zweiten Grades von den Grössen δa, δb

$$2\,\delta^2 G - \mu\mu(\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2)$$

zu einem Quadrat eines linearen Ausdrucks von diesen Grössen zu machen; und dieser genügen, da $\delta^2 G$ und $\delta a^2+\delta b^2+\delta c^2$ wesentlich positiv sind, immer zwei positive Werthe von $\mu\mu$, welche einander gleich werden, wenn $\delta^2 G$ und $\delta a^2+\delta b^2+\delta c^2$ sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Diese beiden Werthe von $\mu\mu$ geben zwei Lösungen der Differentialgleichungen (1), bei denen sich δa, δb, δc einer periodischen Function der Zeit von der Form $\sin(\mu t + \text{const.})$ proportional ändern, und aus denen sich ihre allgemeine Lösung zusammensetzen lässt.

Jede einzeln genommen liefert periodische unendlich kleine Oscillationen der Gestalt und des Bewegungszustandes. Hieraus würde freilich nur folgen, dass es zwei Arten von Oscillationen giebt, welche sich desto mehr periodischen nähern, je kleiner sie sind; es ergiebt sich jedoch die Existenz von endlichen periodischen Schwingungen aus folgender Betrachtung.

Wenn Ω negativ ist, muss offenbar a einen und denselben Werth mehr als einmal annehmen, und betrachten wir die Bewegung von dem Augenblicke an, wo a einem solchen Werth zum erstenmal annimmt, so wird die Bewegung durch die Anfangswerthe $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ und b völlig bestimmt sein; es sind also auch die Werthe, welche diese Grössen erhalten, wenn a später wieder diesen Werth annimmt, Functionen von ihren Anfangswerthen. Diese Functionen wollen wir zusammengenommen durch χ bezeichnen. Die Bewegung wird periodisch sein, wenn ihre Werthe den Anfangswerthen gleich sind. In Folge der Gleichung $abc = \text{const.}$ und des Satzes von der lebendigen Kraft müssen aber, wenn b und $\frac{da}{dt}$ ihre Anfangswerthe wieder annehmen, auch c, $\frac{db}{dt}$ und $\frac{dc}{dt}$ wieder ihren Anfangswerthen gleich werden. Es sind also hierzu nur zwei Bedingungen zu erfüllen; und man kann, indem man die Derivirten der Functionen χ für den Fall unendlich kleiner Schwingungen bildet, zeigen, dass diese Bedingungsgleichungen sich nicht widersprechen und innerhalb eines endlichen Gebiets reelle Wurzeln haben.

Die Grössen a, b, c lassen sich für diesen Fall periodischer Schwingungen als Function der Zeit durch *Fourier*'sche Reihen ausdrücken, in welchen freilich sämmtliche Constanten, den von *Dirichlet* behandelten Fall ausgenommen, nur näherungsweise bestimmt werden können. Dieses kann z. B. dadurch geschehen, das man die oben für den Fall unendlich kleiner Schwingungen gemachte Entwicklung auf Glieder höherer Ordnung ausdehnt.

Es schien uns der Mühe werth, diese Bewegungen, welche den Bewegungen, bei denen Gestalt und Bewegungszustand constant sind, an Einfachheit zunächst stehen, wenigstens einer oberflächlichen Betrachtung zu unterwerfen. Wir wollen nun die Untersuchung, welche wir im vorigen Artikel für den Fall, wenn nur um eine Hauptaxe eine Rotation stattfindet, ausgeführt haben, auf alle der *Dirichlet*'schen Voraussetzung genügenden Bewegungen ausdehnen.

11.

Um für diesen Zweck die Differentialgleichungen (α) in eine übersichtlichere Form zu bringen, wollen wir statt der Grössen $u, v, \ldots, w'$ die Grössen $g, h, \ldots, k_{\prime}$ einführen und die Bedeutung von G dahin verallgemeinern, dass wir dadurch den Ausdruck

$$\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{g+g_{\prime}}{b-c}\right)^2+\left(\frac{h+h_{\prime}}{c-a}\right)^2+\left(\frac{k+k_{\prime}}{a-b}\right)^2 \\ +\left(\frac{g-g_{\prime}}{b+c}\right)^2+\left(\frac{h-h_{\prime}}{c+a}\right)^2+\left(\frac{k-k_{\prime}}{a+b}\right)^2 \end{array}\right\}$$
$$-2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{a_0 b_0 c_0\, ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

also auch jetzt den von der Formänderung unabhängigen Theil der mechanischen Kraft bezeichnen.

Es wird dann

$$p=\frac{\partial G}{\partial g}, \quad q=\frac{\partial G}{\partial h}, \quad r=\frac{\partial G}{\partial k},$$
$$p_{\prime}=\frac{\partial G}{\partial g_{\prime}}, \quad q_{\prime}=\frac{\partial G}{\partial h_{\prime}}, \quad r_{\prime}=\frac{\partial G}{\partial k_{\prime}},$$

und die letzten sechs Differentialgleichungen (α) lassen sich daher in die Form setzen

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} \frac{dg}{dt}=h\frac{\partial G}{\partial k}-k\frac{\partial G}{\partial h}, & \frac{dg_{\prime}}{dt}=h_{\prime}\frac{\partial G}{\partial k_{\prime}}-k_{\prime}\frac{\partial G}{\partial h_{\prime}}, \\ \frac{dh}{dt}=k\frac{\partial G}{\partial g}-g\frac{\partial G}{\partial k}, & \frac{dh_{\prime}}{dt}=k_{\prime}\frac{\partial G}{\partial g_{\prime}}-g_{\prime}\frac{\partial G}{\partial k_{\prime}}, \\ \frac{dk}{dt}=g\frac{\partial G}{\partial h}-h\frac{\partial G}{\partial g}, & \frac{dk_{\prime}}{dt}=g_{\prime}\frac{\partial G}{\partial h_{\prime}}-h_{\prime}\frac{\partial G}{\partial g_{\prime}}, \end{array}$$

während die drei ersten in

$$(2)\qquad \begin{array}{rcl} \frac{d^2a}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial a}-2\frac{\sigma}{a} &=& 0, \\ \frac{d^2b}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial b}-2\frac{\sigma}{b} &=& 0, \\ \frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial c}-2\frac{\sigma}{c} &=& 0 \end{array}$$

übergehen. Wir bemerken zugleich, dass aus der Integralgleichung II, wenn $\omega = 0$, drei Integralgleichungen, $g = 0$, $h = 0$, $k = 0$, folgen, d. h., dass diese Grössen immer Null bleiben, wenn sie anfangs Null sind. Dasselbe gilt natürlich auch von den Grössen $g_{\prime}$, $h_{\prime}$, $k_{\prime}$.

Aus den Differentialgleichungen (1) und (2) ist nun leicht ersichtlich, dass das Verschwinden der Variation erster Ordnung der Function G von den neun veränderlichen Grössen $a, b, \ldots, k_{\prime}$, zwischen welchen die drei Bedingungen

$$abc = \text{const.}, \quad g^2 + h^2 + k^2 = \omega^2, \quad g_{\prime}^2 + h_{\prime}^2 + k_{\prime}^2 = \omega_{\prime}^2$$

stattfinden, nothwendig und hinreichend ist, damit

$$\frac{d^2a}{dt^2}, \quad \frac{d^2b}{dt^2}, \quad \frac{d^2c}{dt^2}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dk_{\prime}}{dt}$$

Null werden und also Gestalt und Bewegungszustand des Ellipsoids constant bleiben, wenn $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ Null sind. Die Fälle, in denen dieses stattfindet, haben wir früher vollständig erörtert. Es ergiebt sich nun aber auch hier wieder leicht, dass die Function G wenigstens für Ein System von Werthen der unabhängig veränderlichen Grössen ein Minimum haben müsse, da sie für den alleinigen Grenzfall, wenn die Axen unendlich gross oder unendlich klein werden, gegen einen Grenzwerth convergirt, der nicht negativ ist, und, wie wir schon gesehen haben, immer für gewisse Werthe der unabhängig veränderlichen Grössen negativ wird, ohne je negativ unendlich zu werden. Für den einem solchen Minimum entsprechenden constanten Bewegungszustand folgt aus dem Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, dass jede der *Dirichlet*'schen Voraussetzung genügende unendlich kleine Abweichung von demselben nur unendlich kleine Schwankungen zur Folge hat, während in jedem andern Falle die Beständigkeit der Gestalt und des Bewegungszustandes nur labil ist. Die Aufsuchung der einem Minimum von G entsprechenden Bewegungszustände ist nicht bloss für die Bestimmung der möglichen stabilen Formen einer bewegten flüssigen und schweren Masse wichtig, sondern würde auch für die Integration unserer Differentialgleichungen durch unendliche Reihen die Grundlage bilden müssen; wir wollen daher jetzt untersuchen, in welchen von den Fällen, wo ihre Variation erster Ordnung verschwindet, die Function G ein Minimum hat. Aus jedem von den früher gefundenen Fällen, in denen das Ellipsoid seine Form behält, erhält man zwar durch Vertauschung der Axen und Aenderungen in den Zeichen der Grössen $g, h, \ldots, k_{\prime}$ mehrere Systeme von Werthen der Grössen $a, b, \ldots, k_{\prime}$, welche das Verschwinden der Variation erster Ordnung der Function G bewirken; wir können aber diese hier zusammenfassen, da die Function G für alle denselben Werth hat und in Bezug auf unsere Frage von allen dasselbe gilt.

Ehe wir die einzelnen Fälle betrachten, müssen wir ferner noch bemerken, dass die Untersuchung, wenn ω oder $\omega_{\prime}$ Null ist, eine besondere einfachere Gestalt annimmt, indem dann g, h, k oder $g_{\prime}$, $h_{\prime}$, $k_{\prime}$ aus der Function G ganz herausfallen. Die frühere Untersuchung der constanten Bewegungszustände giebt nur zwei wesentlich verschiedene Fälle, in denen eine dieser beiden Grössen Null wird. In dem im Art. 6 behandelten Falle kann dies nur eintreten, wenn

$$\frac{w'^2}{w^2} = \frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4,$$

also der Ausdruck

(3) $$b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - 3a^4,$$

den wir durch E bezeichnen wollen, Null ist; und dann ergiebt sich in der That ω oder $\omega_{\prime}$ gleich Null. Die Gleichung $E = 0$ liefert aber nach a aufgelöst nur eine positive Wurzel, die zwischen $\frac{b+c}{2}$ und b liegt, und kann also nur in Falle (I) erfüllt werden. Ausser diesem Falle giebt noch der im Art. 7 untersuchte Fall ω oder $\omega_{\prime}$ gleich Null, wenn $\tau^2 = \tau'^2$.

Es lässt sich nun zunächst zeigen, dass in den Fällen (I), (II) und (III) die Function G keinen Minimumwerth haben kann, weil sich immer, während a, b, c constant bleiben, die Grössen $g, h, \ldots, k_{\prime}$ so ändern lassen, dass der Werth der Function noch abnimmt. Da g und $g_{\prime}$ Null und h, $h_{\prime}$, k, $k_{\prime}$, den Fall $E = 0$ ausgenommen, nicht Null sind, so finden zwischen den Variationen dieser Grössen die Bedingungen statt

$$\delta g^2 + 2h\,\delta h + 2k\,\delta k = 0, \quad \delta g_{\prime}^2 + 2h_{\prime}\,\delta h_{\prime} + 2k_{\prime}\,\delta k_{\prime} = 0$$

und die Variation von G wird

$$\tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{\delta g + \delta g_{\prime}}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g_{\prime}}{b+c}\right)^2\right) + \frac{\partial G}{\partial h}\,\delta h + \frac{\partial G}{\partial k}\,\delta k + \frac{\partial G}{\partial h_{\prime}}\,\delta h_{\prime} + \frac{\partial G}{\partial k_{\prime}}\,\delta k_{\prime}$$

oder da

$$\frac{\partial G}{\partial h} : \frac{\partial G}{\partial k} = h : k, \quad \frac{\partial G}{\partial h_{\prime}} : \frac{\partial G}{\partial k_{\prime}} = h_{\prime} : k_{\prime}$$

(4) $$\delta G = \tfrac{1}{4}\left(\left(\frac{\delta g + \delta g_{\prime}}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g_{\prime}}{b+c}\right)^2\right) - \frac{1}{2h}\frac{\partial G}{\partial h}\,\delta g^2 - \frac{1}{2h_{\prime}}\frac{\partial G}{\partial h_{\prime}}\,\delta g_{\prime}^2.$$

Bildet man die Determinante dieses Ausdrucks zweiten Grades von δg und $\delta g_{\prime}$ und substituirt darin die aus Art. 6 (1) sich ergebenden Werthe

(5) $$\begin{aligned} \frac{2h}{q} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \pm \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)} \\ \frac{2h_{\prime}}{q_{\prime}} &= b^2 + c^2 - 2a^2 \mp \sqrt{(4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)} \end{aligned}$$

und folglich $\dfrac{hh_{\prime}}{qq_{\prime}} = E$, so findet sich diese

$$= \frac{3(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{4E(b^2 - c^2)^2}.$$

Sie ist also positiv im Falle (I), wenn $E < 0$, und im Falle (III), aber negativ im Falle (I), wenn $E = 0$, und im Falle (II). In den beiden ersteren Fällen kann daher der Ausdruck (4) sowohl positive, als negative Werthe annehmen, in den beiden andern aber entweder nur positive, oder nur negative. Er erhält aber für $\delta g_{\prime} = -\delta g$ den Werth

$$\delta g^2 \left(\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2E} \right),$$

welcher unter den in diesen Fällen geltenden Voraussetzungen immer negativ ist, wie man leicht sieht, wenn man ihn in die Form setzt

$$-\frac{(b^2 + c^2 - 2a^2)(b^2 + 4bc + c^2 + 2a^2) + (4a^2 - (b+c)^2)(4a^2 - (b-c)^2)}{4(b+c)^2 E} \delta g^2$$

und bemerkt, dass $b^2 + c^2 - 2a^2$ stets positiv ist, wenn $E \geqq 0$.

Wenn eine der beiden Grössen ω oder $\omega_{\prime}$, z. B. $\omega_{\prime} = 0$ ist, wird die Bedingungsgleichung zwischen $\delta g_{\prime}$, $\delta h_{\prime}$, $\delta k_{\prime}$

$$\delta g_{\prime}^2 + \delta h_{\prime}^2 + \delta k_{\prime}^2 = 0;$$

der Ausdruck der Variation von G reducirt sich folglich auf

$$\delta G = \tfrac{1}{2} \left(\frac{b^2 + c^2}{(b^2 - c^2)^2} - \frac{q}{h} \right) \delta g^2$$

und aus (5) erhält man, da $\dfrac{2h_{\prime}}{q_{\prime}} = 0$,

$$\frac{h}{q} = b^2 + c^2 - 2a^2.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes ergiebt sich

$$\delta G = -\frac{(b^2 + c^2)(4a^2 - (b+c)^2) + (b-c)^2(b^2 + 4bc + c^2)}{4(b^2 - c^2)^2(b^2 + c^2 - 2a^2)} \delta g^2$$

also negativ, da $b^2 + c^2 - 2a^2$ und $4a^2 - (b+c)^2$ in diesem Falle positiv sind.

In allen diesen Fällen hat also die Function G keinen Minimumwerth, und wir haben nun nur noch den Fall des Art. 7 zu betrachten, wobei wir den singulären Fall, wo $b = a$ und $\tau'^2 > \varepsilon\pi\varrho^4 . 8, 64004\ldots$, ganz ausschliessen können. Wenn eine der beiden Grössen ω^2 oder $\omega_{\prime}^2$ Null ist, liefert dieser Fall für jeden gegebenen Werth der andern Grösse nur Einen constanten Bewegungszustand, für welchen $\tau^2 = \tau'^2$, und die Function G muss dann für diesem ihr Minimum haben. Für je zwei gegebene von Null verschiedene Werthe von ω^2 und $\omega_{\prime}^2$ aber liefert dieser Fall zwei constante Bewegungszustände der flüssigen Masse, die durch Vertauschung von τ^2 und τ'^2 in einander übergehen; denn man kann, um τ^2 und τ'^2 aus ω^2 und $\omega_{\prime}^2$ zu bestimmen,

$$\tau = \frac{\omega + \omega_{\prime}}{2}, \quad \tau' = \frac{\omega - \omega_{\prime}}{2}$$

setzen und dabei die Zeichen von ω und $\omega_{\prime}$ beliebig wählen.

Man kann aber leicht zeigen, dass in dem einen Falle wenn ω und $\omega_{\prime}$ gleiche Zeichen haben und also τ^2 den grösseren Werth hat, kein Minimum von G stattfindet. Die Bedingungen aus den Variationen der Grössen $g, h, \ldots, k_{\prime}$ sind jetzt

$$\delta g^2 + \delta h^2 + 2k\,\delta k = 0, \quad \delta g_{\prime}^2 + \delta h_{\prime}^2 + 2k_{\prime}\,\delta k_{\prime} = 0,$$

und die Variation von G wird daher

$$\tfrac{1}{4}\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\delta g + \delta g_{\prime}}{b - c}\right)^2 + \left(\frac{\delta h + \delta h_{\prime}}{c - a}\right)^2 \\ +&\left(\frac{\delta g - \delta g_{\prime}}{b + c}\right)^2 + \left(\frac{\delta h - \delta h_{\prime}}{c + a}\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{4}\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1 + \frac{\omega_{\prime}}{\omega}}{(a-b)^2} + \frac{1 - \frac{\omega_{\prime}}{\omega}}{(a+b)^2}\right)(\delta g^2 + \delta h^2) \\ +&\left(\frac{1 + \frac{\omega}{\omega_{\prime}}}{(a-b)^2} + \frac{1 - \frac{\omega}{\omega_{\prime}}}{(a+b)^2}\right)(\delta g_{\prime}^2 + \delta h_{\prime}^2) \end{aligned}\right\}.$$

Diese aber erhält einen negativen Werth, wenn ω und $\omega_{\prime}$ gleiche Zeichen haben und $\delta h = \delta h_{\prime} = 0$, $\delta g_{\prime} = -\delta g$ angenommen wird; denn es ergiebt sich

$$\delta G = \left\{\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{(b+a)^2} + \left(\frac{1}{(b+a)^2} - \frac{1}{(b-a)^2}\right)\frac{(\omega + \omega_{\prime})^2}{4\omega\omega_{\prime}}\right\}\delta g^2$$

und hierin ist

$$\frac{1}{(b+a)^2} < \frac{1}{(b-a)^2} \quad \text{und auch} \quad \frac{1}{(b+c)^2} < \frac{1}{(b+a)^2},$$

da für $c \leqq a$ nach Art. 7 (3)

$$\frac{\tau'^2}{(b+a)^2} \geqq \frac{\tau^2}{(b-a)^2},$$

folglich $\tau'^2 > \tau^2$ ist und also τ^2 nur grösser als τ'^2 sein kann, wenn $c > a$.

Die Function hat also auch in diesem Falle kein Minimum und muss folglich in dem allein noch übrig bleibenden Falle ihre Minimum haben.

Dieses findet demnach statt für die im Art. 7 betrachtete Bewegung, wenn $\tau^2 \leqq \tau'^2$ (den oben angegebenen singulären Fall ausgenommen); und in diesem Falle würde daher, während in allen andern Fällen die Beständigkeit der Gestalt und des Bewegungszustandes nur labil ist, jede der *Dirichlet*'schen Voraussetzung genügende unendlich kleine Aenderung in der Gestalt und dem Bewegungszustande der flüssigen Masse nur unendlich kleine Schwankungen zur Folge haben. Hieraus folgt freilich nicht, dass der Zustand der flüssigen Masse in diesem Falle stabil ist. Die Untersuchung, unter welchen Bedingungen dieses stattfindet, würde sich wohl, da sie auf lineare Differentialgleichungen führt, mit bekannten Mitteln ausführen lassen. Wir müssen jedoch auf die Behandlung dieser Frage in dieser Abhandlung verzichten, die nur der weiteren Entwicklung des schönen Gedankens gewidmet ist, mit welchem *Dirichlet* seine wissenschaftliche Thätigkeit gekrönt hat.