Beiträge zur Algebra und Geometrie
Contributions to Algebra and Geometry
Volume 45 (2004), No. 1, 209-215.

Regelflächen relativgeometrisch behandelt

Georg Stamou **Athanasios Magkos**

Department of Mathematics, University of Thessaloniki
GR-54006 Thessaloniki, Greece
e-mail: stamoug@math.auth.gr

Abstract. In Euclidean three-space we consider ruled surfaces which are free of points of vanishing Gaussian curvature equipped with special relative normalizations. The purpose of this paper is to classify these relatively normalized surfaces when a linear combination of the inner curvature of the relative metric and the mean relative curvature is constant along the rulings.

0. In [6] und [7] hat F. Manhart im Rahmen der relativen Differentialgeometrie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ die Existenz und Bestimmung von Regelflächen und Rückungsflächen Φ diskutiert, die bezüglich einer *Relativnormalisierung*[1] *uneigentliche* oder *eigentliche Relativsphären* sind. Die verwendeten Relativnormalisierungen ${}^{(a)}\overline{y}$ wurden durch die Stützfunktionen (vgl. Abschnitt 1) ${}^{(a)}q :=\mid K_I \mid^a$ ($a \in \mathbb{R}$) bestimmt, wobei K_I die Gaußsche Krümmung von Φ bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir weiter die durch ${}^{(a)}\overline{y}$ relativnormalisierten Regelflächen $\Phi \subset \mathbb{R}^3$. Das Ziel ist die Klassifizierung der so relativnormalisierten Regelflächen mit der Forderung, daß der Ausdruck $X^{(a)}S + Y^{(a)}H$ $(X, Y \in \mathbb{R}, X^2 + Y^2 \neq 0)$ längs jeder Erzeugenden konstant ist ; dabei bedeutet ${}^{(a)}S$ die innere Krümmung der zugehörigen *relativen Metrik* und ${}^{(a)}H$ die *mittlere Relativkrümmung* von Φ bezüglich ${}^{(a)}\overline{y}$. Es werden u. a. alle relativen Minimalflächen bezüglich ${}^{(a)}\overline{y}$ bestimmt und Ergebnisse von F. Manhart [4] sowie von D. E. Blair und Th. Koufogiorgos [1] verallgemeinert.

1. Es sei $\Phi : \overline{x} = \overline{x}(u^1, u^2) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine injektive C^r-Flächenimmersion nirgends verschwindender Gaußscher Krümmung K_I. Eine Abbildung $\overline{y} : U \to \mathbb{R}^3$ heißt eine C^s-

[1]Bezüglich der Begriffsbildung der relativen Differentialgeometrie vgl.etwa P.A.Schirokow [9, S. 210 f].

0138-4821/93 \$ 2.50

Relativnormalisierung $(r > s \geq 1)$ von Φ, falls in jedem Punkt von U gilt:

$$\overline{y},\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial u^1},\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial u^2} \qquad \text{sind linear unabhängig und} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial u^i},\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial u^1},\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial u^2} \qquad \text{sind linear abhängig} \quad (i = 1, 2). \tag{1.2}$$

Es bestehen wegen (1.2) die Weingartenschen Ableitungsgleichungen

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial u^i} = -b_i^j \frac{\partial \overline{x}}{\partial u^j}, \tag{1.3}$$

wobei die Funktionen b_i^j die relative Krümmungstheorie bestimmen. Insbesondere ist

$$H := \frac{b_1^1 + b_2^2}{2} \tag{1.4}$$

die *mittlere Relativkrümmung* von Φ bezüglich $\overline{y}$. Für $H \equiv 0$ nennt man Φ eine *Relativminimalfläche* bezüglich $\overline{y}$.

Das Skalarprodukt von $\overline{y}$ mit dem euklidischen Normalenvektor $\overline{\xi}$ von Φ ist die *Stützfunktion* q der Relativnormalisierung, für die wegen (1.1) $q \neq 0$ in U gilt. Bei gegebener Stützfunktion q wird eine Relativnormalisierung festgelegt, die folgende Darstellung besitzt (vgl. [6, S. 107]):

$$\overline{y} = -h^{ij} \frac{\partial q}{\partial u^i} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u^j} + q\overline{\xi}, \tag{1.5}$$

wobei h^{ij} die Koordinatenfunktionen des inversen zum zweiten euklidischen Fundamentaltensor h_{ij} von Φ bezeichnet.

Für die *relative Metrik* G von Φ gilt die Beziehung

$$G = q^{-1} II, \tag{1.6}$$

wobei II die zweite Fundamentalform von Φ ist (vgl. [8, S. 196]).

2. In diesem Abschnitt diskutieren wir speziell relativnormalisierte Regelflächen im $\mathbb{R}^3$. Eine reguläre und von torsalen Erzeugenden freie C^2-Regelfläche Φ mit dem Ortsvektor $\overline{s}(u)$ ihrer Striktionslinie und dem Richtungsvektor $\overline{e}(u)$ der Erzeugenden wird über einem Gebiet $U := I \times \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) der (u, v)-Ebene durch

$$\overline{x}(u, v) = \overline{s}(u) + v\overline{e}(u) \text{ mit } \mid \overline{e} \mid = \mid \overline{e}' \mid = 1, < \overline{s}', \overline{e}' >= 0 \quad \text{in } I \tag{2.1}$$

beschrieben; dabei bedeutet Strich Ableitung nach u und $< , >$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$. Längs der Striktionslinie betrachten wir das begleitende Dreibein $\{\overline{e}, \overline{n}, \overline{z}\}$ von Φ, bestehend aus dem Erzeugendenvektor $\overline{e}(u)$, dem Zentralnormalenvektor $\overline{n}(u) := \overline{e}'(u)$ und dem Zentraltangentenvektor $\overline{z}(u) := \overline{e}(u) \times \overline{n}(u)$. Zu diesem Dreibein gehören die Ableitungsgleichungen (vgl. [3, S. 62f])

$$\overline{e}' = \overline{n},\ \overline{n}' = -\overline{e} + k\overline{z},\ \overline{z}' = -k\overline{n}, \tag{2.2}$$

wobei $k = (\overline{e}, \overline{e}', \overline{e}'')$ als *konische Krümmung* von Φ bezeichnet wird. Es sei $\delta = (\overline{s}', \overline{e}, \overline{e}')$ der *Drall* und $\sigma = \sphericalangle(\overline{e}, \overline{s}')$ $(-\pi/2 < \sigma \leq \pi/2$, sign$\delta$ =sign$\sigma)$ die *Striktion* von Φ. Der Tangentenvektor $\overline{s}'$ der Striktionslinie hat mit $\lambda := \cot\sigma$ die Darstellung

$$\overline{s}' = \delta(\lambda\overline{e} + \overline{z}). \tag{2.3}$$

Durch Vorgabe der Invarianten $k(u)$, $\delta(u)$, $\lambda(u)$ ist die Regelfläche Φ bis auf (eigentliche) Bewegungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmt.

Für die Koordinatenfunktionen des zweiten Fundamentaltensors berechnet man mit (2.1)–(2.3), $w := (v^2 + \delta^2)^{1/2}$ und $u^1 := u$, $u^2 := v$

$$h_{11} = -\frac{kv^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda)}{w}, \; h_{12} = \frac{\delta}{w}, \; h_{22} = 0. \tag{2.4}$$

Weiter gilt

$$h^{11} = 0, \; h^{12} = \frac{w}{\delta}, \; h^{22} = \frac{w[kv^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda)]}{\delta^2}. \tag{2.5}$$

Darüber hinaus betrachten wir die Relativnormalisierungen ${}^{(a)}\overline{y} : U \to \mathbb{R}^3$, die unter Verwendung von (1.5) durch

$${}^{(a)}q :=\mid K_I \mid^a \; (a \in \mathbb{R}) \tag{2.6}$$

bestimmt sind. Es sei ${}^{(a)}S$ die innere Krümmung der relativen Metrik $G =\mid K_I \mid^{-a} II =: edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ und ${}^{(a)}H$ die mittlere Relativkrümmung von Φ bezüglich ${}^{(a)}\overline{y}$. Obige einparametrige Schar von Relativnormalisierungen enthält zu $a = 0$ die *euklidische Normalisierung,* zu $a = 1/4$ die *äquiaffine Normalisierung* und zu $a = 1/2$ die *II-Normalisierung* (vgl. [5]). Es ist dann ${}^{(0)}S = K_{II}$ die innere Krümmung der zweiten Fundamentalform, ${}^{(0)}H = H_I$ die euklidische mittlere Krümmung, ${}^{(1/4)}H = H_{AFF}$ die *affine mittlere Krümmung* und ${}^{(1/2)}H = H_{II}$ die *mittlere II-Krümmung* (vgl. [5]).

Wir berechnen nun die Funktionen ${}^{(a)}S$ und ${}^{(a)}H$. Die Funktion ${}^{(a)}S$ wird durch

$${}^{(a)}S = \frac{1}{(\mid eg \mid - f^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}(e_{vv} - 2f_{uv} + g_{uu}) & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{vmatrix} \right\} \tag{2.7}$$

definiert. Mit (2.4) und $K_I = -\delta^2/w^4$ folgt dann nach langer Rechnung

$${}^{(a)}S = -\frac{1}{2} \left|\delta\right|^{2a-2} w^{-4a-3} \left(Av^4 + Bv^2 + \Gamma v + \Delta\right), \tag{2.8}$$

wobei

$$\begin{aligned} A &:= k(4a+1), \qquad B := \delta^2[2k(4a+1)+\lambda(4a-1)], \\ \Gamma &:= 2\delta^2\delta'(1-4a), \qquad \Delta := \delta^4[k(1+4a)+\lambda(1-4a)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

gesetzt wurde.

Unter Berücksichtigung von (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) und $\overline{\xi} = (\delta\overline{n} - v\overline{z})/w$ erhält man aus (1.5)

$${}^{(a)}\overline{y} = \frac{(4akv+2a\delta')\,|\delta|^{2a-2}}{w^{4a-1}}\overline{e} + \frac{(4av^2+\delta^2)\delta\,|\delta|^{2a-2}}{w^{4a+1}}\overline{n} + \frac{(4a-1)v\,|\delta|^{2a}}{w^{4a+1}}\overline{z} \tag{2.10}$$

und aus (1.3) mit (2.10)

$$\begin{aligned} b_1^1 = -\,|\delta|^{2a-2}\,w^{-4a-3}[&4akv^4 + 2a\delta'(4a-1)v^3 + k\delta^2(4a+1)v^2 + \\ &\delta'\delta^2(1-4a)(1+2a)v + k\delta^4], \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} b_2^2 = -\,|\delta|^{2a-2}\,w^{-4a-3}\{&8ak(1-2a)v^4 + 2a\delta'(1-4a)v^3 + 4a\delta^2[k(3-4a) + \\ &\lambda(4a-1)]v^2 + 2a\delta'\delta^2(1-4a)v + \delta^4[4ak+\lambda(1-4a)]\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die mittlere Relativkrümmung ${}^{(a)}H$ lautet dann nach (1.4)

$${}^{(a)}H = -\frac{1}{2}\,|\delta|^{2a-2}\,w^{-4a-3}\left(Ev^4 + Zv^2 + \Theta v + \Lambda\right) \quad \text{mit} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} E &:= 4ak(3-4a), \quad Z := \delta^2[k(1+16a-16a^2) + 4a\lambda(4a-1)], \\ \Theta &:= \delta^2\delta'(1-16a^2), \quad \Lambda := \delta^4[k(1+4a)+\lambda(1-4a)]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Im folgenden bestimmen wir zunächst diejenigen durch ${}^{(a)}\overline{y}$ relativnormalisierten Regelflächen, für welche die Funktion ${}^{(a)}S$ bzw. ${}^{(a)}H$ längs jeder Erzeugenden konstant ist ($\Leftrightarrow$ ${}^{(a)}S_v \equiv 0$ bzw. ${}^{(a)}H_v \equiv 0$). Im ersten Fall folgt aus (2.8) die Bedingung

$$A(1-4a)v^5 + [-(1+4a)B + 4\delta^2 A]v^3 - 2\Gamma(1+2a)v^2 + [-(4a+3)\Delta + 2\delta^2 B]v + \delta^2\Gamma = 0, \tag{2.15}$$

die für jedes $u \in I$ und unendlich viele Werte $v \in \mathbb{R}$ zu erfüllen ist. Durch Koeffizientenvergleich mit dem Nullpolynom und unter Berücksichtigung von (2.9) erhalten wir für $a = 1/4$ die Beziehung ${}^{(1/4)}S = -k\,|\delta|^{-3/2}$, für $a = -1/4$ die Bedingungen $\delta' = \lambda = 0$ (konstant gedrallte orthoide Regelfläche) und für $|a| \neq 1/4$ die Bedingungen $k = \delta' = \lambda = 0$ (Wendelfläche). In beiden letzten Fällen gilt ${}^{(a)}S \equiv 0$. Somit haben wir den

Satz 1. *Es sei $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ eine von torsalen Erzeugenden freie C^3-Regelfläche, die durch ${}^{(a)}\overline{y}$ $(a \in \mathbb{R}\backslash\{1/4\})$ relativnormalisiert wird. Die innere Krümmung ${}^{(a)}S$ der zugehörigen relativen Metrik sei längs jeder Erzeugenden von Φ konstant. Dann ist ${}^{(a)}S \equiv 0$ und weiter gilt:*

(a) *Für* $a = -1/4$ *ist* Φ *konstant gedrallt und orthoid.*
(b) *Für* $a \neq -1/4$ *liegt* Φ *in einer Wendelfläche.*

Analoge Behandlung von ${}^{(a)}H_v \equiv 0$ liefert für $a = 1/4$ die Beziehung ${}^{(1/4)}H = H_{AFF} = -k\,|\delta|^{-3/2}$, für $a = -1/4$ die Bedingung $k = 0$ (konoidale Regelfläche), wobei in diesem Fall ${}^{(-1/4)}H = -\lambda\,|\delta|^{-1/2}$ gilt, und für $|a| \neq 1/4$ die Bedingungen $k = \delta' = \lambda = 0$ ($\Leftrightarrow$ ${}^{(a)}H = 0$). Es gilt also der

Satz 2. *Eine von torsalen Erzeugenden freie* C^3*-Regelfläche* $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ *werde durch* ${}^{(a)}\overline{y}$ *mit* $a \in \mathbb{R}\backslash\{1/4\}$ *relativnormalisiert. Die mittlere Relativkrümmung* ${}^{(a)}H$ *sei längs jeder Erzeugenden von* Φ *konstant. Dann gilt:*
(a) *Für* $a = -1/4$ *ist* Φ *konoidal* ($\Leftrightarrow {}^{(-1/4)}H = -\lambda\,|\delta|^{-1/2}$).
(b) *Für* $a \neq -1/4$ *liegt* Φ *in einer Wendelfläche* ($\Leftrightarrow {}^{(a)}H = 0$).

Aus Obigem erhalten wir unmittelbar alle relativen Minimalregelflächen bezüglich ${}^{(a)}\overline{y}$ ($a \in \mathbb{R}$). Für $a = 1/4$ folgt das bekannte Ergebnis von P.Franck [2, S. 347], daß *eine Regelfläche genau dann Affinminimalfläche ist, wenn sie konoidal ist.* Für $a = -1/4$ erhalten wir die Bedingungen $k = \lambda = 0$ (gerades Konoid) und für $|a| \neq 1/4$ die Bedingungen $k = \delta' = \lambda = 0$. Es gilt also neben dem erwähnten Resultat von P. Franck folgendes

Korollar. *Die einzigen relativen Minimalregelflächen bezüglich* ${}^{(a)}\overline{y}$ ($a \in \mathbb{R}\backslash\ \{1/4\}$) *sind für* $a = -1/4$ *die geraden Konoide und für* $a \neq -1/4$ *die Regelflächen in einer Wendelfläche.*

Obiges Korollar enthält zu $a = 0$ ein klassisches Ergebnis von E. Catalan (vgl. z.B. [10, S. 249]) und zu $a = 1/2$ ein Resultat von F. Manhart [4]. Es sei noch vermerkt, daß es unter den relativen Minimalregelflächen bezüglich ${}^{(a)}\overline{y}$ ($a \in \mathbb{R}$) uneigentliche Relativsphären gibt. Sie treten nur im äquiaffinen Fall ($a = 1/4$) auf (vgl. [6]).

Als nächstes bestimmen wir alle Regelflächen $\Phi \subset \mathbb{R}^3$, für die der Ausdruck $X^{(a)}S + Y^{(a)}H$ ($X, Y \in \mathbb{R}$, $XY \neq 0$) längs jeder Erzeugenden konstant ist. Es muß also gelten:

$$X^{(a)}S_v + Y^{(a)}H_v = 0,\ \forall (u,v) \in U \tag{2.16}$$

oder unter Beachtung von (2.8) und (2.13)

$$\begin{gathered}(1-4a)(AX+EY)v^5 + [-(1+4a)(BX+ZY) + 4\delta^2(AX+EY)]v^3\\ -2(1+2a)(\Gamma X+\Theta Y)v^2 + [-(3+4a)(\Delta X+\Lambda Y) + 2\delta^2(BX+ZY)]v\\ +\delta^2(\Gamma X+\Theta Y) = 0,\ \forall (u,v) \in U.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Im äquiaffinen Fall gilt dies stets (siehe oben). Es sei nun $a \neq 1/4$. Aus (2.17) folgt dann das System

$$AX + EY = 0, \tag{2.18}$$
$$(1+4a)(BX+ZY) = 0, \tag{2.19}$$
$$\Gamma X + \Theta Y = 0, \tag{2.20}$$
$$(3+4a)(\Delta X+\Lambda Y) - 2\delta^2(BX+ZY) = 0. \tag{2.21}$$

Für $a = -1/4$ erhalten wir mit (2.9) und (2.14) die Bedingungen $k = \delta' = \lambda = 0$. Für $a = -3/4$ reduziert sich das System auf

$$k(X + 9Y) = 0, \tag{2.22}$$
$$(k + \lambda)X + (5k - 3\lambda)Y = 0, \tag{2.23}$$
$$\delta'(X - Y) = 0. \tag{2.24}$$

Eine Behandlung dieses Systems liefert folgende Regelflächenklassen:

1) konstant gedrallte konoidale Regelflächen ($\Leftrightarrow 3^{(-3/4)}S + {}^{(-3/4)}H = -8\lambda\,|\delta|^{1/2}$),

2) gerade Konoide ($\Leftrightarrow {}^{(-3/4)}S + {}^{(-3/4)}H = 0$) und

3) konstant gedrallte Regelflächen mit $k + 3\lambda = 0$ ($\Leftrightarrow 9^{(-3/4)}S - {}^{(-3/4)}H = -40\lambda\,|\delta|^{1/2}$).

Schließlich sei $a \neq 1/4, -1/4, -3/4$. Das System (2.18)–(2.21) erhält dann mit (2.9) und (2.14) die Gestalt

$$k[(1 + 4a)X + 4a(3 - 4a)Y] = 0, \tag{2.25}$$
$$[2k(4a + 1) + \lambda(4a - 1)]X + [k(1 + 16a - 16a^2) + 4a\lambda(4a - 1)]Y = 0, \tag{2.26}$$
$$\delta'[2X + (1 + 4a)Y] = 0, \tag{2.27}$$
$$[k(1 + 4a) + \lambda(1 - 4a)](X + Y) = 0. \tag{2.28}$$

Subtraktion von (2.26) und (2.28) und Beachtung von (2.25) liefert die Bedingung

$$\lambda[2X + (1 + 4a)Y] = 0. \tag{2.26a}$$

Wir unterscheiden folgende zwei Fälle:

1) Es sei $2X + (1 + 4a)Y \neq 0$. Dann folgt aus (2.27) $\delta' = 0$, aus (2.26a) $\lambda = 0$ und aus (2.25), (2.28) $k = 0$.

2) Es sei

$$2X + (1 + 4a)Y = 0. \tag{2.29}$$

Gilt in (2.25) $k = 0$, so folgt aus (2.28) und (2.26a) notwendigerweise $\lambda = 0$. Es gelte in (2.25)

$$(1 + 4a)X + 4a(3 - 4a)Y = 0. \tag{2.30}$$

Wegen $XY \neq 0$ erhalten wir aus (2.29) und (2.30) die Werte $a = 1/4$ und $a = 1/12$, von denen wegen der Annahme nur der Wert $a = 1/12$ akzeptiert ist. Dann erhalten wir aus (2.28) die Bedingung $2k + \lambda = 0$. Zusammenfassend gilt somit der

Satz 3. *Es sei $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ eine von torsalen Erzeugenden freie C^3-Regelfläche, die durch ${}^{(a)}\overline{y}$ ($a \in \mathbb{R}\backslash\{1/4\}$) relativnormalisiert wird. Es seien X, Y reelle Zahlen mit $XY \neq 0$ und der Ausdruck $X^{(a)}S + Y^{(a)}H$ sei längs jeder Erzeugenden von Φ konstant. Dann gilt:*

(a) *Für $a = -1/4$ liegt Φ in einer Wendelfläche* ($\Leftrightarrow {}^{(-1/4)}S = {}^{(-1/4)}H = 0$).

(b) *Für $a = -3/4$ läßt sich Φ in folgende drei Typen einteilen:*

(b_1) Φ *ist konstant gedrallt und konoidal* ($\Leftrightarrow 3^{(-3/4)}S + {}^{(-3/4)}H = -8\lambda\,|\delta|^{1/2}$).

(b$_2$) Φ *ist gerades Konoid* ($\Leftrightarrow {}^{(-3/4)}S + {}^{(-3/4)}H = 0$).

(b$_3$) Φ *ist konstant gedrallt mit* $k + 3\lambda = 0$ ($\Leftrightarrow 9^{(-3/4)}S - {}^{(-3/4)}H = -40\lambda\,|\delta|^{1/2}$).

(c) *Für* $a \neq -1/4, -3/4$ *liegt* Φ *in einer Wendelfläche, falls* $2X + (1+4a)Y \neq 0$ *ist, bzw. gilt die Beziehung* $2k + \lambda = 0$*, falls* $2X + (1+4a)Y = 0$ *ist; im letzten Fall gilt stets* $k = \lambda = 0$*, wenn* $a \neq 1/12$ *ist.*

Für $a = 0$ liefert obiger Satz ein Ergebnis von D. E. Blair und Th. Koufogiorgos [1].

Literaturverzeichnis

[1] Blair D. E.; Koufogiorgos Th.: *Ruled surfaces with vanishing second Gaussian curvature.* Monatsh. Math. **113** (1992), 177–181. Zbl 0765.53003

[2] Franck P.: *Über die paraboloidischen Flächen*, (2. Mitteilung). Jahresber. DMV **23** (1914), 343–352.

[3] Kruppa E.: *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie.* Springer-Verlag, Wien 1957. Zbl 0077.15401

[4] Manhart F.: *Die II-Minimalregelflächen.* Anz. Österr. Akad. Wiss. Math. - Naturwiss. Kl. 1982, 157–160. Zbl 0521.53005

[5] Manhart F.: *Zur Differentialgeometrie der 2. Grundform.* Ber. Math. Statist. Sek. Forschungszentrum Graz, Ber. **219** (1984). Zbl 0544.53003

[6] Manhart F.: *Uneigentliche Relativsphären, die Regelflächen oder Rückungsflächen sind.* Proceedings of the Congress of Geometry, Thessaloniki 1987, 106–113. Zbl 0641.53004

[7] Manhart F.: *Eigentliche Relativsphären, die Regelflächen oder Rückungsflächen sind.* Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1988, 37–40.

[8] Manhart F.: *Relativgeometrische Kennzeichnungen euklidischer Hypersphären.* Geom. Dedicata **29** (1989), 193–207. Zbl 0733.53006

[9] Schirokow P. A.; Schirokow A. P.: *Affine Differentialgeometrie.* B. G. Teubner, Leipzig 1962. Zbl 0106.14703

[10] Strubecker K.: *Differentialgeometrie III. Theorie der Flächenkrümmungen.* Sammlung Göschen, Berlin 1969. cf. Walter de Gruyter und Co. Berlin 1969 Zbl 0165.55201

Received February 3, 2003