Asociación Matemática Venezolana, Boletín, Vol. I, Nº1, Año 1994

Núcleos Invariantes y Teoremas de Dilatación, Parametrización y Predicción

Mischa Cotlar

Mucho agradezco la invitación de la comisión editora a escribir un artículo para el primer número del Boletín de la AMV. Desde sus líneas expreso mi gratitud a mis colegas venezolanos y a mis compañeros del seminario de análisis: todos ellos me han brindado una magnífica hospitalidad, amistad y generosidad.

El presente artículo reproduce en forma ampliada una exposición hecha en el Coloquio de Matemática de Caracas. Su objeto es describir una serie de trabajos realizados en Caracas por un grupo de investigadores del que formo parte. Estos trabajos desarrollan una teoría de núcleos llamados NTGs (núcleos de Toeplitz generalizados) y estudian sus aplicaciones. La noción de NTG apareció en los dos primeros trabajos de esta serie, donde la transformada de Hilbert ha sido enfocada por una teoría de núcleos de M. Krein. Los núcleos definidos positivos (p.d.) e invariantes respecto a ciertas transformaciones suelen tener representaciones mediante núcleos elementales o propios, y tales teoremas de representación constituyen un método importante del análisis. Así, el enfoque que Gelfand y Raikov (1943) e independientemente H.Cartan y Godement dieron del análisis de Fourier en grupos topológicos, así como el de E.Cartan (1929) y M.Krein (1949) para espacios homogéneos, se basan en representaciones de núcleos, que también están en la base de la teoría de representación de grupos. El trabajo de Krein se basaba en un método general de representación de núcleos p.d. y de funcionales directores que él elaboró en 1946, con el que obtuvo también su teorema de extensión (ver más abajo) y aplicaciones a desarrollos y problemas de Sturm-Liouville. La última aplicación vinculó a las funciones (matrices) de Heisenberg con problemas de momentos, y este vínculo con la teoría de dispersión (scattering) fue usada más tarde en un ciclo de trabajos de Adamjam-Arov-Krein (A-A-K) del que hablaremos más adelante. La teoría de Krein fue aplicada en aquellos dos trabajos a la clase A_2 de medidas μ tales que la transformada de Hilbert es acotada en $L^2(\mu)$. Se probó que es posible asociar a toda medida μ un núcleo $K_\mu : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$, de modo que $\mu \quad A_2$ sii este núcleo es p.d. Estos núcleos K_μ no son invariantes por traslaciones, es decir no son Toeplitz, pero son Toeplitz en un sentido generalizado, o local, lo que originó la noción de NTGs. Los NTGs en **T** no entran directamente en la teoría general de Krein, pero los de **R** si entran en un refinamiento (local) de esta teoría. Esto permitió obtener una representación integral de los NTGs mediante una clase de núcleos elementales, que constituyó el primer resultado básico llamado TBG (teorema de Bochner generalizado). Como la clase A_2 jugó un rol en la teoría de espacios BMO, concepto central del análisis actual, así como en la teoría de predicción en procesos gaussianos, el TBG interesó a un grupo de amigos de Caracas que se propuso desarrollar el TBG, en particular parametrizar sus representaciones y extenderlo a núcleos operadores, y a estudiar sus aplicaciones. Resultó que el TBG proporcionaba un metodo unificador de muchos tópicos del análisis armónico y la teoría de operadores, contenía como corolarios a los teoremas de dilatación y levantamiento de Nagy y

Nagy-Foias (N-F) respectivamente, los de Nehari y Paley, los teoremas de parametrización y de aproximación de A-A-K y el teorema de extensión de Krein. Más aún, los NTGs conducen a nuevos enfoques en la teoría de coligaciones y parámetros de Schur en espacios de Krein, y en la teoría de extensiones unitarias de Arov-Grossman. Los NTGs encontraron también aplicaciones en trabajos de otros investigadores en USA, Europa, Japon, Israel y Uruguay. En particular V. Katsnelson enfocó el TBG mediante las teorías de Potapov y Arov-Grossman, mientras que Rubio Francia y N. Kalton los vincularon con la teoría de extrapolación y factorización de las clases A_p y con la interpolación de espacios de Hardy.

Antes de pasar a la descripción de los trabajos realizados en Caracas recordemos las propiedades básicas de los núcleos Toeplitz en **Z**. Si E es un conjunto, un núcleo K: $E \times E \rightarrow \mathbf{C}$ se dice p.d (definido positivo) si para todo $x_1,....,x_n$ E, $c_1,....,c_n$ **C** es $\sum_{ij} K(x_i,x_j)\, c_j\overline{c_i} \geq 0$.

Si K: $E \times E \rightarrow L(H)$ es un núcleo a valores operadores acotados en el espacio Hilbert H, se dice que K es p.d. si $x_1,....,x_n$ E, $\xi_1,...,\xi_n$ H es $\sum_{ij} K(x_i,x_j)\, \xi_j,\xi_i\ {}_H \geq 0$. Si E es un grupo entonces K se dice invariante o Toeplitz si $K(x,y) = K(x + z, y + z)$, para todo z, lo que equivale a $K(x,y) = \beta\,(x - y)$ donde $\beta\,(x) = K(x,0)$. En caso del grupo **Z** de los enteros importan los intervalos $\mathbf{Z}_a=\{n \quad \mathbf{Z}: 0 \leq a\}$ y las semirectas discretas $\mathbf{Z}_1 = \{n \quad \mathbf{Z} : n \geq 0\}$, $\mathbf{Z}_2 = \{n \quad \mathbf{Z} : n < 0\}$, y análogamente para el grupo **R**. La restricción de un núcleo Toeplitz de **Z** a $\mathbf{Z}_a \times \mathbf{Z}_a$ tambien se llama Toeplitz; en cambio la restricción de un nucleo Toeplitz K': $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ a $\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2$ se llama Hankel, y K: $\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2$ es Hankel sii $K(n + p, m) = K(n, m - p)$, para todo $p \geq 0$. No tiene sentido hablar de núcleos Hankel p.d., pero si tiene sentido, y es importante, hablar de núcleos de Hankel acotados: K: $\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{C}$ se dice acotado si para todo $x_1,....,x_n$ $\mathbf{Z}_1$, $c_1,....,c_n$ $\mathbf{C}$, $y_1,....,y_n$ $\mathbf{Z}_2$, $d_1,....,d_n$ $\mathbf{C}$ se verifica $|\sum_{ij} K(x_i,y_j)\, c_i\overline{d}_j \,| \geq (\sum_i |c_i|^2)^{1/2} \; (\sum_j |d_j|^2)^{1/2}$.

Para estos núcleos en **Z** (o en **R**) valen los teoremas siguientes:

l) Teorema de Herglotz-Bochner: Un núcleo Toeplitz K: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ es p.d. sii existe una medida positiva $u \geq 0$ en el grupo dual $\mathbf{T} \sim [0, 2\pi)$ tal que $K(m,n) = \hat{u}\,(m - n)$, donde $\hat{u} : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ es la transformada de Fourier de u : $\hat{u}\,(n) = \int e_n(t)\, du$, $e_n(t) = \exp(int)$; esta u es única. Bochner extendió este teorema a los grupos $\mathbf{T}^n$ y $\mathbf{R}^n$ (en caso de $\mathbf{R}^n$ se requiere que K sea contínuo).

2) Teorema de extensión de M.Krein. Si K: $\mathbf{R}_a \times \mathbf{R}_a \to \mathbf{C}$ es un núcleo contínuo Toeplitz, entonces K es p.d. sii existe una medida finita positiva u en **R** tal que $K(m,n) = \hat{u}\,(m-n)$, o sea sii K se extiende a un núcleoToeplitz p.d. en todo $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Idem para **Z**.

3) Teorema de Nehari. Un núcleo de Hankel K: $\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{C}$ es acotado sii existe una función acotada u en **T**, tal que $K(m,n) = \hat{u}\,(m - n)$, para todo (m,n) $\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2$.

A cada t T corresponde un núcleo Toeplitz elemental $K_t\,(m,n) = e_{m-n}(t)$, dado por $e_n(t)$, que como función de t es propia del operador L = id/dx, y como función en n es propia de la traslación $n \to n + 1$

El teorema de Bochner dice que todo núcleo Toeplitz p.d. de **Z** se representa (o se desarrolla) por tales núcleos elementales propios:

$K = \int K_t\, du$. En caso de núcleos K en **R**, K es Toeplitz si $L_x\, K(x,y) = L_y{}^*\, K(x,y)$, y el teorema de Bochner dice que si K es Toeplitz p.d. entonces K se representa mediante núcleos elementales propios -L. La teoría general de Krein, mencionada más arriba, asegura que esto es cierto si L es un operador diferencial arbitrario con coeficientes bastante lisos. Berezanski combinó la teoría de Krein con la de Gelfand-Kostuchenko relativa a vectores propios generalizados, y extendió el resultado precedente a operadores en derivadas parciales en **R**^{n}. Además Berezanski sistematizó esta teoría en un tratado sobre desarrollos en funciones propias, aparecido en 1965. La teoría Krein-Berezanski anticipó los núcleos reproductivos de Aronzajn, así como algunos aspectos de las formas integrales de Grothendieck y de la teoría de partículas elementales de Laurent Schwartz, y tiene aplicaciones a los funcionales de Wightman, espacios de Fock y otros aspectos probabilísticos de la Mecánica Cuántica. La *u* del teorema de extensión de Krein, así como la *u* en el de Nehari, no son únicas y existen descripciones parametrizadas de todas las representaciones, y condiciones de unicidad. El teorema de Nehari fue encontrado independientemente en los trabajos citados de A-A-K, donde además se resolvíó el problema más dificil de la parametrizacion. Los teoremas anteriores estan estrechamente relacionados a los teoremas de Caratheodory, Schur y Nevanlinna-Pick de interpolación de funciones analíticas.

Los núcleos invariantes están relacionados con las representaciones unitarias de grupos, es decir con funciones que asocian a todo x de un grupo abeliano G un operador unitario U(x) L(H), en un espacio Hilbert H, de modo que U(x+y)= U(x)U(y), U(0) = I . La representación se dice cíclica si existe un vector cíclico ξ H, tal que H es generado por los elementos U(x) ξ; análogamente se definen los subespacios cíclicos N H.Todo subespacio cíclico define un núcleo p.d. de Toeplitz K: G × G → L(N), dado por K(x,y) ξ = P U(x-y) ξ, para todo ξ de N, donde P es la proyección de H sobre N. El teorema de dilatación de Naimark dice que recíprocamente todo núcleo p.d. Toeplitz K: G × G → L(N), N de Hilbert, se obtiene de esta manera de una representación unitaria de G que tiene a N como subespacio cíclico. Cuando N consta de un solo elemento ξ, cíclico, este teorema se reduce al principio de Gelfand-Raikov que establece una correspondencia entre representaciones unitarias cíclicas y núcleos Toeplitz p.d., que condujo a lo que los físicos llaman el principio GNS (Gelfand, Naimark, Segal). Como todo operador unitario U genera una representacion U^n del grupo **Z**, este teorema proporciona el modelo de 1os operadores unitarios cíclicos, del cual sigue fácilmente que el teorema espectral de operadores unitarios (y el de Stone de grupos unitarios) es lógicamente equivalente al teorema de Bochner en **T** (o en **R**). Sz. Nagy mostró que si T L(H) es una contracción, es decir $\|T\| \leq 1$, entonces es p.d. el núcleo Toeplitz K: $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow L(H)$ definido por $K(0,n) = T^n$ si $n \geq 0$, y $= (T^*)^{-n}$ si $n < 0$. Del teorema Naimark sigue entonces:

4) <u>Teorema de dilatación de Nagy</u>. Para toda contracción T L(H) existe un espacio Hilbert H' H y un operador unitario U L(H') tal que para todo $n \geq 0$, y para todo ξ H es $T^n = PU^n \xi$, P el proyector de H' sobre H, y H es cíclico en H'. U se llama la dilatación unitaria de T, que es esencialmente única (modulo isomorfismos unitarios). Mas aún,

$H' = H \quad H_+ \quad H_-$ donde H_+ es saliente: $UH_+ \quad H_+$, H_- entrante : $U^{-1} H_- \quad H_-$, de modo que (H', H_+, H_-, U) constituye un sistema Lax-Phillips en sentido amplio. Todo tal sistema tiene asociada cierta función a valores operadores $\theta: T \rightarrow L(H_0)$, $H_0 = H_+ \ominus UH_+$, llamada función o matrix de Heisenberg, que en cierto sentido traduce el comportamientodelaevoluciónU^n en el futuro ($n \geq 0$) y pasado ($n < 0$) remotos. Esto lleva a módelos importantes de operadores, así como a una nueva etapa en la teoría espectral y el cálculo funcional. Un teorema básico de esta teoría, probado antes en el caso particular, cuando $T_1 = T_2$, $U_1 = U_2$ = un shift bilateral, por D. Sarason, es

5) Teorema de levantamiento del conmutante de Nagy-Foias (N-F). Sea para $i = 1, 2$, T_i $L(H_i)$ una contracción, U_i $L(H_i')$ su dilatación unitaria, y A $L(H_1,H_2)$ una contracción que interlaza a T_1 con T_2, $T_2A = AT_1$. Entonces existe una contracción B $L(Ho(_{1,}'),Ho(_{2,}'))$ que interlaza U_1 con U_2 y tal que $P_2B = AP_1$, P_i la proyección de $Ho(_{i,}')$ sobre H_i se llama levantamiento del interlace A, y en general no es único. La clasificación de todos los levantamientos B de A fue descrita en un ciclo de trabajos de Arsene, Ceausescu y Foias (1978-1980).

Los dos últimos resultados, junto con los trabajos de A-A-K arriba mencionados, constituyen el instrumento más potente en la teoría actual de momentos e interpolación de funciones analíticas, y han influenciado el desarrollo de la teoría de sistemas, coligaciones, control y geofísica. Por otra parte el teorema de Nehari inspiró el siguiente teorema de Helson-Szego (H-S). Sea V el espacio vectorial generado por las funciones $e_n(t) = \exp(int)$, n $\mathbf{Z}$. El operador $\Gamma: V \rightarrow V$ definido por $\Gamma(\sum a_n e_n(t)) = \sum \eta(n)\, a_n e_n(t))$, donde $\eta(n) = -i$ si n $\mathbf{Z}_l$ y i si n $\mathbf{Z}_2$, se llama de Hilbert y se extiende a un operador acotado en p si $1 < p < \infty$, y es dado por una integral singular llamada de Hilbert. Esto no es necesariamente cierto para los espacios $L^2(\nu)$ si ν es una medida general, y diremos que ν A_2 con constante c, si el operador Γ se extiende a un operador acotado en $L^2(\nu)$ de norma $\leq$ c. Por otra parte en la teoría de predicción interesan los numeros $\rho_n(\nu)$ = coseno en $L^2(\nu)$ del ángulo entre el subespacio e_nV_1, donde V_1 está generado por los $e_k(t)$ con k $\mathbf{Z}_1$, y el V_2 generado por los e_k con k $\mathbf{Z}_2$. Se tiene entonces:

6) Teorema de Helson - Szego (H-S) (1960). ν A_2 sii $\rho_0(\nu) < 1$, y sii $\nu = \exp \omega(t)\, dt$, donde $\omega = f + \Gamma g$, con f, g L^∞ y $\| g \|_\infty < \pi / 2$, de modo que ω $L^\infty + \Gamma L^\infty$.

Este teorema fue seguido por otros dos de Helson-Sarason: el primero dice que $\rho_n(\nu) < 1$ sii $d\nu = P(t) \exp \omega(t)\, dt$, $\omega \quad L^\infty + \Gamma L^\infty$, P polinomio, y el segundo caracteriza las ν con $\rho_n(\nu) \to 0$. Ibrahimov caracterizó el caso $\rho_n(\nu) = 0(\exp(-\lambda_n))$ y extendió estos resultados a **R**.

Pasemos ahora a la noción de NTG cuyo estudio comenzó en Caracas alrededor del 1977, motivado por el problema de la acotación de la transformada de Hilbert. En aquel entonces ya se realizaba en Venezuela una actividad matemática de mucho nivel en casi todas las ramas de la misma. Al mismo tiempo comenzó también el estudio de temas relacionados con la tranformada de Hilbert. En la Universidad Central de Venezuela (UCV) G. Cámera, C. Sadosky y M. Cotlar coordinaban un seminario sobre espacios Hardy, teorema de la corona y transformada de Hilbert al que asistían C. Casas, C. Ballester (cuyo trabajo en 1os *Proceedings AMS 1968*, sobre un teorema de E.Stein, esta estrechamente vinculado al tema aqui tratado) y mas tarde R. Arocena, J. León, M. Morán, J. Abreu (desaparecido prematuramente) J. Jiménez (quien trabajaba en la teoría maximal de Calderon) y C. Finol (quien se ocupaba en la teoría de interpolación de espacios). En los ultimos años este estudio se intensificó a través de los trabajos de G. Ponce, M. Dominguez, R. Bruzual, S. Marcantognini, W. Urbina, José Giménez, I. Irribaren, V. Echandía, N. Merentes, entre otros.

La propiedad básica de la transformada de Hilbert es su acotación en los espacios L^p. De la demostración que Sz. Nagy dió de un teorema básico de mi tesis doctoral quedó claro que dicha propiedad era consecuencia del cálculo funcional de operadores y del hecho que la transformada de Hilbert, así como la medida de Lebesgue, eran invariantes por traslaciones y dilataciones. Este enfoque no se aplica en caso de medidas generales, pues estas son invariantes respecto del

58

operador shift σ f(t) = (exp(it)) f(t) pero no respecto de traslaciones, mientras que la transformada de Hilbert no es invariante respecto del shift. Sin embargo la transformada Hilbert tiene una propiedad débil o local de invariancia por el shift: su restricción a V_1 es invariante por σ, y su restricción a V_1 por σ^{-1}. Esto hace que una medida $\nu \geq 0$ de **T** verifica ν A_2 con constante M sii es p.d. el núcleo K_ν : **Z** × **Z** → **C** definido por K_ν (m,n) = (M - η(m)η(n)) o(ν,^)(m-n). Los núcleos K = K_ν no son ToepLitz pero su restricción a cada cuadrante $\mathbf{Z}_i \times \mathbf{Z}_j$ si lo es: ∩ i, j = 1,2, existe una funcion β_{ij} : **Z** → **C** tal que K(m,n) = β_{ij} (m-n) si (m,n) $\mathbf{Z}_i \times \mathbf{Z}_j$.Todo núcleo de esta forma se llama NTG y toda cuaterna β_{ij} : **Z** → **C** i,j = 1,2, define un NTG K que se designa con K ~ (β_{ij}). Los núcleos precedentes K_ν son NTGs especiales. Los NTGs de **Z** no entran en 1a teoría de Krein-Berezanski, pero como se mostró en una nota de Cotlar-Sadosky (*C.-R. Acad. Sci. Paris 1977*), los NTGs de **R** entran en un refinamiento de dicha teoría, lo que propociona la siguiente representación: Todo NTG K se reresenta como K = i(,,K)$_t$ dμ, donde para cada t es K un NTG elemental o propio de la forma K_t(x,y) = ω_{ij}(t) exp it(x-y) si (x,y) $\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j$, i, j = 1, 2, donde ω_{ij}(t) es una matrix ≥ 0. Una vez conocida la forma de los NTGs elementales, se obtuvo en otro trabajo (*Proc. Symp. Pure Math, AMS 1979*) la siguiente representacion de los NTGs de **Z**.

7) <u>Teorema de Bochner generalizado</u> (TBG). Si K ~ (β_{ij}), es un NTG p.d. en **Z** entonces existe en **T** una cuaterna de medidas, μ_{ij}, tales que para todo boreleano Δ de **T** es positiva la matriz 2x2 μ (Δ) = (μ_{ij} (Δ)), y tales que K ~ (o(μ,^)$_{ij}$) = o(μ,^).

Una cuaterna de medidas ρ = (ρ_{ij}) se dice débilmente positiva si es p.d. el NTG K ~ (ρ_{ij}) y se escribe (ρ_{ij}) > 0. El TBG equivale a:

8) <u>Teorema de levantamiento de medidas débilmente positivas</u>.

Si $\rho = (\rho_{ij}) > 0$. existe una cuaterna positiva $o(\mu,\hat{}) = (o(\mu,\hat{})_{ij})$ tal que $(o(\mu,\hat{})_{ij}) \geq 0$ y (tal que ρ y $o(\mu,\hat{})$ definen el mismo NTG: $K \sim (\rho_{ij})$ y $K \sim (o(\mu,\hat{})_{ij})$.

C. Sadosky dedujo del último teorema esta otra caracterización de A_2 con control sobre la norma:

9) ν A_2 con const. M sii $d_\nu = \omega dt$ y se verifica una de las condiciones:

a) h $H^l(T)$ tal que $2\omega(t) \leq \mathrm{Re}\, h(t) \leq |h(t)| \leq 2M\, \omega(t)$

b) el operador T_ω: $f \to \omega^{-1}T(\omega f)$ verifica $T_\omega 1$ L^∞. En este caso se dice que T es u-continuo en L^2.

La noción de u-continuidad permitió más tarde versiones multidimensionales de 9) y apareció en trabajos de Rubio Francia y Kalton. De 9) es fácil deducir el teorema de H-S con control sobre la norma y con extensiones a pares de medidas. Luego el teorema H-S es corolario del TBG.

R. Arocena, quien entonces trabajaba en su tesis doctoral en Caracas, y su amigo J. León, quien se formó en los grupos de probabilidades del IVIC y la USB, ambos se interesaron en el TBG. Aunque el campo de trabajo de León estaba en otros temas, el participó en todo el desarrollo de la teoría de los NTGs, sugirió aplicaciones a procesos gaussianos y colaboró en varios trabajos (ver mas adelante), si bien no siempre quiso aparecer como co-autor.

Arocena caracterizó los puntos extremales de los núcleos K_ν y obtuvo estimaciones más precisas en (11) con lo cual estableció varios refinamientos de los teoremas de Helson, Szego, Sarason e Ibrahimov. Estos resultados de Arocena junto con otros de C. Sadosky sobre NTGs con momentos inciciales nulos, y con otras aplicaciones a la dualidad de Feferman-Stein fueron reunidos en un trabajo de Arocena-Cotlar-Sadosky publicado en el volumen de homenaje a Laurent Schwartz en

Adv. Math. Sup. Studies 1981.

Poco tiempo despues se interesaron en el tema M. Morán, M. Domínguez, S. Marcantognini, R. Bruzual y mas tarde P. Alegria. Se formó asi un grupo que se propuso explorar en más detalle las propiedades y aplicaciones de los NTGs. Durante años el grupo se reunía periódicamente en un seminario en la UCV, al que más tarde asistieron J. Barría (del IVIC), C. Pereyra y J. Giménez, y más recientemente también W. Urbina y A. Octavio. Pocos meses después de iniciarse el grupo, C. Sadosky se traslado a Washington D.C. y desde entonces el estudio de los NTGs se ramificó en dos direcciones. Una seguía un programa que nos hemos trazado con C. Sadosky, que contemplaba aplicaciones a los $A\rho$, a formas de Grothendieck y versiones del TBG en sistemas de Lax-Phillips, en $\mathbf{T}^n$: y no conmutativas. La otra, introducida por Arocena y desarrollada con el grupo de Caracas, aunque inspirada en los NTGs, iniciaba una nueva línea de estudio con nuevos métodos, más hacia problemas actuales de parametrización de los levantamientos, coligaciones unitarias y espacios de Krein. El desarrollo de la segunda dirección fue precedida por algunos trabajos de Arocena-Cotlar donde se ajustaban cuestiones comenzadas en el trabajo de Arocena-Cotlar-Sadosky. En particular se extendió el teorema de dilatación de Naimark a NTGs y se puntualizó que tambien el teorema de Nehari era corolario del TBG. El hecho que el TBG contenía a Nehari planteaba dos problemas básicos: aclarar la relacion del TBG con N-F y extender la parametrizacion de A-A-K al TBG.

En un trabajo de Arocena-Cotlar se intentó una parametrización de las medidas en el TBG, (cf. *North Holand Math. Lib. 34, 1985*), pero de un tipo muy diferente del A-A-K. Otro intento de generalizar el teorema de Sarason tampoco conducía a la dirección deseada. Sorpresivamente, Arocena, logró resolver ambos problemas básicos: en *Publ. Math. d'Orsay 1983*, él elaboró con técnicas nuevas una generalizaci6n de la fórmula de A-A-K a BTGs, y en *Integral Equations and Operator Theory 6 (1983)* mostró que todo interlace en el teorema de N-F está determinado por un NTG p.d., a valores operadores, asociado, lo que conducía a la tesis deseada: el N-F quedaba así incluído como corolario del TBG. La demostracion de Arocena unificaba los teoremas de Nagy y N-F, además contenía una idea importante que Arocena perfecionó más tarde y que Foias y Frazo llamaron el acoplamiento de Arocena (o la proyección de Arocena) que fue analizado en detalle en el reciente tratado de estos autores sobre el teorema N-F. En un trabajo en *Journal of Functional Analysis 1986*, Arocena vinculó la teoría de NTGs p.d. con la de sistemas lineales y sistemas Lax-Phillips, y en una publicación de la *Université d'Orsay* presentó estas ideas en forma más detallada y con varias nuevas contribuciones sobre el teorema de Naimark, la matriz de Heisenberg y otros temas. El trabajo atrajo la atención de M. Krein y de Arov, y este último le envió una separata de una comunicación a los Dokladi sobre una nueva teoría iniciada por Arov y Grossman sobre matrices de scattering y extensiones unitarias de isometrías que tenía puntos de contacto con las ideas de Arocena. Arocena enfocó también el trabajo de Arov-Grossman con sus métodos y orientó al grupo de Caracas hacia la teoría de coligaciones y la teoría de Arov-Grossman. Al mismo tiempo inició una profunda teoría general de NTGs, que llamó núcleos TKC (*Journal of Operator Theory 1989*). A principios de 1987 Arocena regresó al Uruguay para reconstruir junto a otros científicos uruguayos la universidad del Uruguay destruída durante la dictadura.

Desde entonces publicó varios trabajos importantes, siempre con nuevas ideas, sin repetirse, sobre parametros de Schur, extensiones unitarias de isometrías y otros temas (ver por ej. *Dekker Lectures Notes 1992; Journal of Operator Theory 1989; Operator Theory: Advances and Applications 1989; Revista UMA 1988, 34; ibid 1991*).

Como ya se mencionó, León sugirió conexiones del TBG con la teoría de predicción y procesos gausianos. En un artículo de Arocena y León se extendió a los NTGs la predicción de Wiener-Kolmogorov que como se sabe está relacionada a los sistemas de Lax-Phillips mencionados más arriba. Luego León sugirió extender a los NTGs un resultado de Lewis-Thomas referente a los sistemas Lax-Phillips particulares asociados a dilataciones de Nagy (ver las lineas que siguen al teorema de Nagy): tales sistemas se caracterizan por un ruido blanco que satisface una ecuación de Langevin que aparece en el Movimiento Browniano.

Una generalización de este tipo fue indicada en un trabajo de Cotlar, León y C. Pereyra (*Acta Científica Venezolana 1987*), donde además la teoría de NTGs fue enfocada mediante una variante del método de funcionales directores de Krein-Langer y los deaarrollos en funciones propias mencionados al comienzo de esta exposición.

Por otra parte un sistema de Lax-Phillips puede pensarse como un par de representaciones de las relaciones de conmutacion de la Mecánica Cuántica en un mismo espacio de Hilbert, y la dilatación de Naimark conduce a una generalización de tales representaciones, llamadas sistemas covariantes, así como a una generalización correspondiente de sistemas Lax-Phillips. En un trabajo de Arocena, Cotlar y León (*Aspects of Math. and App. Elsevier Science Pub. 1986*) se observa que todo NTG p.d., a valores operadores, origina un tal par de sistemas covariantes y se generaliza la representación de Lax-Phillips mediante la función de Heisenberg a tales pares. En el mismo trabajo se enfoca desde el punto de vista de sistemas covariantes una versión del teorema de Levy-Kinchine para núcleos NTGs. Otro enfoque algebraico de este teorema, para núcleos Toeplitz operadores y núcleos de Hankel, fue dado por M. Morán en su tesis de maestría.

M. D. Morán estudia problemas de parametrización y el método de «choice sequences». En su tesis doctoral abordó el problema de enfocar la parametrización de Arsene-Ceausescu-Foias de los levantamientos de N-F mediante la teoría de los NTGs. En este trabajo Morán logró una nueva demostración simplificada de dicha parametrizacion, con nuevos refinamientos, combinando la construcción de Arocena con algunos resultados anunciados por Arov-Grossman sobre matrices de scattering en la teoría de extensión unitaria de isometrías. Aclaremos que en e1 TBG, como en muchos problemas de momentos, las soluciones del problema están en correspondencia biunívoca con las extensiones unitarias de cierta isometría. Su trabajo fue publicado en el *Jour. Math. An. App.(1987)* cuando aún no se conocían las demostraciones de la nota de Arov-Grossman, y Morán dio demostraciones independientes de algunos resultados de estos autores. Unos dos años más tarde Arov y Grossman publicaron una exposición detallada y ampliada de su nota precedente, citando las demostraciones de Morán.

Al encarar versiones dos-dimensionales, o dos-parametricas, del TBG o de problemas de momentos, se presenta el siguiente problema: ¿cuándo dos isometrías dadas admiten extensiones unitarias definidas en un mismo espacio Hilbert y conmutantes?. En casos particulares, condiciones necesarias y suficientes, para que este problema tenga solución, fueron obtenidas en forma independiente por A. Koranyi y R.

Arocena (*Journal of Operator Theory 1989*). En varios trabajos de Morán (ver *Journal of Operator Theory 24, 1990, Proceedings Timisoara 1992*) profundizados en dos trabajos recientes (*UCV, Facultad de Ciencias 1993, ibid 1992*) se dan clasificaciones parametrizadas de todas aquellas extensiones de pares de isometrías. Hace unos meses Morán tuvo varias conversaciones con Arov sobre el tema, y él la alentó a seguir en esta nueva e importante dirección. En un reciente trabajo de Morán en colaboración con S. Marcantognini, presentado a la Conferencia sobre Teoría de Operadores en Viena, estos resultados se extienden a espacios de Krein: se dan condiciones necesarias y suficientes para que dos isometrías en un espacio Krein, cuyos espacios de defecto son de Hilbert, admitan extensiones unitarias conmutantes en un espacio de Hilbert, y se da una descripción de todas las extensiones, con condiciones de unicidad.

En trabajos de Marisela Domínguez se logran progresos en los problemas de predicción de Helson-Szegö, Helson-Sarason e Ibrahimov, así como en el T.B.G., en el caso de **R**. En el trabajo de Arocena-Cotlar-Sadosky estos problemas fueron considerados sólo para medidas de **T**. Los problemas de predicción en **R** fueron tratados en el libro de Ibrahimov y Rosanov pero aún quedaban algunos puntos oscuros. En una carta a Arocena, Ibrahimov sugeria que el método de NTGs podía ayudar a aclarar estos puntos. M. Domínguez extendió en primer lugar el TBG para medidas finitas en **R** y dedujo como corolarios a los teoremas de Helson Szegö - Sarason en **R**, y además dió respuesta a uno de los problemas de Ibrahimov: caracterizó los procesos linealmente completamente regulares y dió condiciones necesarias y suficientes para la velocidad de convergencia del coeficiente de máxima correlación, es decir, del coseno del ángulo entre el pasado y el futuro adelantado. Estos resultados se pueden ver en *Revista Brasileira de Probabilidade e Estatística 1989* y *Studia Mathematica 1990*. Con esto quedó aclarado el caso de medidas finitas en **R**. Luego M. Domínguez extendió en *Journal of Multivariate Analysis 1992* sus resultados a medidas u de orden menor o igual que b, es decir, tales que $u / (x^2 + 1)^{b/2}$ es finita, dando además versiones con funciones enteras de tipo exponencial (en vez de trigonométricas) en el caso de b = 0, usando ideas de Hayashi sobre las que le llamó la atención Sarason. Aclaremos que el teorema de H-S en **R** dice que una $u \in A_2$ es de la forma $\exp(u + \tilde{v})$ dt, con $u, v \in L^\infty$, $\|v\|_\infty < \pi/2$, lo que por un teorema de Zygmund implica que $|\exp(u + \tilde{v})|^p (1 + x^2) \in L^1$, para algún $p \in (1, \infty)$, y en particular μ es de algún orden finito b; pero esto no aclaraba la relación de b con $\|u\|$ y $\|v\|$. En cambio en los trabajos de M. Domínguez se dan versiones con control sobre el orden de u. Por otra parte, en su tesis y en los trabajos presentados en *Journal of Multivariate Analysis (1989), Proceedings of the International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems (1989),* M. Domínguez, introdujo una nueva y fina técnica en la teoría de medidas a valores matrices, basada en la equivalencia de dos nociones de positividad débil de cuaternas de tales medidas. Esta técnica es aplicada luego para extender sus resultados sobre predicción a procesos multivariados y a generalizaciones correspondientes de los teoremas de H-S-Sa caracterizando la densidad espectral de procesos gaussianos estacionarios fuertemente mezclantes. Más aún, en el caso escalar es sabido que el teorema de Helson-Szegö es corolario de un teorema de Widom-Devinatz que da condiciones de invertibilidad de operadores de Toeplitz T_φ con $|\varphi| = 1$ (por definición $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$ donde $f \in H^2$ y P es la proyección de L^2 sobre H^2). En *Operator Theory: Advances and*

Applications (1991), M. Domínguez extiende este teorema a sistemas de operadores de Toeplitz en términos de medidas matriciales débilmente positivas, usando sus resultados anteriores. Nikolski y Sarason se interesaron en estos trabajos y De Wilde observó que esta teoría matricial podria interesar también a algebristas y sugirió redactar un artículo sobre el tema para una revista de álgebra. En particular, con los trabajos de M. Domínguez que aclaran y generalizan la extensi6n del TBG a **R** para medidas finitas y no finitas, la teoría de NTGs. queda puesta sobre bases firmes en los grupos **T** y **R**.

Un perfeccionamiento de la teoría NTG en **R** de otro tipo fue logrado por R. Bruzual, al extender el teorema de Krein a NTGs y profundizar la noción de NTG. En primer lugar Bruzual aclaró el problema de la posibilidad de extender el teorema de H-S a 1a recta discreta **Z**, mostrando que este problema está ligado al teorema de extensión de Krein y que no existen medidas m en **Z** tales que la transformada de Hilbert actúe en $L^2(u)$. Además, inspirado en el teorema de Arocena, Bruzual mostró que también propiedades de conmutación que presentan los operadores subnormales y casi normales originan NTGs p.d. Por otra parte, como es sabido que el teorema de Bochner en **R** es equivalente al teorema espectral de Stone sobre grupos unitarios, Bruzual se preguntó si el teorema de extensión de Krein, más general que el de Bochner, no es corolario de una generalización correspondiente del teorema de Stone. En su tesis doctoral, publicada en *Integral Equations (1986)*, se muestra que efectivamente el teorema de Krein es corolario de una generalización del de Stone a semigrupos locales de isometrías. El concepto de semigrupos locales, introducido independientemente por Bruzual, fue considerado antes por algunos físicos y por Nussbaum para el caso de operadores simétricos, y por Langer y

Grosman para isometrías. M. Krein, ya enfermo, se interesó por el trabajo de Bruzual y recomendó especialmente su publicación.

De esta manera los teoremas de Stone y de Krein quedaron incluidos en el TBG, y el teorema de Krein generalizado a NTGs. Recientemente Friedrichs unificó los resultados de Bruzual con conocidas generalizaciones vectoriales del teorema de Krein, y en particular incluyó asi el TBG en **R** para núcleos escalares en el teorema de Krein para núcleos matrices. En un trabajo publicado en *Acta Científica Venezolana*, comentado por Berezanski en *Mathematical Reviews*, Bruzual generalizó su método de semigrupos locales en la línea de Krein-Berezanski y como aplicación obtuvo una versión de la generalización de L. Schwartz del teorema de Bochner a NTGs, o sea para NTGs distribuciones. En un trabajo reciente de próxima aparición en *Integral Equations* Bruzual obtuvo con su método importantes resultados sobre la extensión del teorema de Krein a dos dimensiones, que incluye a teoremas anteriores de Livshitz y Berezanski. En un trabajo en colaboracion con S. Marcantognini (ver más abajo) los semigrupos locales de isometría se extienden a espacios de Krein.

S.Marcantognini, conocedora de las técnicas de espacios de Krein, promovió junto con Arocena la conexión de los NTGs con espacios de Krein y con 1a teoría de coligaciones. En cierto modo, sus trabajos se inscriben en el marco de un amplio proyecto que tiene por objetivo mostrar que el teorema de dilatación de Naimark y sus extensiones permiten un enfoque unificado de diversos tópicos de la teoría de operadores. Si un operador T de un espacio de Hilbert H tiene una dilatación unitaria U en un espacio H’ H entonces debe ser ||T|| ≤ l. Sin embargo Ch. Davis mostró que aún si ||T||< l, T tiene una extensión unitaria en un espacio de Krein que contiene a H. En su tesis de maestría y en *Acta Científica Venezolana 37 (l986),* S. Marcantognini presenta una nueva demostración de este teorema con técnicas originales, basada en una generalización de Arocena del teorema de Naimark, y además da criterios para que el operador unitario admita un par fundamental de subespacios invariantes uniformemente definidos. El siguiente paso en la realización del proyecto propuesto es dado en su tesis doctoral sobre coligaciones unitarias de operadores en espacios de Krein publicada en *Integral Equations and Operator Theory 13 (1990)*, donde el teorema de Naimark se usa como herramienta básica. En este trabajo se consideran funciones $\theta(z)$ a valores operadores, definidas, analíticas y uniformemente acotadas en el disco unitario abierto del plano complejo, y se demuestra que ellas pueden ser realizadas como funciones características de coligaciones unitarias de operadores en espacios de Krein. Se demuestra además que cada función $\theta(z)$ es la funcion característica de la dilatación unitaria minimal del operador básico de la coligación. En el trabajo en colaboración de S.Marcantognini con R. Bruzual, (*Local Semigroups in* $\Pi\kappa$ *spaces and Applications to Related Continuation Problems for* κ*-indefinite Generalized Toeplitz Kernels, Integral Equations and Operator Theory 15 1992)* se muestra que todo núcleo de Toeplitz generalizado κ -indefinido en [-a,a], ($0<a<\infty$; $\kappa < \infty$), puede extenderse a un núcleo de Toeplitz generalizado *x*-indefinido, definido en la entera recta real. El resultado se obtiene por el método de núcleos reproductores aplicando ciertos resultados de la teoría de semigrupos locales de operadores. Conjuntamente con A. Dijksma, M. A. Dritschel y H.S.V. de Snoo, en *The Commutant Lifting Theorem for Contractions on Krein Spaces, Proc. XIV Conf, on Oper. Theo. Timisoara, Rumania, Operator Theory: Advances and Applications 61 (1993),* se presenta una demostración del teorema de levantamiento del conmutante para contracciones en espacios de Krein. El método de demostración consiste en asociar a los datos del problema una isometría V que actúa en un espacio de Krein, de manera que cada extensión unitaria de V produce un levantamiento contractivo del operador de enlace. Más aún, se demuestra que los levantamientos contractivos en el teorema de levantamiento del conmutante están en correspondencia biyectiva, a menos de isomorfismos, con las extensiones unitarias de V. Otra demostración del teorema de levantamiento del conmutante para contracciones en espacios de Krein está dada por el método de «couplings» en *The Commutant Lifrting theorem in the Krein Space Setting; a Proof based on the Coupling Method, Indiana University Math. J. 41 (1992).* Generalizaciones del teorema de levantamiento del conmutante en el marco de los espacios de Krein en el caso que el operador de enlace es una «cuasi contracción» han sido abordadas en un trabajo conjunto de Marcantognini, Arocena, Azizov y Dijksma (*A Lifting Problem, preprint*). Recientemente ha sido sometido para su publicación un trabajo de Marcantognini, Dijksma y de Snoo (*A Shur Type Analysis of the Minimal Unitary Hilbert Space Extensions of a Krein Space Isometry whose Defect Subspaces are Hilbert*). Allí el estudio de las extensiones unitarias de una isometría que actúa en un espacio de Krein se relacionan con extensiones isométricas de un paso, parámetros de Schur, momentos y matrices de scattering con subespacios de escala. Los resultados se aplican al problema de describir los levantamientos contractivos en el marco del teorema de levantamiento del conmutante. Finalmente, como ya se mencionó en un trabajo de Marcantognini con Morán, se estudia cuando dos isometrías dadas en un espacio de Krein admiten extensiones unitarias conmutantes en un espacio de Krein más vasto, y se han dado parametrizaciones de las soluciones en casos particulares.

Pedro Alegría introdujo un nuevo método constructivo de parametrización de las extensiones unitarias de una clase general de isometrías con índices de defecto finitos. Las representaciones del TBG y de sus diversas extensiones son proporcionadas por las extensiones unitarias de ciertas isometrías asociadas, y la clase de isometrías tratada por Alegría abarca a todas estas y otras que se presentan en situaciones vinculadas al TBG. Su método da una nueva fórmula de parametrización de las representaciones del TBG en **T**, y en particular del teorema de Nehari, de un tipo diferente de las de Arocena y de A-A-K; sin embargo estas últimas se deducen como corolarios de la fórmula de Alegría. La fórmula de Alegría es más próxima a las de Nevanlinna y Riesz del problema clásico de momentos de potencias (en vez de momentos trigonométricos) pués se basa en el uso de sucesiones de polinomios asociados al problema, definidos en forma recurrente. En el caso de NTGs $K \sim (\beta ij)$ donde β_{12} toma un número finito n de valores no nulos, la fórmula de Alegría conduce a un algoritmo de Schur que permite reducir el problema para un n general a un numero finito de problemas con n = l, y en cada paso el dato es un parámetro tipo Schur que depende en forma recurrente de los datos precedentes. En el caso particular del teorema de Nehari, este algoritmo produce los parámetros clásicos de Schur. El teorema de Nehari está vinculado a la desigualdad lacunar de Paley que a su vez está vinculada al teorema de Grothendieck. En el caso lacunar del teorema de Nehari, la fórmula de Alegría conduce a un nuevo tipo de parámetros de Schur que forman una matriz triangular. El método de Alegría combina un teorema de Chumakin con una idea de M. Morán y permite parametrizar las representaciones del TBG biparamétrico probado por Cotlar y Sadosky, así como dar un algoritmo Schur para el Nehari biparamétrico. Los principales resultados de esta teoría están expuestas en la tesis doctoral de Alegría (*Universidad del Pais Vasco 1992*) y en dos trabajos de próxima aparición en *Math. Nachr* (ver también *Acta Científica Venezolana 39, 1988*).

Como ya dijimos, después del trabajo de Arocena-Cotlar-Sadosky, el estudio de los NTGs se ramificó en dos direcciones: una representada por 1os trabajos que acabamos de resumir y otra por los de Cotlar y Sadosky realizados en encuentros periódicos en Washington. Los trabajos de Cotlar-Sadosky fueron resumidos en *Operator Theory, Advances and Applications 58 (1987)* y en *Analysis at Urbana II Cambridge Univ. Press (l989),* y no serán considerados aquí. Sólo diré que ellos extienden el TBG a los grupos $\mathbf{T}^n$ y $\mathbf{R}^n$, al espacio simpléctico **C**, a sistemas de Lax-Phillips y a levantamientos condicionales, entre otros temas. Como se ve, de los resúmenes que preceden, los trabajos realizados en el seminario de la UCV tienden a ampliar su campo de estudio sin perder lazos con los NTGs. Ultimamente, un importante desafío para una mayor amplitud de los temas tratados en el seminario, se produjo con la participación de Wilfredo Urbina y Alfredo Octavio en las reuniones del mismo. Los trabajos de estos dos investigadores no tocan los NTGs pero tratan temas de las mismas áreas donde se ubican los problemas descritos aquí. Urbina es una de las personas que más promueve, en Venezuela, el interés por el estudio de temas relacionados con las generalizaciones multidimensionales de la transformada de Hilbert, llamadas de Riesz. En efecto, él trabaja en dos frentes: en las transformadas de Riesz y en procesos estocásticos, Sus investigaciones tratan temas comunes a estas dos teorías, donde él obtuvo importantes resultados sobre la acotacion de la transformada de Riesz en $L^p(\gamma_a)$, γ_a la medida de Gauss (*ver sus trabajos: Singular Integrals with respect to the Gaussian measure, Scuola Norm. Sup. Pisa, IV vol XVII, 4 1990. Estimates for the Maximal Operatos of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup, con C.Gutiérrez, por anarecer en Proc. AMS y Elementos de Análisis Armónico Gaussiano, UCV, Facultad de Ciencias 1992*). Las propiedades de invariancia que se presentan aquí, ya no son respecto de los *shifts* o traslaciones, sino respecto del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck. Seria importante saber si aquí no habría una teoría similar al método de representación de Krein y problemas parecidos a los descritos en el presente artículo. El amplio e importante campo de trabajo de Alfredo Octavio se ubica en el cálculo funcional originado por la teoría de Nagy-Foias. Octavio trata versiones multiparamétricas, y algunos de sus resultados podrían tener relación con los los problemas n-paramétricos abordados por Cotlar-Sadosky y M. Morán para el caso del TBG y la extensión de isometrías. Es de esperar que en un futuro próximo aparezcan interacciones de este tipo. En efecto, el trabajo matemático de Octavio concierne principalmente, Algebras Duales generadas por tuplas de contracciones que conmutan entre sí, las cuales actúan en un espacio de Hilbert separable, complejo e infinito dimensional. Por tanto, tiene que ver con las recientes técnicas desarrolladas para estudiar tuplas de contracciones y, particularmente, con el espectro conjunto, cálculo funcional y funciones analíticas en varias variables. El interés es demostrar la existencia de subespacios invariantes comunes no triviales. Su trabajo se inició con una construcción de un cálculo funcional para pares con propiedades especiales que conciernen su medida espectral conjunta. Luego estudia las propiedades de este cálculo funcional. En particular, demuestra que aunque el espectro conjunto sea «grande» (i. e. contenga e1 toro bidimensional), es posible que el cálculo funcional, que no es más que un homomorfismo de álgebras entre el álgebra de funciones analíticas en el bidisco (producto cartesiano de dos discos unidad) y el algebra de operadores acotados en un espacio de Hilbert, tenga un kernel no trivial. El caso del cálculo funcional no isométrico es muy poco entendido incluso actualmente. Junto con los matemáticos polacos Marek Ptak y Marek Kosiek, estudió pares de contracciones cuyo espectro conjunto es mucho mas rico; en este caso, el cálculo funcional es una isometría. En dos casos distintos se probó que el álgebra generada por el par es reflexiva, y por tanto el par posee «muchos» subespacios invariantes comunes no triviales. El primer caso es cuando uno de los miembros del par tiene la propiedad CO. El otro tiene que ver con propiedades de diagonalizacion de las extensiones coisométricas del par.