MATEMÁTICAS: EL ARTE DE LAS MELODÍAS NO ESCUCHADAS

D. A. Buchsbaum

(Traducción: Rafael Sánchez Lamoneda)

Es un verdadero privilegio y un gran honor poder hablar ante ustedes, muchas gracias por haberme invitado. Desgraciadamente no puedo dar esta conferencia en español.[1]

Al preparar esta conferencia, estaba al tanto de que, aunque soy un matemático y por ello tiendo a hablar acerca de temas puramente matemáticos cuando lo hago frente a una audiencia formada mayormente por otros matemáticos, en esta oportunidad estaría dirigiéndome a un grupo mixto de científicos que no comparten necesariamente las actitudes más parroquiales de la comunidad matemática. Esto no significa, claro está, que seamos mundos aparte en nuestras creencias y valores básicos, por el contrario, tenemos una vasta cultura en común. Por ello decidí que daría mi opinión sobre algunos temas relevantes para la comunidad científica en general, tomando en cuenta que dichas opiniones estarán coloreadas por el hecho de ser yo, después de todo, un matemático. Las mismas tocarán la enseñanza de la matemática, el papel de las matemáticas, el apoyo a las matemáticas y la comprensión de lo que matemáticas es para un gran número de matemáticos. Los invito a sustituir Biología, Química, Física, o en general, X, en lugar de la palabra Matemáticas donde ustedes lo consideren apropiado.

[1] En castellano en el original N. del T.

La mayoría de los jóvenes estudiantes se enfrentan a las matemáticas como una herramienta. Desde los primeros grados (con notables excepciones, claro está), a los niños se les enseña a obtener respuestas correctas a preguntas aritméticas algo aburridas, porque, se les dice, deben aprender estas técnicas para poder desenvolverse con éxito cuando sean adultos. A través de la escuela elemental y secundaria, al estudiante se le está enseñando la matemática que es «buena para él». Aun al nivel universitario, los estudiantes de pregrado que no planean ser matemáticos (y ésta es la mayoría) cursan Cálculo, Algebra Lineal, Estadística, Ecuaciones Diferenciales, porque estos temas los capacitarán para tratar con problemas concretos en otros campos — en Ciencias, Ingeniería, Medicina y algunas Ciencias Sociales—. Esto en consecuencia, presiona a las personas que enseñan matemáticas a hacer sus cursos agradables al usuario, y a conectarlos a los tipos de problemas que precisamente se espera que aparezcan en la vida profesional del estudiante.

Yo afirmo que ésto va en contra de todo lo que la matemática es, y socava los verdaderos objetivos de nuestras instituciones educacionales y científicas. Con ésto no quiero decir que a los estudiantes no se les debería enseñar aplicaciones particulares, simplemente digo que su educación no debería estar limitada exclusivamente a ellas. Para ayudarlos a comprender por qué hago una proposición tan fuerte e inequívoca, daré un rodeo que describirá algunas de las ideas que fundamentan mi ser como un matemático y como un profesor de matemáticas.

Probablemente no mucha gente está al tanto de que la palabra «matemáticas» se deriva del verbo griego *«aprender»*: μανθανειν , el cual tiene como raíz en griego μαθηατ . Cuando, por primera vez, me di cuenta de ese hecho, comencé a apreciar de una nueva manera que la matemática está en completa armonía con lo que puede ser considerado el objetivo fundamental de nuestras instituciones intelectuales más básicas. Para ilustrarlo, consideremos lo siguiente:

Hace casi dos años atrás, asistí a un simposio en el cual se definió el rol de la Universidad en términos de diseminación de conocimientos. Esencialmente, los panelistas terminaron discutiendo entre ellos sobre la importancia del material enseñado en sus disciplinas. Hubo quienes justificaron sus campos de interés en términos de «relevancia», otros que justificaban los suyos, casi perversamente, en términos de «pureza», es decir, la forma pura de sus conocimientos sin considerar su aplicabilidad general o su relevancia en la sociedad. Si el foco común de discusión hubiese sido que la Universidad es el lugar donde se realiza la tarea común, de *aprender* y de *investigar*, en vez de simplemente el lugar donde se imparte conocimiento, estas diferencias y oposiciones, no hubiesen tenido necesidad de aparecer, lo común a todas las disciplinas habría sido reconocido fácilmente, a saber el impulso a explorar y aprender, y el asombro habría estado en la variedad de maneras en que el aprendizaje y la investigación pueden ramificarse y progresar.

Lo que todos nosotros compartimos en una Universidad, o en cualquiera de nuestras instituciones científicas, es el proceso de aprendizaje. Uno esperaría que algunos de nosotros supiesen más que otros, pero nuestro propósito común es el mismo, y esto es lo que nos hace una *comunidad*. Que la matemática tenga un rol más bien único en esta comunidad, no es sólo un accidente de etimología. La práctica de la matemática no solamente es investigar un fenómeno expresado o encontrado en algún contexto, sino abstraerlo y luego abrir el camino para investigar en contextos no asociados con el fenómeno original.

Así la matemática es una forma de investigación que no está contextualmente anclada, sino que cruza las fronteras de las disciplinas convencionales. Este es el aspecto más importante de la matemática que inspira mi subtítulo: El Arte de las Melodías no Escuchadas. La referencia, claro está, es el poema de Keats, *Oda sobre una Urna Griega*. Como ustedes pueden recordar, él se está refiriendo a las melodías no escuchadas de los músicos representados sobre la urna, cuando dice:

«Las melodías escuchadas son dulces,
Sin embargo aquellas no escuchadas son más dulces.»

El matemático escucha las melodías, esto es, los fenómenos exhibidos en contextos observables específicos, pero luego construye las melodías no escuchadas que trascienden los confines de lo particular, en el mundo especial de la matemática. Es este aspecto el que hace a la matemática verdaderamente representativa de los ideales de la comunidad *universitaria*. Así ustedes ven por qué como matemático y profesor de matemáticas, siento tan fuertemente que tocar sólo las melodías populares a los estudiantes es quitarles no solamente el alma del tema, sino debilitar su fuerza, la cual es la que les amplía la imaginación al máximo y les desarrolla la habilidad y el deseo de encontrar lo aún no visto y aún no escuchado.

Hasta ahora he hecho afirmaciones algo generales sobre el alcance y el poder de la matemática. No soy el único matemático que siente que tiene que hacer algo así. En años recientes, al hacer referencia al siempre decreciente apoyo para la investigación matemática básica, muchos de mis colegas en los Estados Unidos, y también en otras partes del mundo, han escrito informes y dado discursos en los que han destacado los casi innumerables ejemplos en los cuales se ve cómo, gracias a descubrimientos matemáticos usados de manera inesperada, se han producido tremendos avances tecnológicos. Por ejemplo, Phil Griffith, el Director del Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, New Jersey, destacó en una conferencia reciente, entre muchos otros ejemplos, los siguientes:

(i) Los cálculos de Dirac, basados en consideraciones de simetría, llevaron a la predicción y finalmente al descubrimiento del positrón.

(ii) La transformada de Radon condujo al nacimiento de la Tomografía Axial Computarizada (TAC). Estas mismas ideas matemáticas han sido aplicadas también a la Oceanografía.

(iii) Las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales describen el flujo de fluidos, han sido aplicadas al estudio de cosas tan diversas como huracanes, el flujo sanguíneo a través del corazón, el comportamiento del plasma en algunos tipos de reactores nucleares, etc.

Más tarde daré otros ejemplos, pero ahora quiero ampliar las proposiciones que he hecho no en la dirección de aplicaciones técnicas o tecnológicas, sino para ilustrar brevemente la manera en la cual la matemática toca nuestras vidas de una forma muy profunda y conceptual.

Consideremos, solo para comenzar, los estudios de Newton sobre velocidad, o los de Leibnitz sobre rectas tangentes. Estos fenómenos, velocidad y tangencia, aparecieron en contextos muy específicos. Sin embargo, la aproximación matemática los deconstruyó y los llevó a la noción central de ***derivada***, que conocemos en un contexto particular como una ***razón de cambio***. Para todos ustedes que han estudiado Cálculo esto parece totalmente obvio, pero pensemos cómo esta noción abstracta reencarna luego en contextos tan dispares como el de la biología o la economía (por nombrar solo unos pocos). ¡Esto no es un accidente! Pues debido a que el fenómeno de ***razón de cambio*** es expresado matemáticamente de una manera libre de contexto, a saber, mediante cocientes de diferencias funcionales, los biólogos y economistas tuvieron el vocabulario (y, evidentemente también el marco conceptual) para pensar en formular de una nueva manera algunas de sus preguntas y observaciones (por ejemplo, el crecimiento promedio de un cultivo, (donde la relación funcional es dada por la población total con respecto al tiempo), y el costo marginal, (donde la relación funcional viene dada por el costo de producción de una cierta cantidad de un producto dado con respecto a la cantidad producida)). Claro está, todos ustedes han tenido suficiente experiencia con el Cálculo, para conocer la mayoría de estas aplicaciones e interpretaciones. Por esto, pueden apreciar que especialmente en estos tiempos, es importante exponer al estudiante de cálculo, a lo trascendente, a las melodías no escuchadas, para que así no se quede atascado en contextos congelados del pasado, incapaz de moldear las relaciones y disciplinas del mañana.

Aquí cabe otro ejemplo. Cuando a comienzos del siglo pasado se inventó una nueva geometría no euclideana, esto representó mucho más que un simple descubrimiento tecnológico. El mundo intelectual de la época fue movido de la noción de un Universo Euclideano como un ***a priori*** à la Kant, a la noción de un espacio topológico general o variedad (por ejemplo, los trabajos de Riemann a mediados del siglo XIX). (Recuerden que Kant, en su *Crítica de la Razón Pura* (1803), usó la «Euclideanidad» de nuestro espacio diario, como uno de sus ejemplos para ilustrar la noción de un ***a priori***). Este cambio en la percepción de la naturaleza del espacio, cuando se encontró que la evidencia experimental y la teoría eran inconsistentes, nos dio la libertad de considerar y aún de articular la anteriormente impensable posibilidad: ¿Pueden estar equivocadas nuestras suposiciones acerca de la **geometría** del universo? ¿Un cambio en estas suposiciones puede reconciliar la teoría física con las observaciones? Todos sabemos hacia donde nos llevaron estas interrogantes en nuestra concepción de la física y la cosmología.

En este punto me siento obligado a hacer una advertencia. No quiero que algunos de ustedes piensen que pueden dirigirse al próximo matemático que conozcan y preguntarle sobre los cambios conceptuales que su investigación actual producirá en el futuro. La gente que trabajó en el *Postulado de las Paralelas*, lo cual fue la base para el descubrimiento geométrico señalado antes, no estuvo motivada por alterar la Weltanschauung[2] de Kant, ni por el deseo de cambiar las percepciones cosmológicas de su época. Por ejemplo, Gerolamo Saccheri, un jesuita que estuvo envuelto en este esfuerzo geométrico, rechazó la geometría hiperbólica que había descubierto pues, para parafrasearlo ligeramente, ***Dios no estaría contento si la suma de los***

[2] La concepción del universo de Kant, N. del T.

ángulos de un triángulo fuese mayor que 180 grados. De cierta manera él estaba confundiendo las melodías no escuchadas, sin límites de imaginación, con los cánones de su época, es decir, él estaba siendo más jesuita que matemático. Claro está, estoy siendo injusto con Saccheri. El estaba tratando de probar la dependencia del Quinto Postulado de los otros restantes, mediante el uso de ***reductio ad absurdum***, y como muchos otros antes (y después) que él, encontró este problema muy difícil. Dada la cultura de su tiempo, y el nivel de experiencia en sus días, no era sorprendente que él rechazase la geometría que había encontrado como un ***absurdum***. De cualquier manera, el matemático que va al fondo de los problemas simplemente está ejecutando su arte y punteando aquellas cuerdas invisibles que hacen que una melodía resuene.

Esto no quiere decir que los matemáticos nunca estén involucrados con problemas de un interés científico más inmediato. En un artículo escrito recientemente en el Boston Globe, por Anthony Flint, titulado «*MathematicsGoldenAge*», se trata sobre la relevancia de la matemática para el «mundo real». El autor dice: «las subespecialidades de la matemática de estos días, con nombres como fractales, supersimetría, teoría de nudos y ondículas, están muy lejos del álgebra de la escuela secundaria que recuerda la mayoría de las personas. Aun los logros más recientes en matemáticas tienen aplicaciones prácticas: en biología, ciencias ambientales, medicina, y retos tan de la vida real como el mejorar el flujo de tráfico, jugar en los mercados financieros, y garantizar la privacidad de los mensajes en el ciberespacio».

El artículo continúa con una revisión bien documentada de desarrollos recientes en campos específicos, pero falla en enfatizar un punto muy importante. Este tiene que ver, como pasó con el Postulado de las Paralelas, con que mucho de lo que está siendo usado hoy en día está basado en matemáticas que fueron desarrolladas en el siglo pasado o antes, por matemáticos quienes, en la mayor parte de los casos, no tuvieron en mente las aplicaciones particulares que en el presente se les han encontrado a sus trabajos. La mayoría de la gente pierde de vista el hecho de que si Hilbert al comienzo de este siglo no hubiese planteado un problema sobre los fundamentos de las Matemáticas y la naturaleza de las pruebas (técnicamente, la pregunta sobre «decidibilidad»), el trabajo básico sobre computadoras (iniciado por matemáticos tales como Turing y Von Neumann) no habría comenzado como lo hizo. Mucho del trabajo sobre modelación del cerebro, lo cual está tan de moda en estos días, debe sus orígenes al trabajo de matemáticos como Norbert Wiener. Aun más, presumiré de dar un ejemplo mucho más personal, aunque en un plano mucho menos elevado.

Cuando yo escribía mi tesis de doctorado al comienzo de la década de los cincuenta, estaba trabajando en lo que se conoce como *Teoría de Categorías*. Solamente dos artículos habían sido escritos sobre el tema hasta la fecha, y el trabajo que yo hacía era considerado como algo en las fronteras abstractas de las matemáticas. A medida que este campo se desarrollaba dentro de las matemáticas puras, sus usos en varios contextos fueron frecuentemente referidos, medio en serio y medio en broma, como un «sin sentido abstracto». Lo asombroso fue que tantas nociones dispares se juntaron como resultado de consideraciones categóricas. Por ejemplo, el Teorema de Riemann-Roch, el cual había sido pensado como un resultado estrictamente algebro-geométrico, de repente tuvo sentido, y más aun, era cierto, en geometría diferencial. Hoy, cuarenta años más tarde, existen pocos cursos en computación que no dediquen parte de su tiempo a teoría de categorías (en forma moderna, claro está). De hecho, libros escritos por mis dos primeros estudiantes de doctorado son parte de la bibliografía corriente en el tema. Más aun, un libro escrito por un bioquímico, profesor de la Escuela de Medicina de Dalhousie University, y publicado por Columbia University Press (*Life Itself* by Robert Rosen), plantea que el estudio de los organismos vivos es el estudio de la categoría de una cierta clase de modelos. Les puedo decir que cuando estaba trabajando en teoría de categorías como un estudiante de postgrado, nunca pasó por mi mente que este tipo de matemáticas penetraría el mundo diario durante mi vida, si es que acaso lo hacía alguna vez.

La razón por la cual yo pongo énfasis en todo esto es que mientras la relevancia de las matemáticas es altamente importante (y los matemáticos no deberían olvidar su responsabilidad social), los mecenas de las matemáticas no deberían conformarse con la investigación orientada hacia *misiones* o *aplicaciones*, sino a reconocer el significado de la ayuda a los niveles más básicos: ¡la matemática arroja su mayor ventaja, cuando es alentada a proceder de manera desencadenada, como históricamente lo ha hecho!

Como dijo John Gibbons, Asesor Científico del Presidente Clinton, el pasado mes de febrero: «Muy pocas veces es posible anticipar cuáles áreas de la ciencia básica impulsarán descubrimientos sorprendentes e importantes. ***No debemos limitar nuestro futuro limitando nuestro rango de investigación***.»

He estado discutiendo descubrimientos matemáticos y aplicaciones, los cuales probablemente no son desconocidos por la comunidad científicamente educada, para ilustrar cómo la investigación matemática se entrelaza a través de diversas disciplinas, tanto en técnicas como en líneas conceptuales. Permítanme hacer una digresión por unos pocos minutos y así comentar sobre otro tema acerca del cual siento un profundo interés. Es una vergüenza que tengamos que estar limitados a tan pocos ejemplos cuando sostenemos un discurso general. Qué vergüenza que no existan más experiencias que podamos apreciar juntos como podemos hacerlo cuando discutimos sobre literatura, artes visuales, antropología, música, etc. Yo le digo a mis estudiantes del curso de álgebra de pregrado, el cual ocasionalmente tengo a mi cargo, cuán afortunados son, pues al final del año habrán experimentado una de las verdaderas obras de arte de la civilización, la Teoría de Galois.

Usando novedosos métodos algebraicos nunca soñados por los geómetras y aritméticos griegos, los problemas de la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo, y el más «moderno» de ellos, encontrar de una cierta manera prescrita las raíces de una ecuación polinómica, todos ellos sin relación aparente, fueron elegantemente resueltos. Pero debido a que la matemática es evadida por la mayoría de los estudiantes, y el resto solamente toma los cursos prácticos, pocos de nosotros podemos experimentar el asombro que puede inspirar la Teoría de Galois (por nombrar sólo un ejemplo). Este no tiene que ser el caso. Muchos jóvenes tienen una gran cantidad de curiosidad natural hacia la matemática, aun (tal vez especialmente) hacia matemáticas que no sirven para algún propósito de utilidad.

Miremos el interés general despertado por las noticias sobre la reciente solución del Ultimo Teorema de Fermat. En una conferencia dada en Brandeis por uno de mis colegas unas pocas semanas atrás, el auditorio estaba totalmente lleno por la asistencia de una gran variedad de personas de la universidad, personas a las que yo nunca había visto poner un pie en un aula de matemáticas. Tal vez si, desde un comienzo, la matemática fuese enseñada como debería ser, los jóvenes estudiantes no desarrollarían el temor sobre el tema que la mayoría desarrolla ahora.

Debería destacar que la conferencia sobre el Ultimo Teorema de Fermat fue dada como parte de una serie de conferencias auspiciadas por el Centro Volterra para el Estudio de la Ciencia en Brandeis University. Volterra fue un matemático italiano famoso por sus trabajos en física matemática, y en matemáticas puras y aplicadas. Fue también un hombre de estado, y un ávido historiador de la ciencia (su biblioteca personal fue donada a Brandeis varios años atrás).

Algunos colegas y yo fundamos el Centro con el fin de juntar a la comunidad intelectual en un ambiente multidisciplinario (usando a Volterra como modelo de multidisciplinaridad), e instituimos una serie de conferencias así como un taller de trabajo que incluye a profesores de Arte, Humanidades y Ciencias. Ha sido asombroso y personalmente, en extremo gratificante, ver cuánto interés interdisciplinario existe cuando la ciencia y la matemática son presentadas en una atmósfera agradable, sin angustia y con sentido común. Viendo esta respuesta hacia la ciencia cuando es presentada y discutida de esta manera, estoy convencido de que nuestros problemas con los jóvenes estudiantes se deben no sólo a que ellos son expuestos a algunas de las facetas menos interesantes de la matemática en sus curricula de secundaria, sino que también los maestros que los enseñan no se sienten cómodos con lo que tienen que enseñar. Para remediar esto, debemos entrenar con gran cuidado aun a aquellos maestros que enseñarán en la escuela elemental, y quienes ostensiblemente «no tienen necesidad» de saber «matemática superior». Alfred Rusell Wallace, un biólogo contemporáneo de Darwin, al escribir una crítica a la teoría de Darwin sobre la supervivencia de las especies, dijo que existen tres facultades que son peculiarmente humanas: la matemática, la musical y la metafísica. Nosotros y nuestros hijos debemos nutrir estas facultades; Dios sabe que en nuestro mundo actual, es deseable un poco más de humanismo y menos atavismo.

Volviendo en particular a nuestra facultad matemática, déjenme decirles que el atributo de moverse del contexto de un problema específico, a principios más trascendentes o universales, evidentemente no es algo restringido exclusivamente al quehacer matemático pero es la verdadera esencia de la matemática.

Este rol especial fue reconocido en la Academia de Platón, y la Matemática ha sido por siglos el centro de la Universidad y el hilo unificador de las ciencias. Ha sido sólo en años recientes, cuando la sociedad, y en consecuencia también la Universidad, han estado más orientados hacia el consumo, que se ha perdido esta identificación fundamental del quehacer matemático con el papel de la universidad y con la investigación científica. El énfasis en lo actual es lo que ha presionado a los maestros de matemáticas en muchos países, para que enseñen aplicaciones inmediatas de la matemática, en vez de una profunda comprensión de la misma, y de la sensibilidad por alcanzar aquellas armonías subyacentes. Es este mismo énfasis el que ha desviado el apoyo a la investigación en matemáticas y ciencias básicas hacia investigaciones que rindan beneficios en plazos mucho más cortos de tiempo. Tal vez estos problemas, que se han agudizado, tanto en los Estados Unidos como en algunas partes de Europa, no hayan alcanzado aún en tan larga escala a Venezuela. Con su cultura y sus tradiciones, ustedes pueden ser capaces de evitarlas. Pero como una gran cantidad de nuestras facultades pueden ser trazadas por las fuerzas del mercado mundial y por factores tales como el consumismo, no es improbable que Venezuela sea también finalmente afectada. Es importante, por lo tanto, que todas nuestras universidades, fundaciones científicas y empresas privadas soporten a las ciencias básicas, y den una defensa especial a la matemática, que asegure que el Arte de las Melodías no Escuchadas no se convierta en un arte no escuchado.

Nota del Editor:

David Buchsbaum es profesor de Matemáticas en Brandeis University, Waltham, Massachusetts, USA. El artículo presentado es la traducción de la conferencia inaugural de las VIII Jornadas de Matemáticas que él dictó por invitación del Comité Organizador, el 3 de abril de 1995 en el Auditorium Lorenzo Mendoza Fleury de la Fundación Polar.

El *Templo de la Música* de Robert Fludd (1618), una compleja arquitectura de referencias musicales. Se muestra a Pitágoras entrando a la fragua en el sótano. Los números que están sobre esta escena representan la relación pitagórica entre los números y las armonías.

Lo que debe entenderse por el vocablo "matemático" y "disciplina matemática"

Este vocablo, Excelso Duque, es griego, derivado de la palabra que en nuestra lengua equivale a decir "disciplinable", y, para nuestro propósito, por ciencia y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, la geometría, la astronomía, la música, la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, así como cualquier otra dependiente de éstas.(1590)

Luca Pacioli, La Divina Proporción (1590). Cap.III p. 38. AKAL. Madrid, 1981.