Extensiones Toeplitz Acotadas de Formas Hankel Acotadas Definidas en un Sistema de Scattering Algebraico Discreto.

S. A. M. Marcantognini* M. D. Morán†

En 1.987, M. Cotlar y C. Sadosky, definieron las nociones de Sistema de Scattering Algebraico (SSA) y forma de Hankel en dicho sistema, (cfr. [C-S1], [C-S2], [C-S3]), siendo el primero una generalización del Sistema de Scattering de Adamjan-Arov (cfr. [A-Aro]), así como también del Sistema de Lax-Phillips (cfr. [L-P]).

En este trabajo parametrizamos las extensiones Toeplitz acotadas de una forma Hankel acotada definida en un SSA, por una bola de funciones analíticas contractivas a valores operadores entre dos espacios de Hilbert. Este resultado proviene del hecho que toda forma Hankel acotada definida en un SSA genera una isometría en un espacio de Hilbert y que toda extensión Toeplitz acotada de la forma antes mencionada genera una extensión unitaria minimal de dicha isometría. Finalmente damos otra demostración del teorema de levantamiento del conmutante de Foias-Frazho (cfr. [F-F1], [F-F2]).

Queremos reseñar que los resultados que aquí se obtienen se pueden generalizar para formas de Hankel acotadas definidas en SSA biparamétricos (cfr. [C-S3]).

Definición. *Un Sistema de Scattering Algebraico Discreto* (SSA) *es una cuaterna* $[V, W_1, W_2, \Upsilon]$, *donde:* V *es un espacio vectorial,* $\Upsilon : V \to V$ *es un isomorfismo algebraico y* W_1, W_2 *son dos subespacios vectoriales de* V, *tales que* $\Upsilon(W_1) \subseteq W_1$ *y* $\Upsilon^{-1}(W_2) \subseteq W_2$.

Veamos algunos ejemplos de SSA:

1. Sean V el espacio de los polinomios en $\mathbb{T}$ (como es usual, $\mathbb{T}$ denotará la circunferencia unitaria), W_1 los polinomios analíticos en $\mathbb{T}$, W_2 los polinomios antianalíticos en $\mathbb{T}$, $\Upsilon : V \to V$, $[\Upsilon(P)](z) = zP(z)$, $z \in \mathbb{T}$. Claramente $[V, W_1, W_2, \Upsilon]$ es un SSA.

*Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas y Universidad Simón Bolívar
†Universidad Central de Venezuela

2. Consideremos a V como $L^2(\mathbb{R})$, $W_1 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \right\}$, $W_2 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(x) = 0 \text{ si } x > 0 \right\}$, donde $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f, y $(\Upsilon f)(x) = f(x)\exp(ix)$. Entonces $[V, W_1, W_2, \Upsilon]$ es un SSA.

Para $i = 1, 2$, sea V_i el mínimo espacio vectorial que contiene a $\Upsilon^n(W_i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, (nótese que $\Upsilon(V_i) = V_i$); consideremos $B_i : V \times V \to \mathbb{C}$ sesquilineal positiva, que verifica

$$B_i(\Upsilon f, \Upsilon g) = B_i(f, g) \text{ para cada } (f, g) \in V \times V.$$

Dada $B^0 : W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal, decimos que es una forma Hankel definida en el SSA $[V, W_1, W_2, \Upsilon]$ si, y sólo si

$$B^0(\Upsilon f, g) = B^0\left(f, \Upsilon^{-1} g\right) \text{ para cada } (f, g) \in W_1 \times W_2,$$

y decimos que B^0 está acotada por (B_1, B_2) y lo denotamos por $B^0 \prec (B_1, B_2)$ si, y sólo si

$$\left|B^0(f, g)\right| \leq B_1^{\frac{1}{2}}(f, f)\, B_2^{\frac{1}{2}}(g, g) \text{ para cada } (f, g) \in W_1 \times W_2.$$

Nótese que si B^0 es una forma Hankel definida en el SSA $[V, W_1, W_2, \Upsilon]$, $B^0 \prec (B_1, B_2)$ y definimos $E_0 = W_1 \times W_2$, y para cada (f_1, f_2), $(g_1, g_2) \in E_0$

$$C[(f_1, f_2), (g_1, g_2)] = B_1(f_1, g_1) + B^0(f_1, g_2) + \overline{B^0(g_1, f_2)} + B_2(f_2, g_2),$$

resulta que C es una forma sesquilineal positiva y que si $\Upsilon' = \begin{pmatrix} \Upsilon & 0 \\ 0 & \Upsilon \end{pmatrix}$ definida en $D_{\Upsilon'} = W_1 \times \Upsilon^{-1} W_2$ y con rango $R_{\Upsilon'} = \Upsilon W_1 \times W_2$, entonces se tiene que $C[\Upsilon' h, \Upsilon' h] = C[h, h]$ para cada $h \in D_{\Upsilon'}$. Si definimos para cada $h, h' \in E_0$, la relación $h \sim h' \Leftrightarrow C[h - h', h - h'] = 0$, resulta claro que $\sim$ es una relación de equivalencia y si $\pi_0 : E_0 \to E$ denota la proyección canónica, obtenemos que la función $T_0 : \pi_0[D_{\Upsilon'}] \to \pi_0[R_{\Upsilon'}]$ definida por $T_0(\pi_0 h) = \pi_0(\Upsilon' h)$, $h \in D_{\Upsilon'}$, es una isometría en E. Sin embargo no tenemos garantías de que E sea Hilbert. Sea H la completación de E, sabemos que existe una isometría $i : E \to H$ con rango denso, y así podemos definir una isometría T en H con dominio $D_T = \overline{i(D_{T_0})}$, rango $R_T = \overline{i(R_{T_0})}$, y que verifica $T(i(f)) = i(T_0(f))$ para cada $f \in D_{T_0}$. Además se puede verificar fácilmente que si $X = \overline{i\pi_0(W_1 \times \{0\})}$, y $Y = \overline{i\pi_0(\{0\} \times W_2)}$, entonces

$$X \subseteq D_T,\ T(X) \subseteq X,\ Y \subseteq R_T,\ T^{-1}(Y) \subseteq Y.$$

Nótese que en esta observación vimos cómo asociar naturalmente a una forma de Hankel acotada definida en un SSA un espacio de Hilbert y una isometría en él definida.

Dada $B : V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal, decimos que es una forma Toeplitz si, y sólo si

$$B(\Upsilon f, \Upsilon g) = B(f, g) \text{ para cada } (f, g) \in V_1 \times V_2, \tag{1}$$

y decimos que B esta acotada por (B_1, B_2) y lo denotamos por $B \leq (B_1, B_2)$ si, y sólo si

$$|B(f, g)| \leq B_1^{\frac{1}{2}}(f, f)\, B_2^{\frac{1}{2}}(g, g) \text{ para cada } (f, g) \in V_1 \times V_2. \tag{2}$$

Finalmente, decimos que B es una extensión acotada por (B_1, B_2) Toeplitz de la forma de Hankel B^0 si, y sólo si se verifican (1), (2) y además $B|_{W_1 \times W_2} = B^0$.

De la misma forma que le asociamos un espacio de Hilbert H y una isometría en H a una forma de Hankel acotada definida en un SSA, lo hacemos con la forma de Toeplitz acotada por (B_1, B_2) definida en $V_1 \times V_2$, obteniendo un espacio de Hilbert F y un operador U que resulta unitario. Además, si B es una extensión de B^0, resulta fácil demostrar que U es una extensión unitaria minimal de T (i.e., F contiene a H como subespacio cerrado, $F = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} U^n(H)$, U es un operador unitario que extiende a T). Más aún, la relación que a cada B extensión de B^0 Toeplitz acotada por (B_1, B_2) le asocia una extensión unitaria minimal de T es una biyección. Así, usando el modelo de Arov-Grossman (cfr. [Aro-G]), el conjunto de las extensiones de B^0, definidas en $V_1 \times V_2$, Toeplitz, acotadas por (B_1, B_2), denotado por B^0_{ext}, puede ser descrito por la bola de funciones analíticas contractivas a valores operadores en $L(H \ominus D_T, H \ominus R_T)$, definidas en el disco unitario abierto D, que indicamos $\mathbb{B}(H \ominus D_T, H \ominus R_T)$ ($\theta \in \mathbb{B}(H \ominus D_T, H \ominus R_T)$ si y sólo si $\theta : \mathbb{D} \to L(H \ominus D_T, H \ominus R_T)$, $\theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \widehat{\theta}(n)$, con $\widehat{\theta}(n) \in L(H \ominus D_T, H \ominus R_T)$ y $\sup_{|z|<1} \|\theta(z)\| \leq 1$).

Teorema 1 *La función* $\Psi : \mathbb{B}(H \ominus D_T, H \ominus R_T) \to B^0_{\text{ext}}$ *definida por* $\Psi(\theta) = B$ *si, y sólo si* $B \in B^0_{\text{ext}}$ *y* $B\left(w_1, \Upsilon (I - z\Upsilon)^{-1} w_2\right) =$

$$\left\langle i\pi(w_1, 0), [TP_{D_T} + \theta(z) P_{H \ominus D_T}] (I - z [TP_{D_T} + \theta(z) P_{H \ominus D_T}])^{-1} i\pi(0, w_2) \right\rangle_H$$

es una biyección. □

Como consecuencia inmediata tenemos que $B^0_{\text{ext}} \neq \emptyset$, pues la función 0 pertenece a $\mathbb{B}(H \ominus D_T, H \ominus R_T)$. Una nueva aplicación es otra demostración y parametrización de las soluciones de una versión del teorema de levantamiento del conmutante (cfr. [F-F1], [F-F2]).

Antes de enunciar el teorema aclararemos un poco algunos conceptos. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ una contracción ($\|T\| \leq 1$), entonces existen un espacio de Hilbert K (respectivamente G) que contiene a H como subespacio cerrado y un operador V isométrico en F (respectivamente U operador unitario en G) tales que:

$$\begin{aligned} P_H^K V^n\,|_H &= T^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \\ (\text{respectivamente } P_H^G U^n\,|_H &= T^n \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}) \text{ y} \\ K &= \bigvee_{n=0}^{\infty} V^n (H) \\ (\text{respectivamente } G &= \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n (H)\,). \end{aligned}$$

V es llamada dilatación isométrica minimal de T (y U es llamada dilatación unitaria minimal de V).

Teorema 2 *Sean E_1, E_2 espacios de Hilbert, $T_1 \in L(E_1)$ una isometría, $T_2 \in L(E_2)$ una contracción y $V_2 \in L(K_2)$ su dilatación isométrica minimal. Dados $X \in L(E_1, E_2)$ tal que $T_2X = XT_1$ y σ un número real tal que $\sigma \geq \|X\|$, entonces existe $Y \in L(E_1, K_2)$ tal que $V_2Y = YT_1$, con $\|Y\| \leq \sigma$ y $P_{E_2}^{K_2} Y = X$.*

Demostración: Para $i = 1, 2$, sea $U_i \in L(G_i)$ la dilatación unitaria minimal de T_i. Al problema enunciado en el teorema le asociamos el siguiente SSA: $V = G_1 \times G_2$, $W_1 = E_1 \times \{0\}$, $W_2 = \{0\} \times \bigvee_{n=0}^{\infty} U_2^{-n}(E_2)$, $\Upsilon = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$.
Para $i = 1, 2$, definamos las formas $B_i : V \times V \to \mathbb{C}$ por $B_i((g_1, g_2), (g_1', g_2')) = c_i \langle g_i, g_i' \rangle_{G_i}$ con $c_1 = \sigma^2$, $c_2 = 1$. Es claro que ambas son sesquilineales positivas y

$$B_i(\Upsilon f, \Upsilon g) = B_i(f, g) \text{ para cada } (f, g) \in V \times V.$$

Además, si $B^0 : W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ está determinada por $B^0((e_1, 0), (0, g_2)) = \langle Xe_1, g_2 \rangle$, resulta una forma sesquilineal Hankel definida en el SSA y que está acotada por (B_1, B_2). Demostramos que

$$\alpha : B^0_{\text{ext}} \to \left\{ Y \in L(E_1, K_2) : V_2Y = YT_1, \|Y\| \leq \sigma \text{ y } P_{E_2}^{K_2} Y = X \right\}$$

determinada por $\alpha(B) = Y \Leftrightarrow Y \in L(E_1, K_2)$, $\langle Ye_1, k_2 \rangle = B((e_1, 0), (0, k_2))$ es una biyección. Así, además de demostrar el Teorema 2, podemos, usando el Teorema 1, parametrizar las soluciones.

Finalmente, la parametrización resulta más elegante al ver que $H \ominus D_T$ y $H \ominus R_T$ son isométricamente isomorfos a $\mathcal{D}_X^\sigma \oplus \mathcal{D}_{T_2} \ominus \{D_X^\sigma h \oplus D_{T_2}Xh : h \in E_1\}$ y $\mathcal{D}_X^\sigma \ominus \overline{D_X^\sigma T_1 E_1}$ donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_X^\sigma &= \overline{(\sigma^2 - X^*X)^{\frac{1}{2}}(E_1)}, \ D_X^\sigma = \left(\sigma^2 - X^*X\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{D}_{T_2} &= \overline{(I - T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}}(E_2)}, \quad D_{T_2} = (I - T_2^*T_2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Otro ejemplo donde se aplican los SSA es en la demostración del siguiente teorema:

Teorema 3 *Sean E_1, E_2 espacios de Hilbert, $T_1 \in L(E_1)$ una isometría, $T_2 \in L(E_2)$ una coisometría (i.e: T_2^* es una isometría), L_2 subespacio cerrado de E_2, $T_2^*(L_2) \subset L_2$. Si $X \in L(E_1, L_2)$ es una contracción tal que $P_{L_2}^{E_2} T_2 X = X T_1$, entonces existe $Y \in L(E_1, E_2)$ tal que $T_2 Y = Y T_1$ y $P_{L_2}^{E_2} Y = X$.*

Demostración: Para $i = 1, 2$, sea $U_i \in L(G_i)$ la dilatación unitaria minimal de T_i. Al problema enunciado en el teorema le asociamos el siguiente SSA: $V = G_1 \times G_2$, $W_1 = E_1 \times \{0\}$, $W_2 = \{0\} \times \bigvee_{n=0}^{\infty} U_2^{-n}(L_2)$, $\Upsilon = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$. Para $i = 1, 2$, definimos las formas $B_i : V \times V \to \mathbb{C}$ por $B_i((g_1, g_2), (g_1', g_2')) = \langle g_i, g_i' \rangle_{G_i}$. Es claro que ambas son sesquilineales positivas y

$$B_i(\Upsilon f, \Upsilon g) = B_i(f, g) \text{ para cada } (f, g) \in V \times V.$$

Además, si $B^0 : W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ está determinada por $B^0((e_1, 0), (0, g_2)) = \langle X e_1, g_2 \rangle$, resulta una forma sesquilineal Hankel definida en el SSA y que está acotada por (B_1, B_2). Se demuestra fácilmente que si $B \in B_{\text{ext}}^0$, y definimos $\langle Y e_1, e_2 \rangle = B((e_1, 0), (0, e_2))$, entonces $Y \in L(E_1, E_2)$, $T_2 Y = Y T_1$, $\|Y\| \leq 1$ y $P_{E_2}^{K_2} Y = X$. $\square$

Referencias

[A-Aro] Adamjam, V. M. and Arov, D. Z. *On unitary coupling of semiunitary operators*. Matem. Issledovanya, (1966), 3-4 (Russian).

[Aro-G] Arov, D. Z. and Grossmann, L. Z. *Scattering matrices in the theory of dilations of isometric operators*. Soviet Math. Dokl. **27** (1983), 518-522.

[F-F1] Foias, C. and Frazho, A. *The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems*. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1990.

[F-F2] Foias, C. and Frazho, A. *Constructing the Schur Contraction in the Commutant Lifting Theorem*. Acta Sci. Math. (Szeged) **61** (1995), 425-442.

[C-S1] Cotlar, M. and Sadosky, C. *Integral Representations of Bounded Hankel Forms Defined in Scattering Systems with a Multiparametric Evolution Group Operator Theory*. Advances and Applications, **35** (1988), 357-375.

[C-S2] Cotlar, M. and Sadosky, C. *The Generalized Bochner Theorem in Algebraic Scattering Systems*. Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley California, 1987.

[C-S3] Cotlar, M. and Sadosky, C. *Transference of Metrics Induced by Unitary Couplings, a Sarason Theorem for the Bidimensional Torus, and Sz. Nagy-Foias Theorem for Pairs of Dilations*, Journal of Functional Analysis **11**, No 2 (1993), 473-488.

[L-P] Lax, P. and Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, New York 1967.