Análisis Armónico Gaussiano: una visión panorámica

Wilfredo O. Urbina Romero
Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, U. C. V.

Dedicado a la memoria de Eugene Fabes,
un corazón de oro...

1 Introducción

Lo que hemos dado en llamar Análisis Armónico Gaussiano consiste en considerar las nociones usuales del Análisis Armónico clásico, que están formuladas en el espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$, en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \gamma_d)$, donde $\gamma_d(dx) = \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-|x|^2} dx$ es la medida de probabilidad de Gauss en $\mathbb{R}^d$. Esta área ha tenido un importante desarrollo en los últimos 15 años y es sobre este desarrollo que queremos dar cuenta en el presente trabajo.

Las motivaciones para el estudio del Análisis Armónico Gaussiano son diversas. Por una parte, surgió como mero desarrollo teórico de extender, a otras expansiones con polinomios ortogonales, los resultados conocidos para las series de Fourier, es decir, para la base trigonométrica. Es así como surgen primero el trabajo de E. Stein y B. Muckenhoupt [35] y luego los artículos seminales de B. Muckenhoupt [30],[31] y C. Calderón [5].

Existen otras motivaciones para el estudio del Análisis Armónico Gaussiano; una de ellas es el estudio de la regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas mediante el Cálculo de Malliavin; otras son las consideraciones, provenientes de la Mecánica Cuántica, sobre el grupo de Heisenberg. Sin embargo, el presente trabajo no pretende discutir estas otras motivaciones sino aquellas estrictamente relacionadas con los desarrollos en polinomios de Hermite.

En el artículo de 1965 [35], E. Stein y B. Muckenhoupt desarrollan un Análisis Armónico para desarrollos en polinomios ortogonales no trigonométricos en el caso de los polinomios ultraesféricos (de Gegenbauer) [1], $\{C_n^\lambda\}$. En

[1] Los polinomios ultraesféricos $\{C_n^\lambda(x)\}$ son un sistema ortogonal completo en $[-1,1]$

ese caso, Stein y Muckenhoupt obtuvieron, para dichos polinomios, las nociones de Integral de Poisson, función conjugada, espacios H^p, Teoría de Littlewood-Paley, Teorema de Multiplicadores de Marcinkiewicz y Potenciales de Riesz. Es decir, que para el caso de los polinomios ultraesféricos, Stein y Muckenhoupt desarrollaron todas las nociones del Análisis Armónico clásico en una dimensión.

En cambio, en el Análisis Armónico Gaussiano, como lo veremos a lo largo del presente trabajo, los resultados son todavía muy fragmentarios para cumplir el programa anteriormente esbozado. Existen dos tipos de problemas: uno es obtener todas las nociones anteriormente mencionadas para el caso unidimensional y otro, no necesariamente inmediato, es su generalización a dimensiones superiores.

El presente trabajo es un apretado resumen del trabajo de ascenso presentado por el autor para ascender a la categoría de profesor titular en la UCV. Para más detalles, una bibliografía más extensa, así como las pruebas de prácticamente todos los resultados remitimos a dicho trabajo [54].

2 Resultados Preliminares: Polinomios y Funciones de Hermite.

Consideremos, en primer lugar, los **polinomios de Hermite.** La referencia obligatoria al respecto es G. Szegö [48].

Recuérdese que los polinomios de Hermite en $\mathbb{R}$, que denotaremos como H_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, se definen como los polinomios ortogonales asociados a la medida Gaussiana $\gamma_1(dx) = \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-|x|^2} dx$ y por tanto se pueden obtener de la base canónica de los polinomios $\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$ mediante el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, respecto al producto interno en $L^2(\gamma_1)$. En forma equivalente $\{H_n\}$ se puede obtener mediante la fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad \text{para } n > 1, \tag{1}$$

y $H_0(x) = 1$.

La **Función Generatriz** de los polinomios de Hermite es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} y^n = e^{2xy-y^2}. \tag{2}$$

Debido a que los polinomios de Hermite son los únicos polinomios que verifican esta relación, ella nos sirve para definirlos en forma alternativa.

respecto a la medida $dm_\lambda(x) = (1-x^2)^\lambda dx$. H. Pollard probó, en 1948, que sus sumas parciales convergen en $L^p(dm_\lambda)$ si y sólo si $\frac{2\lambda+1}{\lambda+1} < p < \frac{2\lambda+1}{\lambda}$.

Además se puede obtener, directamente de la fórmula de Rodrigues para H_{n+1} y de la fórmula de Leibnitz para el producto, la **fórmula recursiva a tres términos** para los polinomios de Hermite:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, n \geq 0, \tag{3}$$

donde $H_{-1}(x) = 0$.

Por otra parte, es claro que como γ_1 es una medida de probabilidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0(y)\, \gamma_1(dy) = 1.$$

Además, para $n \geq 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y)\, \gamma_1(dy) = 0,$$

y para $n, m \geq 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y)H_m(y)\, \gamma_1(dy) = 2^n n! \delta_{n,m},$$

para $n, m \geq 1$. La última relación es precisamente la **propiedad de ortogonalidad** de los polinomios de Hermite respecto a γ_1. Además, los polinomios de Hermite forman un sistema completo en $L^2(\gamma_1)$.

A partir de la Función Generatriz se puede obtener la **Fórmula de Mehler**, hallada por F.G. Mehler en 1866 y, según Hille [21], "redescubierta por casi todo el mundo que ha trabajado en este campo".

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} r^n = \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}} e^{-\frac{r^2(y^2+x^2)-2rxy}{1-r^2}}. \tag{4}$$

La expresión de la derecha

$$M_r^{\gamma_1}(x, y) = \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}} e^{-\frac{r^2(y^2+x^2)-2rxy}{1-r^2}} = \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}} e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}} e^{y^2} \tag{5}$$

se llama **núcleo de Mehler**.

Finalmente, es fácil ver que las siguientes relaciones diferenciales se verifican

$$H_n^{'}(x) = 2nH_{n-1}(x), \tag{6}$$

$$H_n^{''}(x) - 2xH_n^{'}(x) + 2nH_n(x) = 0. \tag{7}$$

Obsérvese que esta última relación es, precisamente, la **ecuación de Hermite** de orden n, es decir, los polinomios de Hermite son soluciones polinomiales de la ecuación de Hermite. Otra forma equivalente de ver esto es decir que H_n

es una autofunción del **operador oscilador armónico** $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx} - x\frac{d}{dx}$, asociada al autovalor $-n$.

Denotaremos por $h_n(x) = \frac{H_n(x)}{(2^n n!)^{1/2}}$ al **polinomio de Hermite normalizado** respecto a γ_1 de orden n. Es inmediato entonces que, quizás con diferentes constantes, los polinomios de Hermite normalizados satisfacen relaciones similares que las que satisfacen los polinomios de Hermite.

Dada una función $f \in L^1(\gamma_1)$ definimos su k-ésimo **coeficiente de Fourier-Hermite** como

$$\hat{f}_H(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h_k(y)\gamma_1(dy) = \langle f, h_k\rangle_{\gamma_1}, \tag{8}$$

su desarrollo en polinomios de Hermite

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_H(k)h_k, \tag{9}$$

y su n-ésima suma parcial como

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_H(k)h_k.$$

Por el argumento usual, se obtiene una representación integral para las sumas parciales

$$S_n f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D_n(x,y)f(y)\,\gamma_1(dy),$$

donde, por la **fórmula de Christofell-Darboux**, se tiene la siguiente representación del **núcleo de Dirichlet-Szegö** D_n

$$D_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} h_k(x)h_k(y) = (\frac{n+1}{2})^{1/2}\frac{h_{n+1}(x)h_n(y) - h_n(x)h_{n+1}(y)}{x-y}. \tag{10}$$

Se puede probar (aunque la demostración no es totalmente trivial) que los polinomios de Hermite son densos en $L^p(\gamma_d)$, para $1 \leq p < \infty$. Sin embargo, H. Pollard [40], observando que los polinomios de Hermite pueden considerarse como un caso límite de los polinomios ultraesféricos, demostró que $S_n f$ converge en $L^p(\gamma_1)$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_n f(x) - f(x)|^p \gamma_1(dx) \to 0,$$

si y sólo si $p = 2$, que es el caso evidente debido a la Teoría de Espacios de Hilbert.

Recuérdese que la condición de convergencia en $L^p(\gamma_1)$ de las sumas parciales es equivalente, por el principio de acotación uniforme, a la acotación en $L^p(\gamma_1)$ de las mismas:

$$||S_n f||_{p,\gamma_1} \leq C_p ||f||_{p,\gamma_1}. \tag{11}$$

Posteriormente, R. Askey y S. Wainger [3] probaron que

$$||(S_n f)e^{-x^2/2}||_p \leq C_p ||fe^{-x^2/2}||_p, \tag{12}$$

si $4/3 < p < 4$. Se puede ver fácilmente que este resultado de Askey y Wainger remite, de manera natural, al estudio de desarrollos en funciones de Hermite.

Vale la pena recalcar que es precisamente generalizando el resultado de Askey y Wainger, para pesos más generales que $e^{-x^2/2}$, cuando Muckenhoupt [32], [33] se ve obligado a considerar pesos para la Transformada de Hilbert, lo que, como sabemos, es la génesis de su teoría de pesos A_p.

El **polinomio de Hermite en d-variables** de orden $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, que denotaremos como $\vec{H}_\alpha$, se define, para $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, como el producto tensorial de polinomios de Hermite unidimensionales, es decir,

$$\vec{H}_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{d} H_{\alpha_i}(x_i), \tag{13}$$

donde $H_{\alpha_i}(x_i)$ es el polinomio de Hermite de grado α_i en la variable x_i.

Por tanto, es claro entonces que el polinomio de Hermite normalizado $\vec{h}_\alpha$ es el producto tensorial de polinomios de Hermite normalizados unidimensionales, es decir $\vec{h}_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{d} h_{\alpha_i}(x_i)$, donde $h_{\alpha_i}(x_i)$ es el polinomio de Hermite normalizado de grado α_i en la variable x_i.

Debido a la forma como se definen los polinomios de Hermite en d-variables, es claro que estos "heredan" una serie de propiedades que verifican los polinomios de Hermite unidimensionales. En particular, por su carácter multiplicativo, la Fórmula de Mehler en d dimensiones se expresa como

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} \vec{h}_\alpha(x)\vec{h}_\alpha(y) r^\alpha = \frac{1}{(1-r^2)^{d/2}} e^{-\frac{r^2(|y|^2+|x|^2)-2r\langle x,y\rangle}{1-r^2}} = M_r^{\gamma_d}(x,y). \tag{14}$$

Dada $f \in L^1(\gamma_d)$ definimos, en forma análoga al caso unidimensional, su desarrollo de Hermite como

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha)\vec{h}_\alpha, \tag{15}$$

donde

$$\hat{f}_H(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\vec{h}_\alpha(y)\gamma_d(dy) = \langle f, \vec{h}_\alpha \rangle_{\gamma_d},$$

son los coeficientes de Fourier-Hermite.

Ahora bien, si denotamos por C_k al subespacio cerrado de $L^2(\gamma_d)$ generado por $\{\vec{h}_\alpha : |\alpha| = k\}$, entonces por la ortogonalidad de los polinomios de Hermite, tenemos que $\{C_k\}$ constituyen una descomposición ortogonal de $L^2(\gamma_d)$ que se llama desarrollo en **Caos de Wiener** o **descomposición de Ito-Wiener** de $L^2(\gamma_d)$.

Consideremos también $J_k : L^2(\gamma_d) \to C_k$ la proyección ortogonal de $L^2(\gamma_d)$ sobre C_k, claramente J_k es continua en $L^2(\gamma_d)$ y podemos expresar el desarrollo de $f \in L^2(\gamma_d)$ como

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} J_k f.$$

Se puede probar, como consecuencia de la hipercontractividad del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck, que J_k es continua en $L^p(\gamma_d)$ para $1 < p < \infty$.

Consideremos en $\mathbb{R}^d$ el **operador de Ornstein-Uhlenbeck**

$$L = \frac{1}{2}\Delta - \langle x, \nabla_x \rangle, \tag{16}$$

donde $\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_d})$.

Por lo dicho en el caso unidimensional, el polinomio $\vec{h}_\alpha$ es una autofunción de dicho operador, asociado al autovalor $-|\alpha| = -\sum_{i=1}^{d} \alpha_i$, y por tanto el espectro L^2 de L es $\{\cdots, -2, -1, 0\}$.

Si consideramos el dominio de L,

$$D(L) = \{f \in L^2(\gamma_d) : \sum_{k=0}^{\infty} k^2 ||J_k f||^2_{2,\gamma_d} < \infty\},$$

tenemos la descomposición espectral de L, para $f \in D(L)$

$$Lf = \sum_{k=0}^{\infty} (-k) J_k f.$$

Obsérvese, además, que utilizando integración por partes, dados $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la clase de funciones de prueba de Schwartz,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x f(x) \cdot \nabla_x g(x) \gamma_d(dx) = 2 \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-L)g(x)\gamma_d(dx). \tag{17}$$

Esta relación dice que $N = 2(-L) = -\Delta + 2\langle x, \nabla_x \rangle$, conocido como el Operador de Número para el Oscilador Armónico de la Mecánica Cuántica, es la **forma de Dirichlet** asociada a la medida Gaussiana γ_d. Además, esto implica trivialmente que $(-L)$ es positivo definido. En forma inmediata, dicha relación implica entonces que el operador de Ornstein-Uhlenbeck es autoadjunto en $L^2(\gamma_d)$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^d} Lf(x)g(x)\gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)Lg(x)\gamma_d(dx). \tag{18}$$

Así pues L es el "Laplaciano simétrico" en este contexto. Por tanto γ_d es la medida natural para estudiar los operadores asociados a L. Por ejemplo, la ortogonalidad de los polinomios de Hermite en $L^2(\gamma_d)$ se puede obtener también por el hecho ser autofunciones de L.

3 El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.

El **semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck** en $\mathbb{R}^d$ está definido como

$$\begin{aligned} T_t f(x) &= \frac{1}{(1-e^{-2t})^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{e^{-2t}(|x|^2+|y|^2)-2e^{-t}\langle x,y\rangle}{1-e^{-2t}}} f(y)\gamma_d(dy) &(19)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} M_t(x,y)f(y)dy, &(20)\end{aligned}$$

donde $M_t(x,y) = \frac{1}{\pi^{d/2}} M^{\gamma_d}_{e^{-t}}(x,y)$, que llamaremos también **núcleo de Mehler**.

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} T_t f(x) &= (W_{(1-e^{-2t})/4} * f)(e^{-t}x) = \delta_{e^{-t}}[W_{(1-e^{-2t})/4} * f](x)\\ &= \delta_{e^{-t}} e^{(1-e^{-2t})/4\Delta} f(x), \end{aligned}$$

donde δ_a es el **operador dilatación** por a, $\delta_a f(x) = f(ax)$, $W_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|x-y|^2/4t}$, es el **núcleo del calor** y $\{e^{t\Delta}\}_t$ representa el **semigrupo del calor**, que tiene como generador infinitesimal el operador Laplaciano.

Luego, el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es una reparametrización del semigrupo del calor precedida de una dilatación en la variable y, por lo tanto, no es un semigrupo de convolución, ya que antes de convolucionar con núcleos W_t, debidamente reparametrizados, se toma una dilatación por e^{-t} en la variable x. Es por esta dilatación que ninguno de los métodos utilizados para el estudio de semigrupos clásicos son, en forma inmediata, aplicables para este semigrupo.

Sin embargo, F. Weissler [57] establece la relación más detallada entre ambos semigrupos. Para $1 \leq p, q \leq \infty$, $t \geq 0$ y cualquier $\zeta \geq 0$

$$T_t = (\zeta e^t)^{d/2} \pi^{(1/2p-1/2q)d} (\Xi^{(q)}_d)^{-1} M_\beta \delta_\zeta e^{[\zeta(1-e^{-2t})/4e^{-t}]\Delta} M_\alpha \Xi^{(p)}_d, \tag{21}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{1-e^{-2t}} - \frac{1}{p} - \frac{e^{-t}}{\zeta(1-e^{-2t})},\ \beta = \frac{1}{1-e^{-2t}} - \frac{1}{q'} - \frac{\zeta e^{-t}}{1-e^{-2t}},$$

$\Xi_d^{(p)}$ es el isomorfismo isométrico definido por $\Xi_d^{(p)} f(x) = f(x)\pi^{-d/2p} e^{-|x|^2/p}$, M_α es el **operador multiplicación** definido por $M_\alpha f(x) = e^{\alpha|x|^2} f(x)$, y finalmente δ_a es el operador dilatación.

Mediante esta relación Weissler no sólo extiende analíticamente al semiplano Re$z \geq 0$ el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck, dado que el semigrupo del calor lo es, sino que obtiene información adicional sobre continuidad, en ambos sentidos.

Por otra parte, haciendo el cambio de variable $u = \frac{y - e^{-t}x}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$ obtenemos,

$$T_t f(x) = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\sqrt{1-e^{-2t}}u + e^{-t}x) e^{-|u|^2} du. \tag{22}$$

Mediante esta última expresión se ve que el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck tiene una extensión natural en infinitas dimensiones, debido a que la medida de Gauss, a diferencia de la medida de Lebesgue, puede ser definida en espacios de dimensión infinita.

El semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es un semigrupo, conservativo, simétrico, fuertemente L^p-continuo de contracciones positivas en $L^p(\gamma_d), 1 \leq p \leq \infty$, con generador infinitesimal L, es decir, en forma precisa:

Teorema 3.1 *La familia de operadores $\{T_t : t \geq 0\}$ satisface las siguientes propiedades:*

i) Propiedad de semigrupo: Para todo $t_1, t_2 \geq 0, T_{t_1+t_2} = T_{t_1} T_{t_2}$.

ii) Propiedad de conservación y de positividad: $T_t 1 = 1$ y si $f \geq 0$ entonces $\forall t \geq 0$, $T_t f \geq 0$.

iii) Propiedad de contractividad: Para todo $t \geq 0$ y $1 \leq p \leq \infty$,

$$||T_t f||_{p,\gamma_d} \leq ||f||_{p,\gamma_d}.$$

iv) Propiedad de L^p-continuidad fuerte: Para todo $1 \leq p \leq \infty$ y todo $f \in L^p(\gamma_d)$ la aplicación $t \to T_t f$ es continua de $[0, \infty)$ en $L^p(\gamma_d)$.

v) $\forall t \geq 0, T_t$ es un operador autoadjunto en $L^p(\gamma_d)$, es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(x) g(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) T_t g(x) \gamma_d(dx), \tag{23}$$

en particular, tenemos la propiedad de simetría:

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_t f(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \gamma_d(dx), \tag{24}$$

vi) El operador de Ornstein-Uhlenbeck L *es el generador infinitesimal de* $\{T_t : t \geq 0\}$*, es decir:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} = Lf. \tag{25}$$

Del hecho que L es el generador infinitesimal , tenemos que T_t puede ser definido en sentido espectral como $e^{tL} = e^{-t(-L)}$ y por tanto es claro que

$$T_t \vec{h}_\alpha = e^{-t|\alpha|} \vec{h}_\alpha. \tag{26}$$

Mediante la fórmula de Mehler se puede ver que T_t actuando en una función $f \in L^1(\gamma_d)$ es equivalente a la sumabilidad Abel del desarrollo de Hermite de f, con $r = e^{-t}$. B. Muckenhoupt y C. Calderón definieron, ambos en 1969, lo que llamaron la **integral de Poisson-Hermite** de esta forma, para el caso $d = 1$ y $d \geq 1$ respectivamente. En esa dirección tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.1 *(Calderón-Muckenhoupt)*

i) Si f *tiene un desarrollo de Hermite* $f = \sum_{k=0}^{\infty} J_k f$*, entonces para todo* $t \geq 0$*,* $T_t f$ *tiene desarrollo de Hermite*

$$T_t f = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} J_k f. \tag{27}$$

ii) Si $f \in L^2(\gamma_d)$ *entonces* $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} J_k f(x)$ *converge absolutamente a* $T_t f(x)$ *para casi todo* x*-*γ_d*.*

iii) Para todo $1 \leq p < 2$ *existen una función en* $L^p(\gamma_d)$ *y* $t \geq 0$ *tales que* $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} J_k f(x)$ *diverge para todo* x*.*

Además, si f es una función suficientemente regular, $u(x,t) = T_t f(x)$ es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = Lu, \\ \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Por otra parte, $\{T_t\}$ verifica la **Propiedad Hipercontractiva**, es decir para $1 < p < \infty$, $t > 0$ y $q(t) = 1 + e^{2t}(p-1) > p$, vale que para todo $f \in L^p(\gamma_d)$, $T_t f \in L^{q(t)}(\gamma_d)$ y

$$||T_t f||_{q(t),\gamma_d} \leq ||f||_{p,\gamma_d}. \tag{28}$$

La propiedad de hipercontractividad de $\{T_t\}$ fue probada inicialmente por E.Nelson, en el contexto de la Teoría Cuántica de Campos y ha sido extensamente discutida en la literatura. Como probó L. Gross [16], dicha propiedad resulta equivalente a la **Desigualdad Logarítmica de Sobolev**:

Para cualquier $f \in L^2(\gamma_d)$ con ∇f, en sentido débil, en $L^2(\gamma_d)$ se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \log |f(x)| \gamma_d(dx) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 \gamma_d(dx) + ||f||^2_{2,\gamma_d} \log ||f||_{2,\gamma_d}. \tag{29}$$

Recordemos que el Operador de Número $N = -\Delta + 2\langle x, \nabla_x \rangle$ es la forma de Dirichlet para γ_d, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x f(x) \cdot \nabla_x g(x) \gamma_d(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) N g(x) \gamma_d(dx),$$

y consideremos el semigrupo generado por N, $\{e^{-tN}\}_t$.

Suponemos que se verifica (29), a partir de allí podemos obtener, para cualquier $p > 1$, la desigualdad logarítmica

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \log |f(x)| \gamma_d(dx) \leq c(p) \mathrm{Re} \langle N f(t), f_p \rangle_{\gamma_d} + ||f||^p_{p,\gamma_d} \log ||f||_{p,\gamma_d}, \tag{30}$$

con $c(p) = \frac{p}{4(p-1)}$ y $f_p = (sgn\, f)|f|^{p-1}$.

La desigualdad logarítmica de Sobolev (29) generaliza, para la medida Gaussiana, la clásica **desigualdad de Sobolev** la cual afirma que, respecto a la medida de Lebesgue m, si una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, en sentido débil, entonces $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ para $p^{-1} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{d})$. Es decir,

$$||f||_p \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 dm.$$

Como ya hemos mencionado, a diferencia de la medida de Lebesgue, la medida de Gauss se puede definir en espacios de dimensión infinita y como (29) es independiente de la dimensión, se extiende a este contexto. Más aún, obsérvese que en la desigualdad clásica de Sobolev $p \to 2$ si $d \to \infty$ y en consecuencia hay una pérdida de información en dicha desigualdad cuando la dimensión crece.

Como consecuencia de la hipercontractividad de $\{T_t\}$ se puede probar que J_k es continua en $L^p(\gamma_d)$ para $1 < p < \infty$:

Si t es tal que $e^{2t} + 1 = p$ con $1 < p < \infty$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$||J_k f||_{p,\gamma_d} \leq C_{p,k} ||f||_{p,\gamma_d}. \tag{31}$$

4 El semigrupo de Poisson-Hermite.

Recordemos que en el caso clásico el semigrupo de Poisson se obtiene por subordinación del semigrupo del calor y, dado que en el caso Gaussiano el semigrupo de Ornstein- Uhlenbeck hace "las veces" del semigrupo del calor, entonces resulta natural definir el **semigrupo de Poisson-Hermite** como el semigrupo subordinado del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck. Es decir, mediante la **fórmula de subordinación de Bochner**

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\lambda^2/4u} du, \tag{32}$$

podemos definir entonces

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T_{t^2/4u} f(x) du \\ &= \frac{1}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 t \frac{\exp(t^2/4\log r)}{(-\log r)^{3/2}} \frac{\exp(\frac{-|y-rx|^2}{1-r^2})}{(1-r^2)^{d/2}} \frac{dr}{r} f(y) dy, \end{aligned} \tag{33}$$

tomando $r = e^{-t^2/4u}$. Escribimos

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t,x,y) f(y) dy, \tag{34}$$

con

$$\begin{aligned} P(t,x,y) &= \frac{1}{2\pi^{(d+1)/2}} \int_0^1 t \frac{\exp(t^2/4\log r)}{(-\log r)^{3/2}} \frac{\exp(\frac{-|y-rx|^2}{1-r^2})}{(1-r^2)^{d/2}} \frac{dr}{r} \\ &= \int_0^1 T(t,r) M_{(-\log r)}(x,y) dr \end{aligned} \tag{35}$$

donde $M_t(x,y)$ es el núcleo de Mehler y $T(t,r) = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \frac{t\exp(t^2/4logr)}{(-logr)^{3/2}} \frac{1}{r}$.

Obsérvese que debido a que el semigrupo de Poisson-Hermite $\{P_t\}$ es el subordinado del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck $\{T_t\}$, $\{P_t\}$ es también un semigrupo conservativo, simétrico, fuertemente continuo de contracciones positivas en $L^p(\gamma_d)$,$1 \leq p < \infty$. Su generador infinitesimal es $(-L)^{1/2}$ y es hipercontractivo. Además, del hecho que $(-L)^{1/2}$ es el generador infinitesimal , tenemos que P_t puede ser definido en sentido espectral como $e^{-t(-L)^{1/2}}$ y, por tanto, es claro que

$$P_t \vec{h}_\alpha = e^{-t\sqrt{|\alpha|}} \vec{h}_\alpha, \tag{36}$$

por tanto, tenemos resultados análogos a los obtenidos en la Proposición 3.1 para $\{P_t\}$.

A diferencia del caso clásico, el semigrupo de Poisson-Hermite no decae en infinito, es decir, no es cierto que $P_t \to 0$ cuando $t \to \infty$; de hecho, es fácil de verificar que

$$P_t f \to \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-|x|^2} dx, \quad \text{cuando} \quad t \to \infty. \tag{37}$$

Además, si f es una función suficientemente regular, $u(x,t) = P_t f(x)$ es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + Lu = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Es decir, $u(x,t) = P_t f(x)$ satisface la ecuación

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \Delta_x u(x,t) - 2x \cdot \bigtriangledown_x u(x,t) = 0, \tag{38}$$

y decimos que u es $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$**-armónica**.

Así pues $u(x,t) = P_t f(x)$, a la que llamaremos también **Integral de Poisson - Hermite**, se puede pensar como la extensión $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$-armónica de una función f en $\mathbb{R}^d$ al semiplano $\mathbb{R}_+^{(d+1)}$. Para estas funciones $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$-armónicas, se verifica una propiedad del valor medio para radios suficientemente pequeños. Más precisamente,

Proposición 4.1 *(Desigualdad del valor medio) Si u es $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$-armónica, entonces*

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{|B((x,t),r)|} \int_{B((x,t),r)} |u(y,s)| dy\, ds \tag{39}$$

for $r \leq t \wedge \frac{1}{|x|} \wedge 1$.

Respecto al problema de la caracterización de funciones $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$-armónicas en el semiplano $\mathbb{R}_+^{(d+1)}$, L. Forzani y W. Urbina, [14], obtuvieron los siguientes resultados:

Teorema 4.1 *Sea u una función definida en $\mathbb{R}_+^{d+1}$. Entonces u es la integral de Poisson-Hermite de una función en $L^\infty(\gamma_n)$ si y sólo si u es $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$ -armónica y acotada.*

La demostración de este teorema sigue esencialmente, con las variaciones necesarias, la prueba del resultado clásico, la cual se puede hallar en el libro de E. Stein, usando la propiedad del valor medio anteriormente descrita y el principio débil del Máximo. Además, en el caso $L^p(\gamma_d)$, tenemos

Teorema 4.2 *Sea u una función definida en $\mathbb{R}_+^{d+1}$ y $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$ -armónica para algún $1 \leq p < \infty$. Si u es uniformemente $L^p(\gamma_d)$-acotada, es decir,*

$$\sup_{t>0} ||u(\cdot, t)||_{L^p(\gamma_d)} \leq M,$$

entonces, para $p > 1$, u es la integral de Poisson-Hermite de una función en $L^p(\gamma_d)$. En el caso $p = 1$, u es la integral de Poisson-Hermite de una medida μ en $\mathbb{R}^d$ tal que $e^{-|y|^2}\mu(dy)$ es una medida finita.

En su artículo de 1969 [31], básico para esta teoría, Muckenhoupt introduce la noción de conjugada para los desarrollos de Hermite, en dimensión $d = 1$. En ese caso sabemos que, dada $f \in L^1(\gamma_1)$, si consideramos $u(x,t) = P_t f(x)$ entonces:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 2x\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \tag{40}$$

lo que es equivalente a

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + e^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-x^2}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)) = 0.$$

La **conjugada** v de u se obtiene mediante las ecuaciones de **Cauchy-Riemann Gaussianas**, introducidas por Muckenhoupt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \tag{41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = e^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-x^2}v(x,t)). \tag{42}$$

Definimos $v(x,t)$ como

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(t,x,y) f(y)\, \gamma_1(dy),\ t > 0, \tag{43}$$

donde

$$Q(t,x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^1 (\frac{1-r^2}{-\log r})^{1/2} \exp(\frac{t^2}{4\log r})\frac{y-rx}{(1-r^2)^2} \exp(\frac{-r^2x^2+2rxy-r^2y^2}{1-r^2})\, dr. \tag{44}$$

Como observa Muckenhoupt, la expresión (44) se obtiene de (35), para $d = 1$, diferenciando respecto de x, integrando respecto de t, usando el hecho que Q debe tender a 0 cuando $t \to \infty$ y multiplicando por -1; es decir

$$Q(t,x,y) = -\int_t^{\infty} \frac{\partial P(s,x,y)}{\partial x} ds.$$

Dado que, por definición, v satisface la primera ecuación de Cauchy-Riemann, es fácil comprobar que v verifica

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - 2x\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -2v(x,t), \tag{45}$$

y así v no es $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$-armónica.

Por otra parte, dicha ecuación es equivalente a

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}[e^{x^2}\frac{\partial(e^{-x^2}v(x,t))}{\partial x}] = 0.$$

Por el hecho que v no es $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L$-armónica, pareciera que dicha noción de conjugada no es la más adecuada y queda entonces abierta la pregunta de cuál es una noción de conjugada más adecuada, que se comporte en forma similar al caso clásico.

Definimos $P_t^c f(x) = v(x,t)$ como la **integral de Poisson-Hermite conjugada** de f. Por lo tanto,

$$P_t^c f(x) = -\int_t^\infty \frac{\partial P_s f}{\partial x}(x)ds.$$

Muckenhoupt probó que $P_t^c f$ es acotada en $L^p(\gamma_1)$, $1 < p < \infty$ y que, como veremos más adelante, si $t \to 0$, $P_t^c f$ tiende a la Transformada de Hilbert Gaussiana $\mathcal{H}f$, en norma L^p y casi siempre.

En su tesis doctoral [41], R. Scotto generaliza el argumento de Muckenhoupt al caso de dimensiones superiores, $d > 1$, planteando las ecuaciones de Cauchy-Riemann Gaussianas en $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) &= -\frac{\partial v_i}{\partial t}(x,t), i = 1,\dots,d\\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x,t) &= \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x,t), i,j = 1,\dots,d\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} e^{|x|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-|x|^2}v_i(x,t)).\end{aligned} \tag{46}$$

A partir de estas relaciones, Scotto define un sistema de conjugadas

$$(u(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \dots, v_d(x,t)).$$

De nuevo, siguiendo el argumento de Muckenhoupt, tenemos que para verificar la primera ecuación de (46), $P_{i,t}^c f = v_i(x,t)$, $i = 1,\dots,d$, deben tener la forma

$$P_{i,t}^c f = \int_{\mathbb{R}^d} Q_i(t,x,y)f(y)\,\gamma_d(dy),\ t > 0, \tag{47}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_i(t,x,y) &= -\int_t^\infty \frac{\partial P}{\partial x_i}(s,x,y)ds \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{(d+1)/2}}\int_0^1 (\frac{1-r^2}{-\log r})^{1/2}\exp(\frac{t^2}{4\log r})\frac{y_i - rx_i}{(1-r^2)^{(d+3)/2}} \\ &\times \quad \exp(\frac{-r^2(|x|^2+|y|^2)+2r\langle x,y\rangle}{1-r^2})\, dr, \end{aligned}$$

es el **i-ésimo núcleo de Poisson conjugado**.

Por lo tanto,

$$P^c_{i,t}f(x) = -\int_t^\infty \frac{\partial P_s f}{\partial x_i}(x)ds,$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, d$.

Ahora bien, siguiendo a Muckenhoupt, tenemos que si f tiene un desarrollo de Hermite $f = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha)\vec{h}_\alpha$, entonces, para todo $t \geq 0$, $P^c_{i,t}f$ tiene desarrollo de Hermite

$$P^c_{i,t}f = \sum_{k=1}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha)e^{-t\sqrt{|\alpha|}}(-\sqrt{\frac{2\alpha_i}{|\alpha|}})\vec{h}_{\alpha-\vec{e}_i}. \tag{48}$$

Esta serie la llamaremos **Serie de Poisson conjugada**.

5 Funciones maximales respecto a γ_d.

Definimos, para $f \in L^1_{loc}(\gamma_d)$, la **función Maximal de Hardy-Littlewood** centrada, respecto a la medida Gaussiana γ_d, como

$$M_{\gamma_d}f(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\gamma_d(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|\gamma_d(dy). \tag{49}$$

Como γ_d es una probabilidad, no es una medida doblante. Sin embargo, la continuidad $L^p(\gamma_d)$ de $M_{\gamma_d}f$, $1 < p < \infty$, se puede obtener de la continuidad débil (1,1) respecto de γ_d, la cual se prueba en la forma usual mediante el lema de Besicovicth y del caso trivial $p = \infty$, usando el argumento de interpolación de Marcinkiewicz. En [53] hicimos un estudio detallado de este operador; allí se pueden ver los detalles.

Lamentablemente no se conoce, para la medida de Gauss γ_d, una versión adecuada del Lema de Descomposición de Calderón-Zygmund.

Tenemos también, para $f \in L^1_{loc}(\gamma_d)$, la **función maximal de Hardy-Littlewood truncada**, centrada,

$$M_{a,b}f(x) = \sup_{0<r<a\wedge\frac{b}{|x|}}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy, \tag{50}$$

y la **función maximal truncada**, centrada, respecto a la medida Gaussiana γ_d,

$$M_{a,b}^{\gamma_d} f(x) = \sup_{0<r<a\wedge\frac{b}{|x|}} \frac{1}{\gamma_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\gamma_d(dy). \tag{51}$$

Es claro que $M_{a,b}^{\gamma_d} f$ está acotada superiormente por $M_{\gamma_d} f$. Además estas dos funciones son equivalentes ya que, en bolas de la forma $B = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| < a \wedge \frac{b}{|x|}\}$ que llamaremos "bolas hiperbólicas" con centro en x, la densidad Gaussiana es esencialmente constante, dado que

$$e^{-|y|^2} = e^{-|x+(y-x)|^2} \leq e^{-|x|^2} e^{2|x||y-x|} e^{-|y-x|^2} \leq e^{2b} e^{-|x|^2}$$

y

$$e^{-|y|^2} = e^{-|x+(y-x)|^2} \geq e^{-|x|^2} e^{-2|x||y-x|} e^{-|y-x|^2} \geq e^{-a^2} e^{-2b} e^{-|x|^2}.$$

Por lo tanto tenemos que, si B es una bola hiperbólica, entonces tenemos

$$\gamma_d(B) = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_B e^{-|y|^2} dy \equiv C_d e^{-|x|^2} (a \wedge \frac{b}{|x|})^d.$$

Ahora bien, si B no es una bola hiperbólica, todavía se puede calcular su medida gaussiana.

Proposición 5.1 *(Forzani) Sea B una bola en $\mathbb{R}^d$, de radio r que no contiene al origen y cuyo punto más cercano al origen es x. Entonces existe una constante C, que depende sólo de la dimensión, tal que*

$$\gamma_d(B) \leq C \frac{\exp(-|x|^2)}{|x|} (\frac{r}{|x|})^{(d-1)/2}.$$

Además si $r > \frac{C}{|x|}$, $C > 1$, la desigualdad opuesta es también cierta y por tanto estas cantidades son equivalentes.

Así pues, frente a la medida de Gauss, γ_d, las bolas tiene la masa concentrada en la parte más cercana al origen y por tanto, en una "visión gaussiana" ellas lucen deformadas "hiperbólicamente".

La **función maximal del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck** o **función maximal de Ornstein-Uhlenbeck** está definida, para todo $f \in L^1(\gamma_d)$, como

$$\begin{aligned} T^* f(x) &= \sup_{t>0} |T_t f(x)| = \sup_{t>0} |\int_{\mathbb{R}^d} M_t(x,y) f(y) dy| \\ &= \sup_{0<r<1} \frac{1}{\pi^{d/2}(1-r^2)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}} f(y) dy. \end{aligned} \tag{52}$$

Algunos autores también denominan a esta función **transformada maximal de Mehler**.

Como el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck no es un semigrupo de convolución, la continuidad de T^*f en $L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$, no se obtiene, como en el caso clásico, de la acotación con la función maximal de Hardy-Littlewood. Sin embargo, dicha continuidad se puede probar directamente mediante el lema de Natanson. Por otra parte, también se puede probar la continuidad de T^*f en $L^p(\gamma_d)$ de la teoría general de semigrupos conservativos, simétricos, fuertemente continuos de contracciones como se hace en E. Stein [47].

El caso $p = 1$ es altamente problemático. En primer lugar, se puede obtener la siguiente desigualdad puntual (véanse [20] y [53]): para $f \in L^1(\gamma_d)$ tenemos

$$T^*f(x) \leq C_d M_{\gamma_d} f(x) + (2 \vee |x|)^d e^{|x|^2} ||f||_{1,\gamma_d}. \tag{53}$$

La desigualdad (53) implica en particular que $T^* < \infty$ c.s. Sin embargo no da la continuidad débil (1,1) respecto de γ_d de T^* si $d > 1$ debido a que el segundo término sólo da la desigualdad deseada en el caso $d = 1$. No obstante, Muckenhoupt probó este resultado para $d = 1$ en forma más directa y sencilla.

Es fácil ver que la estimación hecha anteriormente que da el término "malo" de la desigualdad, es muy grosera y el problema es mejorar esa estimación. El estudio que hace Sonsoles Pérez [37], en su tesis doctoral en la Universidad Autónoma de Madrid, es una mejora sustancial de estos argumentos. Analizando con más agudeza la geometría del problema, ella logra obtener una desigualdad puntual que sí permite deducir la continuidad débil (1,1) de T^*.

Sin embargo, la demostración de la continuidad débil (1,1) respecto a γ_d de T^* para $d > 1$ es altamente no trivial. Fue obtenida inicialmente por Sjögren [44] en 1982. Para probar este resultado Sjögren usa argumentos totalmente originales y muy diferentes a los usuales del caso clásico, ya que, debido a que la medida Gaussiana es una medida de probabilidad (y por tanto no es doblante) no hay buenos lemas de cubrimiento.

En segundo lugar, Liliana Forzani [7] obtuvo, en su tesis doctoral en 1993, una especie de lema de cubrimiento intermedio entre el lema de cubrimiento de Besicovicht y el de Wiener para este núcleo y, a partir de allí, es capaz de seguir el esquema clásico. Más aún, recientemente ha simplificado su argumento, mostrando que la función maximal de Ornstein-Uhlenbeck es un caso particular de una clase de **operadores maximales gaussianos** cuya definición damos a continuación. Sea $\phi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ una función no creciente, tal que

$$S = \sum_{v \geq 1} \phi(\frac{1}{2}(v-1)) v^{2d} < \infty.$$

Definimos

$$\mathcal{M}^*_\phi f(x) = \sup_{0<r<1} \frac{1}{\gamma_d((1+\delta)B(\frac{x}{r}, \frac{|x|}{r}(1-r))} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\frac{|ry-x|}{\sqrt{1-r^2}}) f(y)\, \gamma_d(dy), \quad (54)$$

donde $\delta = \delta_{r,x} = \frac{r}{|x|(1-r)}(\frac{1}{|x|} \wedge \sqrt{1-r})$.

Forzani prueba que $\mathcal{M}^*_\phi$ es de tipo débil (1,1) con respecto a la medida gaussiana. En particular, para $\phi(t) = \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-t^2}$ tenemos $\mathcal{M}^*_\phi f(x) = T^* f(x)$, y por tanto la continuidad débil (1,1) de T^* es un corolario de este resultado.

Recientemente, como hemos mencionado, T. Menárguez, S. Pérez y F. Soria (véanse [25] y [37]), han obtenido otra técnica para una demostración alternativa de la continuidad débil (1,1) de T^*. Esta técnica simplifica, en cierto sentido, la prueba de Sjögren, usando coordenadas polares, cosa que resulta muy natural debido a que la medida Gaussiana es invariante por rotaciones alrededor del origen y obteniendo así un lema de cubrimiento tipo Vitali para regiones esencialmente cónicas.

La idea de la prueba de Menárguez, Pérez y Soria, al igual que la de Sjögren, es dividir T^* en una **parte local** y una **parte global**; es importante notar, sin embargo, que las regiones de la prueba de Menárguez, Pérez y Soria son diferentes y, en general, más simples que las de Sjögren. Ellos definen, dado $x \in \mathbb{R}^d$, como **local** la parte del operador definida sobre la bola hiperbólica $B_h(x) = B(x, C(1 \wedge \frac{1}{|x|})) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| < C(1 \wedge \frac{1}{|x|})\}$ (como ya hemos mencionado, estas bolas tienen la propiedad de que en ellas la densidad Gaussiana es esencialmente constante) y **global** como la parte del operador que está fuera de esa bola.

Al igual que en la prueba de Sjögren, la parte local de T^* se puede controlar mediante la función maximal de Hardy-Littlewood, aunque, con un argumento diferente. Esto va a ser una constante en los métodos de demostración para operadores asociados a la medida Gaussiana, la parte local, que es donde la medida de Gauss es equivalente a la medida de Lebesgue, los operadores son controlados por los "respectivos" operadores clásicos.

El problema difícil es, de nuevo, "controlar" la parte global que resultan ser operadores positivos. En el caso de la función maximal de Ornstein-Uhlenbeck, para considerar la parte global, primero se estima el operador cuyo núcleo es el supremo puntual $\sup_{t>0} M_t(x,y)$ del núcleo de Mehler. La estimación que obtiene Pérez [37] es que si $|x-y| \geq C_d(1 \wedge \frac{1}{|x|})$ entonces tenemos

$$\mathcal{K}^*(x,y) \sim \mathcal{K}^*_G(x,y),$$

donde

$$\mathcal{K}_G^*(x,y) = \begin{cases} e^{-|y|^2}, & \text{si } \langle x,y\rangle \leq 0 \\ \left(\frac{|x+y|}{|x-y|}\right)^{d/2} e^{-\frac{|y|^2-|x|^2}{2}} e^{-\frac{|x-y||x+y|}{2}}, & \text{si } \langle x,y\rangle > 0, \end{cases} \tag{55}$$

es el llamado **núcleo maximal gaussiano**.

El método usado por Pérez para estimar la parte global es muy interesante ya que, en primer lugar, las estimaciones de núcleo son mejores que las obtenidas por P. Sjögren y en segundo lugar, permite, quizás debido a que se adapta más a la geometría del problema, un tratamiento unificado para estimar la parte global de otros operadores, como veremos más adelante. En general, la parte global de operadores asociados a la medida Gaussiana será acotada por operadores positivos. Sería interesante ver si las estimaciones de Pérez se podrían utilizar en el argumento de Sjögren y obtener una demostración más elegante.

En 1994 Forzani y Fabes definieron **funciones maximales no tangenciales** para los semigrupos de Ornstein-Uhlenbek y de Poisson-Hermite:

Sea f una función definida en $\mathbb{R}^d$, definimos la **función maximal no tangencial asociada al semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck**

$$\mathcal{T}^* f(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma^p(x)} |T_t f(y)|, \tag{56}$$

donde $\Gamma_\gamma^p(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{d+1} : \ |y-x| < \sqrt{t} \wedge \frac{1}{|x|}, \wedge 1\}$ es un "cono gaussiano" parabólico.

y la **función maximal no tangencial asociada al semigrupo de Poisson-Hermite.**

$$\mathcal{P}^* f(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma_\gamma(x)} |P_t f(y)|, \tag{57}$$

donde $\Gamma_\gamma(x) = \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{d+1} : \ |y-x| < t \wedge \frac{1}{|x|}, \wedge 1\}$ es un "cono gaussiano".

Para estos operadores ellos probaron que son continuos débil (1,1) respecto a la medida de Gauss y fuertemente continuos en $L^p(\gamma_d)$, $1 < p \leq \infty$.

6 Potenciales de Riesz respecto a γ_d.

Los **Potenciales de Riesz** de L se definen, en analogía al caso clásico, como las potencias negativas de $(-L)$,

$$I_\alpha^\gamma = (-L)^{-\alpha}, \alpha > 0.$$

Obsérvese que, como 0 es un autovalor de $(-L)$, I_α^γ no está definido en todo $L^2(\gamma_d)$.

Para hallar una representación integral de los Potenciales de Riesz I_α^γ, partimos el operador $(\epsilon I - L)$, donde I es la identidad y $\epsilon > 0$ y consideramos, para $\epsilon > 0$ y $\alpha > 0$, la representación

$$(\epsilon I - L)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-(\epsilon I - L)t} dt, \tag{58}$$

Obtenemos

$$I_\alpha^\gamma \Pi_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} P_t (I - J_0) dt,$$

donde Π_0 la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal del autoespacio correspondiente al autovalor 0. Luego, $J_0 = I - \Pi_0$, donde J_0 es la proyección ortogonal de $L^2(\gamma_d)$ sobre el subespacio generado por $H_0 \equiv 1$. Abusando de la notación, denotamos también por I_α^γ a $L^{-\alpha}\Pi_0$.

Luego, el núcleo de I_α^γ es

$$\begin{aligned} N_\alpha(x,y) &= \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \Big(\frac{e^{-\frac{|y-e^{-t}x|^2}{1-e^{-2t}}}}{(1-e^{-2t})^{d/2}} - e^{-|y|^2} \Big) dt \qquad (59) \\ &= \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (-\log r)^{\alpha-1} \Big(\frac{e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}}}{(1-r^2)^{d/2}} - e^{-|y|^2} \Big) \frac{dr}{r}. \qquad (60) \end{aligned}$$

Tomando $r = e^{-t}$, obtenemos

$$I_\alpha^\gamma f(x) = \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (-\log r)^{\alpha-1} \Big(\frac{e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}}}{(1-r^2)^{d/2}} - e^{-|y|^2} \Big) \frac{dr}{r} f(y) dy. \tag{61}$$

Se puede probar directamente, de la hipercontractividad del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck o usando el Teorema de Multiplicadores de Meyer (véase el Teorema 9.2), que I_α^γ es un operador continuo en $L^p(\gamma_d)$. Además, si $|\beta| > 0$

$$I_\alpha^\gamma \vec{h}_\beta = (-L)^{-\alpha} \vec{h}_\beta = \frac{1}{|\beta|^\alpha} \vec{h}_\beta \tag{62}$$

y por tanto, si $f = \sum_{k=0}^\infty J_k f$, entonces $I_\alpha^\gamma f = \sum_{k=1}^\infty (\frac{1}{k})^\alpha J_k f$.

Como es bien conocido, en el caso clásico, los potenciales de Riesz (asociados al operador Laplaciano Δ), $I_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha}$ son operadores que, en primer lugar, son homogéneos, en el sentido que $\delta_{\tau^{-1}} I_\alpha \delta_\tau = \tau^{-\alpha} I_\alpha$, donde $\delta_a f(x) = f(ax)$ es el operador dilatación. Es fácil ver explícitamente que I_α^γ no son homogéneos.

En segundo lugar, I_α"mejoran" en el sentido que $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$ continuamente, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}$. En el caso gaussiano resulta que I_α^γ no mejoran, ya que no es posible que ella mande $L^p(\gamma_d) \to L^q(\gamma_d)$ continuamente para ningún $q > p$, como lo demostraron L. Forzani y W. Urbina [12] mediante un contraejemplo en $d = 1$, $1 < p < 2$ con la función, utilizada por Pollard en su famoso contraejemplo, $f(x) = e^{cx^2} \in L^p(\gamma_1)$. Sin embargo, siguiendo las técnicas usadas por L. Gross para probar que la hipercontractividad implica la desigualdad Logarítmica de Sobolev y la continuidad de $L^p(\gamma_d)$ de I_α^γ podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |I_\alpha^\gamma f|^p \log |I_\alpha^\gamma f| d\gamma_d \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p d\gamma_d + ||f||_{p,\gamma_d}^p \log ||f||_{p,\gamma_d}. \qquad (63)$$

7 Integrales Singulares respecto a γ_d.

En su artículo de 1969 [31], Muckenhoupt probó que, para $1 < p < \infty$, dada $f \in L^p(\gamma_d)$, si t tiende a cero, su integral de Poisson-Hermite conjugada, $P_t^c f(x)$ tiende, en $L^p(\gamma_1)$-norma y casi siempre-γ_1, a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(x) &= v.p.\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 (\frac{1-r^2}{-\log r})^{1/2}\frac{y-rx}{(1-r^2)^2}\exp(\frac{-r^2x^2+2rxy-r^2y^2}{1-r^2})\, dr f(y)\, \gamma_1(dy) \\ &= v.p.\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 (\frac{1-r^2}{-\log r})^{1/2}\frac{y-rx}{(1-r^2)^2}\exp(\frac{-|y-rx|^2}{1-r^2})\, dr f(y)\, dy,\end{aligned}$$

a la cual llamamos la **Transformada de Hilbert Gaussiana**. En el mismo artículo Muckenhoupt obtiene la continuidad $L^p(\gamma_1)$ de este operador así como su continuidad débil (1,1) respecto a γ_1.

Como ya hemos mencionado, a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann Gaussianas en $\mathbb{R}^d$, R. Scotto [41], define un sistema de conjugadas

$$(u(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \ldots, v_d(x,t)).$$

Se puede probar entonces que tomando el límite cuando $t \to 0^+$ se obtienen las **Transformadas de Riesz Gaussianas**.

Tomaremos otro punto de vista para definir las Transformadas de Riesz, utilizando los potenciales de Riesz. Como veremos más adelante, se puede ver que ambas formas de construir las integrales singulares son, por supuesto, coincidentes.

Definimos las **Transformadas de Riesz Gaussianas** en $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, por analogía al caso clásico (véase E. Stein) como

$$\mathcal{R}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} I_{1/2}^\gamma, \qquad (64)$$

$1 \leq i \leq d$ y, por tanto, su núcleo viene dado como

$$\mathcal{K}_i(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_i} N_{1/2}(x,y) = \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(1/2)} \int_0^1 \left(\frac{1-r^2}{-\log r} \right)^{1/2} \frac{y_i - rx_i}{(1-r^2)^{\frac{(d+3)}{2}}} e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}} dr, \tag{65}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i f(x) &= v.p. \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_i(x,y) f(y) dy \\ &= v.p. \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(1/2)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \left(\frac{1-r^2}{-\log r} \right)^{1/2} \frac{y_i - rx_i}{(1-r^2)^{\frac{(d+3)}{2}}} e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}} dr f(y) dy. \end{aligned}$$

Con estas definiciones, se puede ver que considerando $u(x,t) = P_t f(x)$, y $v_i(x,t) = P_t^{(1)}(\mathcal{R}_i f)(x)$, $i = 1, 2, \ldots, d$, la (d+1)-upla

$$(u(x,t), v_1(x,t), v_2(x,t), \ldots, v_d(x,t)),$$

constituye un sistema de conjugadas, es decir ella satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann Gaussianas.

La continuidad $L^p(\gamma_1)$ de este operador fue probada inicialmente por P.A. Meyer en 1984, usando métodos probabilísticos, así como también lo hizo R. Gundy [17] introduciendo la noción de "radiación de fondo" como proceso estocástico. En forma analítica fue probada independientemente por G. Pisier [38] y W. Urbina [52]. Posteriormente, fue probada usando la Teoría de Littlewood-Paley por C. Gutiérrez [18] y, muy recientemente, por S. Pérez [37].

Análogo al caso de la función maximal del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck T^*, el caso $p = 1$, para $\mathcal{R}_i$, es altamente no trivial. En su tesis doctoral, R. Scotto probó la continuidad débil (1,1) de las transformadas de Riesz $\mathcal{R}_i$ utilizando, precisamente, el método desarrollado por P. Sjögren para T^*.

Para estudiar estos operadores en detalle, como en el caso de la función maximal de Ornstein-Ulenbeck, dividimos el operador en una parte "local" y otra "global". La parte "local" de $\mathcal{R}_i$ corresponde esencialmente a una integral singular clásica del tipo Calderón-Zygmund.

Para la parte "global" de $\mathcal{R}_i$ Pérez [37] obtiene que si $|x-y| \geq C_d \left(1 \wedge \frac{1}{|x|}\right)$ entonces, para $1 \leq i \leq d$,

$$|\mathcal{K}_i(x,y)| \leq C_d \mathcal{K}_G^*(x,y),$$

donde $\mathcal{K}_G^*$ es un núcleo maximal gaussiano.

$$\mathcal{K}_G^* = \begin{cases} e^{-|y|^2} & \text{si } \langle x,y \rangle \leq 0 \\ \left(\frac{|x+y|}{|x-y|} \right)^{d/2} e^{-\frac{|y|^2-|x|^2}{2}} e^{-\frac{|x+y|^2-|x-y|^2}{2}} & \text{si } \langle x,y \rangle > 0 \end{cases}$$

Definiremos también las **Transformadas de Riesz Gaussianas de orden superior** como

$$\mathcal{R}_\alpha = D_x^\alpha I_{|\alpha|/2}^\gamma, \tag{66}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}$ es un multi-índice, tal que $|\alpha| > 0$, y $D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$.

Obsérvese que la diferenciación y las potencias de $(-L)$ no conmutan.

En este caso tenemos que el núcleo viene dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_\alpha(x,y) &= D_x^\alpha N_\alpha(x,y)\\ &= \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{-\log r}{1-r^2}\right)^{\frac{|\alpha|-2}{2}} r^{|\alpha|} \vec{H}_\alpha\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) \frac{e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}}}{(1-r^2)^{d/2+1}} \frac{dr}{r}.\end{aligned} \tag{67}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\alpha f(x) &= v.p. \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_\alpha(x,y) f(y) dy\\ &= v.p. \frac{\pi^{-d/2}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \left(\frac{-\log r}{1-r^2}\right)^{\frac{|\alpha|-2}{2}} r^{|\alpha|} \vec{H}_\alpha\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) \frac{e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}}}{(1-r^2)^{d/2+1}} \frac{dr}{r} f(y) dy.\end{aligned}$$

La continuidad $L^p(\gamma_d)$ de estos operadores, para $1 < p < \infty$, ha sido probada por diversos autores, quienes han utilizado tanto métodos probabilísticos como del Análisis. La demostración de éste resultado ha tenido una interesante evolución técnica en los últimos 10 años, desde la primera prueba analítica dada por W. Urbina [51], pasando por la ingeniosa prueba, mezcla de Probabilidades y Análisis, de G. Pisier [38] para el caso $|\alpha|$ impar, hasta la prueba de C. Gutiérrez, C. Segovia, J.L. Torrea [19] quienes utilizan Teoría de Littlewood -Paley-Stein, tal como detallaremos un poco más adelante, hasta el reciente resultado de S. Pérez [37]. En todo caso, la complejidad técnica de las mismas hace prácticamente imposible dar los detalles en el presente trabajo. Recientemente, Forzanni, Scotto y Urbina [13] obtuvieron una prueba muy simple usando teoría de multiplicadores.

De nuevo, para estudiar estos operadores en detalle, dividimos el operador en una parte "local" y otra "global". Como veremos más adelante la parte "local" de $\mathcal{R}_\alpha$ corresponde esencialmente a una integral singular clásica del tipo Calderón-Zygmund, como quedó claro a partir de trabajo de W. Urbina [51].

Para la parte "global" de $\mathcal{R}_\alpha$, Pérez [37] obtiene para $\mathcal{K}_\alpha$ una estimación análoga a la obtenida para $\mathcal{K}_i$ pero con el núcleo

$$\mathcal{K}_{|\alpha|}^*(x,y) \le \begin{cases} (|x+y||x-y|)^{\frac{|\alpha|-2}{2}} ((|x+y||x-y|)^{\frac{1}{2}} \frac{|x||y|}{|x|^2+|y|^2} + 1) \mathcal{K}_G^*(x,y) & \text{si } \langle x,y \rangle > 0 \\ (|x|^2+|y|^2)^{\frac{|\alpha|-2}{2}} \mathcal{K}_G^*(x,y) & \text{si } \langle x,y \rangle \le 0. \end{cases}$$

Como consecuencia de esta estimación tenemos que la función $\mathcal{K}_2^*$ acota superiormente los núcleos de las Transformadas de Riesz Gaussianas de orden dos. Este hecho y una pequeña modificación del argumento de la acotación de T^* prueba que dichas Transformadas de Riesz son continuas débil (1,1), respecto a γ_d; es decir, mandan continuamente $L^1(\gamma_d)$ en $L^{1,\infty}(\gamma_d)$. Esto ha sido probado recientemente, para el caso $d = 1$, por L. Forzani y R. Scotto y, en general, para $d > 1$ por J. García-Cuerva, G. Mauceri, P. Sjögren y J.L. Torrea [15] y simultáneamente por T. Menárguez, S. Pérez y F. Soria [25].

Mas aún, L. Forzani y R. Scotto [10] han obtenido un sorprendente contraejemplo que prueba, en el caso $d = 1$, que las transformadas de Riesz de orden superior $\mathcal{R}_\alpha = D^\alpha I^\gamma_{|\alpha|/2}$ no son débil (1,1) si $|\alpha| \geq 3$. Para el caso $d > 1$, la misma conclusión fue obtenida por J. García-Cuerva, G . Mauceri, P. Sjögren y J.L. Torrea [15].

Estos resultados implican que la Teoría de Integrales Singulares, respecto a la medida Gaussiana, es radicalmente diferente a la teoría clásica, es decir que no es esperable el desarrollo de una Teoría del tipo Calderón-Zygmund en este contexto, que caracterice a las integrales singulares gaussianas.

Además, Pérez [37] basándose en la estimación sobre el tamaño del núcleo de las transformadas de Riesz de orden superior obtuvo que la transformada de Riesz de orden superior $\mathcal{R}_\alpha$, $|\alpha| > 2$, es de tipo débil-$L(1 + \log^+ L)^{\frac{|\alpha|-2}{2}}(\gamma_d)$ en $\mathbb{R}^d$, es decir, manda el espacio $L(1 + \log^+ L)^{\frac{|\alpha|-2}{2}}(\gamma_d)$ continuamente en $L^{1,\infty}(\gamma_d)$.

Para estudiar la parte "local" de las Transformadas de Riesz Gaussianas, Pérez, da una generalización natural de la Teoría clásica de Calderón-Zygmund adaptada a la medida gaussiana γ_d.

Finalmente, se pueden definir **Integrales Singulares Gaussianas**, más generales que las transformadas de Riesz Gaussianas de orden superior, aún cuando en su definición se sigue la estructura fundamental de aquéllas (compárese con (67)) y que por tanto las incluye de manera trivial. Dada una función F, de clase C^1, que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(x)\gamma_d(dx) = 0, \tag{68}$$

y tal que, para todo $\epsilon > 0$, existen constantes C_ϵ y C'_ϵ tales que

$$|F(x)| \leq C_\epsilon e^{\epsilon|x|^2} \quad \text{y} \quad |\nabla F(x)| \leq C'_\epsilon e^{\epsilon|x|^2}, \tag{69}$$

definimos para cualquier $m \in \mathbb{N}$

$$T_{F,m} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 (\frac{-\log r}{1-r^2})^{\frac{m-2}{2}} r^m F(\frac{y - rx}{\sqrt{1-r^2}}) \frac{e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}}}{(1-r^2)^{d/2+1}} \frac{dr}{r} f(y)dy. \tag{70}$$

Esta definición está tomada de [37]. En [51] se consideraron operadores de este tipo pidiendo, en vez de (69), la condición que F y ∇F tengan a lo más crecimiento polinomial, lo cual claramente es un caso particular de (69). Para este último caso, la continuidad-$L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$, es prácticamente inmediata de la continuidad de las Transformadas de Riesz de orden superior, básicamente por el hecho que los polinomios de Hermite forman una base algebraica (véase [51]).

En el caso general se puede probar también que $T_{F,m}$ es un operador continuo en $L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$. Para probar esto dividimos de nuevo al operador $T_{F,m}$ en su **parte global** $T^G_{F,m}$ y su **parte local** $T^l_{F,m}$.

Para la parte global $T^G_{F,m}$ se prueba que ella es $L^p(\gamma_d)$-continua para todo $1 < p < \infty$, utilizando las mismas ideas que usamos para las transformadas de Riesz para estimar el núcleo

$$\mathcal{K}_{F,m}(x,y) = \int_0^1 \left(\frac{-\log r}{1-r^2}\right)^{\frac{m-2}{2}} r^m F\left(\frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) \frac{e^{-\frac{|y-rx|^2}{1-r^2}}}{(1-r^2)^{d/2+1}} \frac{dr}{r}.$$

Para la parte local $T^l_{F,m}$, se puede probar que es siempre débil (1,1). Las estimaciones siguen una idea de Urbina y se basan en controlar la diferencia de $T_{F,m}$ y una buena aproximación de éste mediante un operador definido como la convolución con un núcleo de Calderón-Zygmund.

Obsérvese que si F es una función que verifica la condición de ortogonalidad (68) y definimos

$$k(x) = \int_0^\infty F\left(-\frac{x}{t^{1/2}}\right) e^{-|x|^2/t} \frac{dt}{t^{d/2+1}}$$

entonces k es un núcleo de Calderón-Zygmund, ya que, haciendo el cambio de variable $s = |x|/t^{1/2}$, tenemos

$$k(x) = \frac{\int_0^\infty F(-\frac{x}{|x|}s) e^{-s^2} s^{d-1} ds}{|x|^d} = \frac{\Omega(x)}{|x|^d},$$

con Ω homogénea de grado 0 y de media nula en S^{d-1}. Por lo tanto el operador definido a partir de este núcleo, por convolución, es continuo en L^p, $1 < p < \infty$ y débil (1,1), respecto a la medida de Lebesgue por la teoría clásica de Calderón-Zygmund. Se puede ver que la parte local de dicho operador es de tipo débil (1,1) respecto a γ_d. El control de la diferencia de la parte local de $T_{F,m}$ y este operador nos permite manejar un término que resulta ser continuo-$L^1(\gamma_d)$.

Obsérvese que en el caso $d = 1$ la Transformada de Hilbert Gaussiana se puede definir como

$$\mathcal{H} = \frac{d}{dx}(-L)^{-1/2}.$$

Luego,

$$\mathcal{H}H_n = \frac{d}{dx}(-L)^{-1/2}H_n = \frac{1}{\sqrt{n}}H_n' = 2\sqrt{n}H_{n-1}.$$

Por lo tanto, para $f \in L^2(\gamma_1)$ con $f = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, H_n\rangle_\gamma H_n$, tenemos que su Transformada de Hilbert Gaussiana está dada por la **serie conjugada**

$$\mathcal{H}f = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{n}\langle f, H_n\rangle H_{n-1}, \tag{71}$$

en particular,

$$\mathcal{H}h_n = \mathcal{H}(\frac{H_n}{(2^n n!)^{1/2}}) = 2\sqrt{n}\frac{H_{n-1}}{(2^n n!)^{1/2}} = \sqrt{2}h_{n-1}. \tag{72}$$

Esto motiva los siguientes resultados que estudian el comportamiento de $\mathcal{H}$ desde el punto de vista de la Teoría de Operadores. En [29] probamos que la Transformada de Hilbert Gaussiana $\mathcal{H}$ es, módulo una constante, unitariamente equivalente al adjunto de la restricción a $H^2(\mathbb{D})$ del operador shift; es decir que $\mathcal{H}$, módulo una constante, es unitariamente equivalente con el **operador co-shift**, restringido a $H^2(\mathbb{D})$. De allí podremos obtener algunos resultados sobre operadores que conmutan con $\mathcal{H}$, es decir, el conmutante de $\mathcal{H}$.

Teorema 7.1 *La transformada de Hilbert Gaussiana $\mathcal{H}$ como un operador en $L^2(\gamma_1)$ es, módulo una constante, unitariamente equivalente al adjunto de la restricción del operador de traslación a $H^2(\mathbb{D})$.*

Con este resultado podemos obtener, la caracterización del conmutante de $\mathcal{H}$.

Teorema 7.2 *Sea $\mathcal{F}$ un operador lineal en $L^2(\gamma_1)$. Si $\mathcal{F}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{F}$, entonces existe $g \in H^\infty(\mathbb{D})$, tal que*

$$\mathcal{F}f \quad = \quad \mathcal{F}(\sum_{n=0}^{\infty}\langle f, h_n\rangle_{L^2(\gamma_1)}h_n) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n\geq k}^{\infty}\langle f, h_n\rangle_{L^2(\gamma_1)}\langle g, e_{n-k}\rangle_{H^2(\mathbf{D})}h_k.$$

Recíprocamente, si esta relación se cumple, entonces

$$\mathcal{F}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{F}(I - J_0),$$

donde J_0 es la proyección ortogonal de $L^2(\gamma_d)$ sobre C_0, el subespacio generado por H_0.

La generalización de estos resultados al caso $d > 1$ es un problema abierto. Tenemos en primer lugar , para las Transformadas de Riesz Gaussianas, que para α un multi-índice tal que $|\alpha| > 0$

$$\mathcal{R}_i \vec{H}_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} I^\gamma_{1/2} \vec{H}_\alpha(x) = \frac{2\alpha_i}{\sqrt{|\alpha|}} \vec{H}_{\alpha - \vec{e}_i}(x), \tag{73}$$

donde $\vec{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Dicha relación es análoga a la que se obtiene para la Transformada de Riesz clásica. Para los polinomios de Hermite normalizados se tiene entonces

$$\mathcal{R}_i \vec{h}_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2\alpha_i}{|\alpha|}} \vec{h}_{\alpha - \vec{e}_i}(x),$$

y por tanto, para $f \in L^2(\gamma_d)$ con $f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha) \vec{h}_\alpha$, tenemos

$$\mathcal{R}_i f = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha) \sqrt{\frac{2\alpha_i}{|\alpha|}} \vec{h}_{\alpha - \vec{e}_i}. \tag{74}$$

Si consideramos $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_d)$, escribimos

$$\mathcal{R} \vec{h}_\alpha(x) = (\sqrt{\frac{2\alpha_i}{|\alpha|}} \vec{h}_{\alpha - \vec{e}_1}(x), \sqrt{\frac{2\alpha_i}{|\alpha|}} \vec{h}_{\alpha - \vec{e}_2}(x), \dots, \sqrt{\frac{2\alpha_i}{|\alpha|}} \vec{h}_{\alpha - \vec{e}_d}(x)).$$

La pregunta es si este operador se puede identificar en algún sentido con operadores traslación en cada variable, de manera de hacer un argumento similar al dado para el caso de la Transformada de Hilbert.

En forma análoga se pueden obtener expresiones explícitas de la acción de Transformadas de Riesz de orden superior $\mathcal{R}_\alpha$ sobre los polinomios de Hermite. Para todo $i = 1, \cdots d$, si $\beta_i \geq \alpha_i$:

$$\mathcal{R}_\alpha \vec{H}_\beta(x) \quad = \quad D^\alpha I^\gamma_{|\alpha|/2} \vec{H}_\beta(x) = \frac{1}{|\beta|^{|\alpha|/2}} 2^{|\alpha|} [\prod_{i=1}^{d} \beta_i (\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \alpha_i + 1)] \vec{H}_{\beta - \alpha}(x),$$

de otro modo $\mathcal{R}_\alpha \vec{H}_\beta(x) = 0$.

Por lo tanto

$$\mathcal{R}_\alpha \vec{h}_\beta(x) = (\frac{2^{|\alpha|}}{|\beta|^{|\alpha|}})^{1/2} [\prod_{i=1}^{d} \beta_i (\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \alpha_i + 1)]^{1/2} \vec{h}_{\beta - \alpha}(x), \tag{75}$$

si $\beta_i \geq \alpha_i$ para todo $i = 1, \cdots, d$.

Como es obvio, tampoco en este caso está claro que se puede hacer desde el punto de vista de la Teoría de Operadores. Sin embargo como veremos esta expresión nos será útil para establecer la $L^p(\gamma_d)$-continuidad de las $\mathcal{R}_\alpha$

8 Teoría de Littlewood-Paley-Stein para γ_d.

La Función g Gaussiana y sus variantes.

Aunque desde el punto de vista probabilístico fueron introducidas ciertas funciones de tipo Littlewood-Paley por P.A. Meyer [27] y D. Stroock [49], el estudio de una teoría de Littlewood-Paley-Stein para la medida Gaussiana con métodos analíticos comienza con el artículo de C. Gutiérrez [18]. En analogía al caso clásico, definimos la **función g_γ de Littlewood-Paley Gaussiana** como

$$g_\gamma(f)(x) = (\int_0^\infty t|\nabla P_t f(x)|^2 dt)^{1/2}, \tag{76}$$

donde $\nabla = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_x)$.

Como en el caso clásico, este operador puede pensarse como una integral singular a valores vectoriales, definida sobre un espacio de Hilbert específico.

Por otra parte, tenemos

Teorema 8.1 *(Gutiérrez) Para $1 < p < \infty$ existe una constante C_p, que depende sólo de p, tal que, para todo $f \in L^p(\gamma_d)$*

$$||g_\gamma(f)||_{p,\gamma_d} \leq C_p||f||_{p,\gamma_d}. \tag{77}$$

Se puede verificar que esta demostración sigue siendo cierta para funciones con valores en un espacio de Hilbert H.

Adicionalmente, Gutiérrez considera las siguientes funciones de Littlewood-Paley, asociadas al semigrupo trasladado $\{P_t^{(1)}\}_t$

$$g_{+,\gamma}^{(1)}(f)(x) = (\int_0^\infty t(|\nabla P_t^{(1)} f(x)|^2 + (P_t^{(1)} f(x))^2 dt)^{1/2}, \tag{78}$$

$$g_{1,\gamma}^{(1)}(f)(x) = (\int_0^\infty t(|\frac{\partial}{\partial t} P_t^{(1)} f(x)|^2 dt)^{1/2}. \tag{79}$$

Para dichas funciones, prueba el siguiente resultado:

Teorema 8.2 *Para $1 < p < \infty$ existen constantes C_p y C_p', que dependen sólo de p, tal que, para todo $f \in L^p(\gamma_d)$*

$$||g_{+,\gamma}^{(1)}(f)||_{p,\gamma_d} \leq C_p||f||_{p,\gamma_d}. \tag{80}$$

Además,

$$||f||_{p,\gamma_d} \leq C_p'||g_{1,\gamma}^{(1)}(f)||_{p,\gamma_d}. \tag{81}$$

El principal objetivo de C. Gutiérrez en [18] era, siguiendo el esquema esbozado por E. Stein en [47], probar la continuidad $L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$, de las Transformadas de Riesz $\mathcal{R}_i$. Para ello establece la siguiente desigualdad puntual

$$g_{1,\gamma}^{(1)}(\mathcal{R}_i f)(x) \leq \sqrt{2} g_\gamma(f)(x),$$

y utiliza los resultados de los Teoremas 8.1 y 8.2. Una importante ventaja de dicho resultado es que las constantes obtenidas son independientes de la dimensión.

En su tesis doctoral R. Scotto [41] probó la continuidad débil de la función g_γ. Scotto demostró este resultado usando la técnica de demostración de Sjögren, dividiendo el operador en una parte local y una parte global.

Por otra parte, para probar la continuidad débil (1,1) de la parte global, tenemos que podemos también usar la siguiente estimación de Pérez [37]: Para $x \in$ fijo, si f tiene soporte fuera de la bola hiperbólica $\left\{y : |x-y| \leq C_d \left(1 \wedge \frac{1}{|x|}\right)\right\}$, entonces

$$g_\gamma(f)(x) \leq \int_{\left\{y:|x-y| \geq C_d\left(1 \wedge \frac{1}{|x|}\right)\right\}} \mathcal{K}_G^*(x,y)|f(y)|dy.$$

En un artículo reciente, Gutiérrez, Segovia y Torrea [19] introducen las **funciones g_k Gaussianas de Littlewood-Paley de orden k** para $k \geq 1$

$$g_{k,\gamma}(f)(x) = (\int_0^\infty |t^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_t f(x)|^2 \frac{dt}{t})^{1/2} \tag{82}$$

y prueban que ellas son $L^p(\gamma_d)$-continuas, $1 < p < \infty$.

Como sugiere R. Scotto, se puede probar que las $g_{k,\gamma}$ son de tipo débil (1,1) para todo k.

Siguiendo el artículo de Gutiérrez [18], Gutiérrez, Segovia y Torrea [19] utilizan las funciones g_k para probar la continuidad $L^p(\gamma_d)$ de las Transformadas de Riesz de orden superior, $\mathcal{R}_\alpha$, usando la relación

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{|\alpha|}}(P_t^{|\alpha|} \mathcal{R}_\alpha) = D^{|\alpha|} P_t.$$

Sin embargo, como ya hemos mencionado, veremos más adelante que esto se puede obtener de manera más directa mediante el Teorema de Multiplicadores de Meyer (véase el Corolario 9.1.)

Finalmente, Gutiérrez [18] considera también las siguientes funciones de Littlewood-Paley, asociadas a los semigrupos trasladados $\{P_t^{(k)}\}_t$

$$g_{+,\gamma}^{(k)}(f)(x) = (\int_0^\infty t(|\nabla P_t^{(k)} f(x)|^2 + (P_t^{(k)} f(x))^2 dt)^{1/2}, \tag{83}$$

y Gutiérrez, Segovia y Torrea [19] también introducen unas funciones Gaussianas de Littlewood-Paley de orden k para $k \geq 1$, respecto a la variable espacial x donde el la k-ésima derivación se hace en la variable x (y no en t como se consideró anteriormente) en el sentido que se aclarara en la sección siguiente.

La Función de Area respecto a γ_d.

En 1994, Forzani y Fabes consideraron también una **función de área Gaussiana**: Sea f una función definida en $\mathbb{R}^d$, definimos

$$\left(S_\gamma(f)(x,\alpha) = \int_{\Gamma_\gamma(x,\alpha)} |\nabla P_t f(y)|^2 \, t \, (t^{-d} \vee |x|^d \vee 1) \, dy \, dt, \right)^{1/2} \tag{84}$$

donde $\Gamma_\gamma(x,\alpha) = \{(y,t) \in \mathbb{R}_+^{d+1} : \ |y-x| < \alpha(t \wedge \frac{1}{|x|} \wedge 1)\}$ es el "cono gaussiano" de apertura $\alpha > 0$.

Teorema 8.3 *Supongamos que $f \in L^p(\gamma_d)$. Entonces*
i) Existe una constante C, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, y para todo $\alpha > 0$

$$g_\gamma(f)(x) \leq C \, S_\gamma(f)(x,\alpha).$$

ii) Si $1 < p < \infty$, entonces existe una constante A_p, tal que

$$||S_\gamma(f)(\cdot,\alpha)||_{p,\gamma_d} \leq A_p \, ||f||_{p,\gamma_d}.$$

En su tesis de maestría, I. López [23] introduce, siguiendo el artículo de Wheeden y Segovia [56], referido al caso clásico, unas **funciones (espaciales) de Area Gaussianas de orden superior** $S^k_{\mathcal{S},\gamma}(\cdot,\alpha)$, que son generalizaciones de la función S_γ

$$\left(S^k_{\mathcal{S},\gamma} f(x,\alpha) = \int \int_{\Gamma_\gamma(x)} t^{2(k-1)} |\nabla^k_x P_t f(y)|^2 t (t^{-d} \vee |x|^d \vee 1) dy dt \right)^{1/2},$$

donde $k \geq 1$, $\Gamma_\gamma(x,\alpha)$ es el "cono gaussiano" de apertura $\alpha > 0$ y ∇^k_x es k-ésimo gradiente (en la variable espacial x), que se puede definir inductivamente (véase Stein [46]) o de la siguiente manera: sea $\beta = (\beta_1, ...\beta_k) \in \mathbb{N}^k$ con $1 \leq \beta_i \leq n$ para $i = 1, ..., n$ un multi-índice de orden k. Denotaremos por

$$\Lambda_k = \{\beta \in \mathbb{N}^k : \beta \text{ es multi-índice de orden } k\},$$

entonces Λ_k tiene n^k elementos y si $\partial_{\beta_i} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta_i}}$ y $\partial_\beta = \partial_{\beta_1} ... \partial_{\beta_k}$, definimos el gradiente de orden k para una función $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\nabla^k_x(h)(x) = \{(\partial_\beta h)(x)\}_{\beta \in \Lambda_k}.$$

Obsérvese que, para $k = 1$ $S^1_{\mathcal{S},\gamma}$ es menor o igual que la función S_γ definida por Forzani y Fabes.

Además, López prueba la continuidad en $L^p(d\gamma)$ de las S^k_γ probando la desigualdad puntual:

$$S^k_{\mathcal{S},\gamma} f(x, \alpha) \leq S^1_{\mathcal{S},\gamma} f(x, \beta),$$

$0 < \alpha < \beta$ y aplicando entonces el Teorema 8.3.

Respecto a la continuidad débil (1,1) respecto a γ_d se han hecho algunos progresos recientemente, véase [12].

Finalmente, una función clásica que todavía no tiene correlato en el caso Gaussiano es la función g^*_λ, la cual está definida como:

$$g^*_\lambda(x) = (\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{t}{|y| + t})^{\lambda d} |\nabla u(x - y, t)|^2 t^{1-d} dy\ dt)^{1/2}.$$

El problema radica en que el primer término dentro de la integral es una especie de familias de aproximaciones de la identidad convolucionadas con la integral de Poisson u. En el caso Gaussiano no está enteramente claro el sentido de dichas operaciones. Una posible definición, que parece natural de la hecha de la función de área para el caso Gaussiano, sugerida por Forzani, es la siguiente

$$g^*_{\gamma,\lambda}(x) = (\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\frac{(t \wedge \frac{1}{|x|} \wedge 1)}{|x - y| + (t \wedge \frac{1}{|x|} \wedge 1)})^{\lambda d} |\nabla P_t f(y)|^2 t\ (t^{-d} \vee |x|^d \vee 1) dy\ dt)^{1/2}. \tag{85}$$

Sin embargo, dicha función presenta problemas técnicos para tener las mismas propiedades que posee, en el caso clásico, la función respectiva.

9 Teoría de Multiplicadores para desarrollos de Hermite.

La Teoría de Multiplicadores es uno de los temas que todavía está por desarrollarse en el caso Gaussiano.

En primer lugar, definimos lo que es un **multiplicador para desarrollos de Hermite** . Para evitar problemas de convergencia, consideramos $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, el conjunto de los polinomios en d-variables. Luego

$$f = \sum_{k=0}^\infty J_k f = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha) \vec{h}_\alpha,$$

es en verdad una suma finita. Como ya hemos mencionado, los polinomios son densos en $L^p(\gamma_d)$ y, por tanto, es suficiente trabajar con ellos para definir los multiplicadores.

Dada la función $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definimos el multiplicador asociado a ϕ como:

$$T_\phi f = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) J_k f, \tag{86}$$

donde $f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_H(\alpha) \vec{h}_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} J_k f$.

Obsérvese que si ϕ es acotada, entones T_ϕ esta trivialmente acotada en $L^2(\gamma_d)$, así pues el problema básico es determinar las condiciones sobre ϕ para que T_ϕ tenga una extensión continua en $L^p(\gamma_d)$,$1 < p < \infty$, es decir,

$$||T_\phi(f)||_{p,\gamma_d} \leq C_p \, ||f||_{p,\gamma_d}.$$

Por otra parte, a diferencia del caso clásico, las integrales singulares respecto a la medida Gaussiana no son multiplicadores, por lo que en este contexto la Teoría de Multiplicadores es entonces más pobre. Sin embargo, como veremos más adelante, resultados de continuidad sobre integrales singulares se pueden obtener como consecuencia de teoremas de multiplicadores.

El primer resultado de esta teoría es el siguiente :

Teorema 9.1 *Si ϕ es la transformada de Laplace de una función en* $[0, \infty)$, *L^1-acotada, es decir si $\phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} a(s) ds$ con $\int_0^\infty |a(s)| ds < \infty$, entonces, T_ϕ admite una extensión continua en $L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$.*

El resultado más importante para esta teoría fue el obtenido por P.A. Meyer [28], haciendo uso fundamental de la propiedad hipercontractiva del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.

Teorema 9.2 *(Meyer) Si para algún n_0 tenemos que $\phi(k) = h(\frac{1}{k^\alpha})$, para $n \geq n_0$ y h es una función analítica alrededor de cero, entonces T_ϕ admite una extensión continua en $L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$.*

Diremos que un multiplicador T_ϕ es un **multiplicador de Meyer** si ϕ verifica la hipótesis del Teorema 9.2. En particular, obsérvese que los potenciales de Riesz son claramente multiplicadores de Meyer, ya que, en ese caso, $h(x) = x$, la cual es claramente analítica alrededor de cero.

Por otra parte, es claro que los multiplicadores de Meyer no son los únicos posibles multiplicadores para desarrollos de Hermite, es decir, la condición de Meyer no caracteriza a los multiplicadores. Como ejemplos inmediatos de multiplicadores que no son multiplicadores de Meyer, tenemos los semigrupos de Ornstein-Uhlenbeck, de Poisson-Hermite y sus derivados.

Como hemos mencionado anteriormente, la $L^p(\gamma_d)$-continuidad de las transformadas de Riesz de orden superior, se puede obtener como corolario del Teorema de Meyer de manera muy sencilla (véase [13]):

Corolario 9.1 *Las Transformadas de Riesz Gaussianas de orden superior $\mathcal{R}_\alpha$ son continuas en $L^p(\gamma_d)$, es decir, si $f \in L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$, entonces*

$$||\mathcal{R}_\alpha f||_{p,\gamma_d} \leq C_\alpha ||f||_{p,\gamma_d}. \tag{87}$$

Un resultado que falta en esta teoría es un teorema general de tipo Marcinkiewicz, en el que se den condiciones sobre los incrementos o derivadas de ϕ para garantizar la $L^p(\gamma_d)$-continuidad de T_ϕ. Hay varias razones para suponer que un resultado así, de existir, no puede ser trivial. En primer lugar, recordemos que las sumas parciales de desarrollos de Hermite no son $L^p(\gamma_d)$-continuas si $p \neq 2$, entonces, las condiciones de un tal teorema tendría que excluir a las sumas parciales como multiplicadores, cosa que no ocurre en el caso clásico. Por otra parte, aunque esto luce sólo como un detalle técnico, la demostración del resultado clásico usa precisamente la función g_λ^*, que como ya dijimos es desconocida en el caso Gaussiano.

La relación entre la Teoría de Multiplicadores para desarrollos de Hermite y la propiedad hipercontractiva del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es muy estrecha. El Teorema de Meyer, que como hemos visto es el resultado más importante de ella, es consecuencia casi inmediata de la hipercontractividad. Por otra parte, en su trascendente artículo W. Beckner [4], demostró, entre otras cosas, cómo la hipercontractividad del semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck es consecuencia de una desigualdad para multiplicadores de desarrollos de Hermite. De hecho lo que él prueba es la continuidad $L^p(\gamma_d)$ de los operadores T_t pero con $t = i\sqrt{p-1}$ imaginarios puros[2], cosa que, por cierto, está muy relacionada con la representación de Weissler [57] dada anteriormente. Además de lo interesante de esta prueba, que utiliza de manera decisiva el Teorema Central del Límite, Beckner deja claro la íntima relación entre al Análisis Armónico Clásico y el Gaussiano, dado que, por ejemplo, este resultado de multiplicadores le sirve para obtener la mejor constante en la desigualdad de Haussdorf-Young para la Transformada de Fourier.

Una sugerencia de B. Muckenhoupt, que todavía no ha sido explorada a plenitud es la obtención de teoremas de transplantes para el caso de desarrollos de Hermite, que puedan ser aplicados luego a teoremas sobre multiplicadores, tal y como él lo hace en su monografía [34]. Es de notar que, para teoremas de transplantes en este contexto, necesariamente hay que considerar polinomios de Hermite generalizados $\{H_n^\mu\}$.

10 Problemas abiertos.

Como queda claro de la exposición anterior, el desarrollo del Análisis Armónico Gaussiano es todavía muy fragmentario, quedando muchos problemas impor-

[2] En su tesis de maestría, A. Infante [22] hace un estudio detallado de estos resultados de Beckner.

tantes por resolver. Podemos mencionar, entre otros, los siguientes:

Espacios de Hardy $\mathbb{H}^p_{\gamma_d}$, respecto a la medida Gaussiana γ_d.

Aunque en el artículo de Muckenhoupt de 1969 se cita que con la introducción de las nociones de integral de Poisson-Hermite y de función conjugada están las bases para una teoría de espacios $\mathbb{H}^p$ para los desarrollos de Hermite, muy poco se ha hecho en esa dirección. Hay problemas técnicos importantes allí como el hecho que la desigualdad de subarmonicidad no es cierta.

Es posible que una teoría para el caso $1 < p < \infty$ se pueda desarrollar usando la función de área S_γ. El caso $0 < p \leq 1$ está totalmente abierto.

Finalmente el caso $d = 1$ y $p = 1$ ha sido investigado recientemente por L. Forzani y R. Scotto [11], usando **descomposición atómica**.

Espacios de Oscilación Media Acotada BMO_{γ_d}, respecto a la medida Gaussiana γ_d.

Para definir un espacio BMO_{γ_d}, un primer punto de vista es considerar una **función maximal aguda gaussiana** $f^{\#}_{\gamma_d}$ para, a partir de allí, definir dicho espacio. Ahora bien, dada la problemática que existe con las funciones maximales de Hardy -Littlewood no centradas, pareciera natural definir $f^{\#}_{\gamma_d}$ como

$$f^{\#}_{\gamma_d} = \sup_{Q(x)} \frac{1}{\gamma_d(Q(x))} \int_{Q(x)} |f(y) - f^{\gamma_d}_{Q(x)}|\gamma_d(dy), \tag{88}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los cubos $Q(x)$ centrados en x y

$$f^{\gamma_d}_{Q(x)} = \frac{1}{\gamma_d(Q(x))} \int_{Q(x)} |f(y)|\gamma_d(dy).$$

Podemos definir ahora

$$BMO_{\gamma_d} = \{f \in L^1_{loc}(\gamma_d) : f^{\#}_{\gamma_d} \in L^\infty(\gamma_d)\}, \tag{89}$$

con la seminorma $||f||_{\#} = ||f^{\#}_{\gamma_d}||_{\infty,\gamma_d}$.

Uno podría considerar alternativamente, una función maximal aguda gaussiana del tipo de los operadores maximales gaussianos estudiadas por L. Forzani [8]. Esta alternativa no ha sido explorada suficientemente.

Finalmente, se podría considerar otra posible definición de BMO_{γ_d}, siguiendo la sugerencia de O. Blasco, de la Universidad de Valencia, como en el caso clásico, mediante el uso de la integral de Poisson-Hermite. Un problema abierto es ver si estas diferentes definiciones coinciden.

Estructura de convolución para desarrollos de Hermite.

Una pregunta que se puede hacer en este contexto, formulada también por O. Blasco, es si no existe una estructura de convolución de forma tal que el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck o el de Poisson-Hermite se obtengan mediante dicha convolución.

Esta pregunta es, en cierto sentido, muy natural por los desarrollos clásicos de polinomios ortogonales y funciones especiales (véase G. N. Watson [55]) y tiene una larga historia a partir de los primeros resultados obtenidos para los polinomios ultraesféricos.

C. Markett obtuvo, en 1993 [24], una estructura de convolución para polinomios de Hermite generalizados $\{H_n^\mu\}$, en donde los polinomios de Hermite son el caso $\mu = 0$. Sin embargo, esta noción es problemática dado que el operador de traslación no es positivo, y sólo es adecuada para el caso de $\mu \geq 1/2$ cuando es quasi-positivo en el sentido de Gasper y tiene estimaciones adecuadas en norma. Así el caso $\mu = 0$ es un caso singular por lo que aparentemente no sería de mayor utilidad en las aplicaciones que nos interesarían, como sería por ejemplo el expresar multiplicadores como convoluciones. Queda abierta la posibilidad de mejorar las estimaciones de Markett de forma de obtener una noción de convolución para los polinomios de Hermite más adecuada y útil, por ejemplo, para el estudio de la Teoría de Multiplicadores.

Referencias

[1] Adams, R. & Clarke, F. *Gross' Logarithmic Sobolev inequality: a simple proof.* Amer. J. Math. 101 (1979) 1265-1269.

[2] Askey, R. *Orthogonal Polynomials and Special Functions.* Regional Conf in Appied Math. 21 SIAM (1975).

[3] Askey, R. & Wainger, S. *Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series.* Amer. J. Math. 87 (1965) 695-708.

[4] Beckner. W *Inequalities in Fourier Analysis.* Ann. Math. 102 (1975) 159-182.

[5] Calderón, C. *Some remarks on the multiple Weirstrass Transform and Abel summability of multiple Fourier-Hermite series.* Studia Math. 32 (1969) 119-148.

[6] Fabes, E., Gutiérrez, C. & Scotto,R. *Weak-type estimates for the Riesz transforms associated with the Gaussian measure.* Rev. Mat. Iber. 10 (1994) 229-281.

[7] Forzani, L. *Lemas de cubrimiento de tipo Besicovitch y su aplicación al estudio del operador maximal de Ornstein-Uhlenbeck.* Tesis de Doctorado. Universidad Nacional de San Luis. Argentina (1993).

[8] Forzani, L. *Aproximaciones de la identidad Gaussianas.* Enviado a publicación.

[9] Forzani, L. & Fabes, E. *Manuscrito no publicado.*

[10] Forzani, L. & Scotto, R. *The higher order Riesz Transforms for the Gaussian measure need not be weak type (1,1).* Por aparecer en Studia Mathematica.

[11] Forzani, L. & Scotto, R. *Comunicación personal.*

[12] Forzani, L., Scotto, R. & Urbina,W. *Manuscrito en preparación.*

[13] Forzani, L., Scotto, R. & Urbina,W. *A simpler proof of the L^p continuity of the higer order Riesz Transform with respect to the Gaussian measure* γ_d. Enviado a publicación.

[14] Forzani, L. & Urbina,W. *Poisson-Hermite representation of solutions of the equation* $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)+\Delta_x u(x,t)-2x\cdot\nabla_x u(x,t)=0$. Enviado a publicación.

[15] Garcia-Cuerva, J., Mauceri, G., Sögren, P.& Torrea, J.L. *Higher-order Riesz operators for the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.* Preprint 1996-34, Dept. of Math., Chalmers Univ. of Techn and Univ. of Göteborg. Aceptado para publicación en Potential Analysis.

[16] Gross, L. *Logarithmic Sobolev inequalities.* Amer. J. Math. 97 (1976) 1061-1083.

[17] Gundy, R. *Sur les Transformations de Riesz pour le semigroup d'Ornstein-Uhlenbeck.* C.R. Acad. Sci. 303 (série I) (1986) 967-970.

[18] Gutiérrez, C. *On the Riesz transforms for the Gaussian measure.* J. Func. Anal. 120 (1) (1994) 107-134.

[19] Gutiérrez, C., Segovia, C.& Torrea, J. L. *On higher Riesz transforms for the Gaussian measure.* J. Fourier Anal. Appl. Vol 2 #6 (1996) 583-596.

[20] Gutiérrez, C. & Urbina, W. *Estimates for the maximal operator of the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.* Proc. Amer. Math. Soc.113 (1991) 99-104.

[21] Hille, E. *A class of reciprocal functions.* Ann. Math. 27 (1926) 426-464.

[22] Infante, A. *Sobre Expansiones de Hermite.* Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias UCV. (1992)

[23] López, I.*Teoría de Littlewood-Paley para la medida Gaussiana.* Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias UCV.(1998).

[24] Markett, C. *The Product Formula and Convolution Structure associated with generalized Hermite Polynomials.* Journ. of Approx. Theory. 73 (1993), 199-217.

[25] Menárguez, T., Pérez, S. & Soria, F. *Some remarks on Harmonic Analysis with respecto to the Gaussian measure.* Manuscrito no publicado (1995).

[26] Meyer, P. A. *Quelques resultats analytiques sur le semigruop d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie.* Lectures Notes in Contr. and Inform. Sci. 49 (1983) Springer-Verlag 201-214.

[27] Meyer, P. A. *Démostration probabiliste de certains inéqualités de Littlewood-Paley.* Lectures Notes in Math 511 (1976) Springer-Verlag 125-183.

[28] Meyer, P. A. *Transformations de Riesz pour les lois Gaussiens.* Lectures Notes in Math 1059 (1984) Springer-Verlag 179-193.

[29] Morán, M. D. & Urbina, W. *Some properties of the Gaussian Hilbert Transform.* Aceptado para ser publicado en Acta Científica Venezolana.

[30] Muckenhoupt, B. *Poisson Integrals for Hermite and Laguerre expansion.* Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969) 231-242.

[31] Muckenhoupt, B. *Hermite conjugate expansions.* Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969) 243-260.

[32] Muckenhoupt, B. *Mean Convergence of Hermite and Laguerre Series I.* Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970) 419-431.

[33] Muckenhoupt, B. *Mean Convergence of Hermite and Laguerre Series II.* Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970) 433-460.

[34] Muckenhoupt, B. *Transplantation theorems and multiplier theorems for Jacobi series.* Memoirs Amer. Math. Soc. 356 Providence (1986).

[35] Muckenhoupt, B. & Stein, E.M. *Classical Expansions.* Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1965) 17-92.

[36] Nikol'skii, N.K. *Treatise on the Shift Operator: Spectral Function Theory.* Springer-Verlag. Berlin (1986).

[37] Pérez, S. *Estimaciones puntuales y en la norma para operadores relacionados con el semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, 1996.

[38] Pisier, G. *Riesz Transform: a simpler analytic proof of P. A. Meyer inequality.* Lectures Notes in Math 1321. Springer-Verlag (1988) 485-501.

[39] Pollard, H. *Mean Convergence of Orthogonal Series I.* Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947) 433-460.

[40] Pollard, H. *Mean Convergence of Orthogonal Series II.* Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 355-367.

[41] Scotto, R. *Weak type estimates for Singular Integral operators associated with the Ornstein-Uhlenbeck process.* Tesis de Doctorado. Universidad de Minnesota.(1993)

[42] Scotto, R. *The Littlewood-Paley g-function associated with the Ornstein-Uhlenbeck process.* Preprint.

[43] Sjögren, P. *A remark on the maximal function for measures in R^n.* Amer. J. Math. 105 (1983) 1231-1233.

[44] Sjögren, P. *On the maximal function for the Mehler kernel.* Lectures Notes in Math 992. Springer-Verlag (1983) 73-82.

[45] Sjögren, P. *Operators associated with the Hermite semigroup-a survey.* Preprint, por aparecer en J. Fourier Anal. Appl.

[46] Stein, E.M. *Singular Integrals and differenciability properties of functions.* Princeton Univ. Press. Princeton (1970) .

[47] Stein, E.M. *Topics in Harmonic Analysis related to the Littlewood-Paley Theory.* Princeton Univ. Press. Princeton (1970).

[48] Szegö, G. *Orthogonal polinomials.* Colloq. Publ. 23. Amer. Math. Soc. Providence (1959).

[49] Stroock, D.W. *Notes on Malliavin Calculus.* Manuscrito no publicado.

[50] Thangavelu, S. *Lectures on Hermite and Laguerre Expansions.* Princeton Univ. Press. Princeton (1993).

[51] Urbina, W. *Singular Integrals with respect to the Gaussian measure.* Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Science. Serie IV Vol XVIII, 4 (1990) 531-567.

[52] Urbina, W. *La Transformada de Riesz para la Medida Guassiana.* Notas de Matemáticas 115. Departamento de Matemática, ULA (1991).

[53] Urbina, W. *Elementos de Análisis Armónico Gaussiano.* Trabajo de Ascenso. Facultad de Ciencias UCV (1992).

[54] Urbina, W. *Análisis Armónico Gaussiano: una visión panorámica.* Trabajo de Ascenso. Facultad de Ciencias UCV (1998).

[55] Watson, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed. Cambridge Univ. Press. Cambridge (1980).

[56] Wheeden, R & Segovia, C. *On certain fractional area integrals.* Journ of Math and Mech. 19 (1969) 247-262.

[57] Weissler, F. *Two-point Inequalities, the Hermite Semigroup, and the Gauss-Weierstrass Semigroup.* J. Funct. Anal. 32 (1979) 102-121.

[58] Zygmund, A. *Trigonometric Series.* 2nd. ed. Cambridge Univ. Press. Cambridge (1959).