

40 Años de Probabilidad en Venezuela*

José R. León

Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

En marzo de 1958 el rector Francisco De Venanzi crea la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. Esta gran iniciativa fue precedida por la fundación del centro de Ciencias en la Facultad de Ingeniería donde, al comienzo de la década del cincuenta, algunos estudiantes en Biología y Matemáticas ya se encontraban haciendo allí su licenciatura.

La actividad Matemática en Venezuela se limitaba a la enseñanza impartida en las Facultades de Ingeniería: en la Universidad de Los Andes y en la Universidad Central de Venezuela. Algunos pioneros de esta disciplina y de su investigación que podemos recordar son: Francisco J. Duarte, Raimundo Chela, al profesor Zavrotsky, además de algunos profesores españoles emigrados después de la guerra civil española. Dentro de este último grupo debo recordar a los profesores Palacios Gros y Aldanondo; tuve la suerte de haber sido alumno del profesor Aldanondo en el curso de Análisis IV, en la Facultad de Ingeniería de la U.C.V. donde aprendí los rudimentos de la Geometría Diferencial.

Como podemos ver la actividad era escasa y la creación de la Facultad de Ciencias, y de la Escuela de Física y Matemática en particular, inauguraba un ambiente favorable para el estudio y la investigación en nuestra disciplina.

No tenemos información de la práctica y enseñanza de la Probabilidad y Estadística Matemática en la recién creada Escuela. No obstante, debemos mencionar la fundación de la Escuela de Estadística en la Facultad de Economía (como se llamaba para esa época) a comienzos de la década del cincuenta. Escuché, en una conferencia dictada recientemente en esa Escuela por Héctor Silva Michelena, que también para su fundación contó con la colaboración de destacados estadísticos españoles, entre los que se encontraba el catedrático Sixto Ríos.

El primer hecho tangible que da cuenta de la investigación en Probabilidad en Venezuela, tiene que ver con el regreso de Luis Báez Duarte al país, luego de terminar sus estudios de doctorado en los Estados Unidos. Su primer trabajo, publicado en 1968 en *Journal of Mathematical Analysis and its Applications* lle-

*Conferencia pronunciada en las XII Jornadas de Matemática, Facultad de Ciencias, U.C.V., Caracas, 23 al 26 de marzo de 1999

va el título de “Another Look at the Martingale Theorem” y en ese artículo su autor demuestra que el teorema de Doob sobre la convergencia puntual de martingalas acotadas en L^1 , puede obtenerse a través de una desigualdad maximal, como es el caso de otras teorías de convergencia: series ortogonales y teoremas ergódicos. La simplificación que él obtiene en este trabajo evita tener que trabajar con las desigualdades de cruces hacia arriba. Debo decir que el Profesor Báez Duarte, sobrino del ya mencionado Francisco J. Duarte, fue el primer becario de postgrado, para estudiar matemática, del recién creado Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la U.C.V. No dura mucho tiempo Luis en esta universidad, luego de su corta estadía es llamado a fundar el Departamento de Matemática del IVIC. Ya radicado allí publica dos otros artículos: uno intitulado “ $C(X)^*$ and Kolmogorov’s Consistency Theorem for Cantor Spaces” en 1970 (*Studies in Applied Mathematics*) y otro titulado “On the convergence of Martingale Transforms” en 1971 (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*) donde aborda con suma sencillez el Teorema de Bukholder sobre la convergencia de la “Martingala Transformada”. Demuestra, siguiendo el esquema antes mencionado de operadores maximales, la relación que existe entre el operador maximal para la Martingala Transformada y su convergencia casi segura.

La actividad que genera Luis Báez Duarte en el IVIC, invitando estudiantes y preparándolos, para luego enviarlos al exterior, tuvo una profunda repercusión en la investigación en Matemática en general y en la Teoría de Probabilidad en particular.

Un poco más tarde, en el año 74, se incorporan a nuestra Escuela de Física y Matemática Henryk Gzyl y Cristina Betz. Ambos acababan de terminar un doctorado en Matemática con R. Getoor, para la época, la autoridad norteamericana de la teoría general de procesos, desarrollada en Francia por P.A. Meyer y Claude Delacherie, para el contacto inicial de estos dos profesores y la Universidad de California San Diego donde estudiaron, contaron con la preciosa colaboración del profesor Báez Duarte. La teoría general de procesos englobaba, con un estilo algo Bourbakista, los intentos de formulación de la teoría de la integración estocástica (con su botánica de sigma álgebras: los previsibles, adaptados, etc.) y los refinamientos ligados a tiempos de paradas, previsibilidad, tiempos locales y su distribución, soporte de funcionales. Es cierto que para la década del setenta ese núcleo de conocimiento era emblemático del estudio de la Probabilidad en Francia. Publican conjuntamente dos artículos: “On entrance-exit distributions of Markov processes” (*Journal of Applied Prob.* 1978) y “Occupation time sets of supports of continuous additive functionals” (*Ann. Inst. Henri Poincare*, 1979). Otro artículo de esta época digno de mención, es “Infinitesimal generators of time changed proceses” (*Ann. of Prob.* 1980). Henryk, por su parte, siempre ha compartido su afición por las probabilidades con su otra pasión: la Física Matemática. Una incorporación de grato recuerdo fue la de Margarita Olivares, quien venía de realizar sus estudios doc-

torales en el Laboratoire des Probabilités de la Universidad Pierre et Marie Curie de París.

A finales de los años sesenta llega a Venezuela, proveniente de Cataluña, Evarist Giné quien es contratado como profesor en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo. Con la curiosidad que lo caracteriza, decide trasladarse al IVIC en busca de temas de investigación y allí lo recibe Luis Báez. Comienza Evarist a formarse en Probabilidad y consigue una beca del Conicit, para realizar estudios de doctorado bajo la dirección de Richard Dudley en el MIT. El profesor Dudley estudiaba el problema de dar condiciones suficientes para el viejo problema planteado por Kolmogorov: la continuidad de los procesos Gaussianos y también comenzaba a crear su teoría de procesos empíricos. Es este ambiente pleno de ideas el que encuentra Evarist en el MIT. Una digresión. Como mencionó Carlos Matrán en su extraordinaria conferencia de estas jornadas, en 1951 Donsker había dado una formulación a la heurística de Doob: El proceso empírico formado con una muestra aleatoria simple converge, en el sentido de medidas definidas en un espacio métrico, en este caso el espacio de las funciones continuas, a una medida Gaussiana definida también en este espacio, y el proceso límite resulta ser el Puente Browniano. Este teorema aunado al Teorema de Prohorov, que caracteriza la compacidad de una sucesión de medidas en un espacio métrico, pusieron de relieve la importancia para la teoría de la probabilidad de trabajar en espacios de dimensión infinita. Empezaba así a desarrollarse desde la década del sesenta la probabilidad en los espacios de Banach.

Evarist Giné rápidamente da muestra de su calidad como matemático, publicando dos artículos con resultados parciales de su tesis de doctorado: el primero en 1974 “On the Central Limit Theorem for Sample Continuous Proceses” (*Annals of Probability*, 1974) y el segundo, referencia obligada en los estudios de estadística no paramétrica en el círculo, la esfera, el plano proyectivo y otras variedades Riemannianas: “Invariant tests for uniformity on Compact Riemannian Manifolds based on Sobolev Norms” (*Ann. of Statis.* 1975). En el primer artículo se demuestra el Teorema Central del Límite (TCL) para una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas a valores en $C(S)$ (procesos con trayectorias continuas definidas en S), la novedad de este trabajo consiste en que las condiciones suficientes para la validez del TCL se basan en el módulo de continuidad del proceso con valores en $C(S)$ y se expresan en términos de la entropía métrica que, como ya habíamos mencionado, fueron usadas por Dudley para garantizar la continuidad del proceso Gaussiano límite. La importancia de este artículo radica en que es uno de los trabajos pioneros en TCL en espacios de Banach; en estos espacios y a partir de la construcción del Movimiento Browniano, en la década de los veinte por Wiener, surgen una serie de preguntas. ¿En cuáles de estos espacios se verifica la Ley Fuerte de los Grandes Números, en cuáles el TCL, la Ley del Logaritmo Iterado? La respuesta

a estas preguntas dista mucho de ser trivial. En espacios de Hilbert y por el Teorema de Minlos-Sazonov se dieron condiciones necesarias y suficientes para que una variable aleatoria con valores en estos espacios verificara todos los teoremas anteriores, correspondiendo a Varadhan (en 1958) dar una demostración del TCL y de la Fórmula de Levy-Kintchine para arreglos triangulares de sumas de variables aleatorias independientes. La condición de compacidad de medidas está ligada, en el caso de espacios de Hilbert, a la topología inducida por los operadores de Hilbert-Schmidt. En la década de los setenta y con la aparición del Seminario de la École Polytechnique “Maruey-Pisier-Schwartz”, algunas interrogantes sobre la relación entre geometría de Espacios de Banach y cuestiones relacionadas con la verificación o no de los teoremas anteriores comenzaron a ser respondidas. Apareció la división de los Espacios de Banach en “tipo” y “cotipo”, se construyeron contraejemplos interesantes de espacios en donde la no verificación del Teorema del Logaritmo Iterado constituye una propiedad intrínseca del espacio, etc. Así, dentro de ese marco mundial Giné empieza su carrera de éxitos rutilantes. El otro artículo de su tesis es el de pruebas de bondad de ajuste en variedades Riemannianas compactas. Trata al proceso empírico construido con variables aleatorias, que toman valores en una tal variedad, como una sucesión de variables aleatorias a valores en $C(B)$, siendo B la bola unitaria de un espacio de Sobolev, construido con respecto a la base de autofunciones del operador de Laplace-Beltrami de la variedad. El gran despliegue técnico y la invarianza de los estadísticos así definidos, con respecto al grupo de transformaciones de la variedad, lo hacen un artículo insustituible en la aplicación de la teoría general de los procesos empíricos.

En el año 1975 y por el impulso de Giné y Báez Duarte se crea en el IVIC la maestría en Matemáticas Aplicables. Ingresan en su primera edición tres alumnos: Pedro Alson, José R. León y Consuelo Maulino. Los dos primeros se dedican a la Probabilidad y la Estadística, Consuelo finaliza después un doctorado en Análisis Numérico. Con motivo de la necesidad de contar con un plantel amplio de profesores, Giné invita a trabajar en el IVIC a Alejandro de Acosta, matemático argentino, también especialista en Probabilidad en espacios de Banach, quien con Giné va a comenzar una fructífera relación que durará por seis años. El trabajo más importante producto de esta relación es, a mi parecer, “On Poisson measure, Gaussian measures and the Central Limit theorem in Banach spaces” (Advances in Probability Vol. IV 1978, siendo también coautor Aloisio Araujo). El profesor de Acosta dirigió la tesis de maestría de Wilfredo Urbina, en el marco del postgrado de matemáticas de la Universidad Central, que versaba sobre la Ley del Logaritmo Iterado para una sucesión a dos índices y también la tesis de doctorado de Jorge Samur, esta vez dentro del postgrado del IVIC, sobre TCL para arreglos triangulares de sucesiones de variables aleatorias que muestran un tipo de dependencia conocida como ϕ -mixing. La caracterización de la convergencia de arreglos triangulares, de variables dependientes, a

leyes infinitamente divisibles que él demuestra en su tesis todavía no ha sido superada.

Estamos en el 76. El experimento peronista argentino hace aguas, Uruguay está tomado por una dictadura militar y los matemáticos de este pequeño país, exilados a Argentina, comienzan a ser perseguidos. En este sombrío contexto la Simón Bolívar ofrece trabajo, como en la década anterior lo había hecho la Universidad Central, a algunos de estos matemáticos. Entre ellos se encuentran Mario Wschebor, quien llega al país en 1976, y Enrique Cabaña, con nosotros un año después. Ambos habían sido formados en la escuela uruguaya por matemáticos de renombre como José Luis Massera (preso en aquel entonces por la dictadura) y Rafael Laguardia.

Desde su llegada y por la tradición del Instituto de Matemática de la Facultad de Ingeniería de su país, proponen la creación de un seminario conjunto IVIC-UCV-USB de Probabilidad y Estadística Matemática. En ese seminario participamos por casi 6 años los dos profesores mencionados, Margarita Olivares, Emiro Molina, Joaquín Ortega, Salomón Benzaquén, Benjamín Sagalovsky, Ileana Iribarren, Glaysar Castro, Luis Raúl Pericchi, Alejandro de Acosta, Evarist Giné, Wilfredo Urbina, José R. León y otros. Los temas de discusión eran variados pero se centraban, fundamentalmente, en estadística no paramétrica, procesos Gaussianos, distribución de algunos funcionales ligados a pruebas no paramétricas, procesos empíricos, etc.

En la USB, Cabaña-Wschebor continúan el trabajo conjunto que habían venido realizando desde el Uruguay. Publican algunos trabajos relativos a obtener cotas de la distribución del supremo de procesos Gaussianos estacionarios, por una técnica de inmersión que consiste, a grosso modo, en ver al proceso Gaussiano como una sección de la Hoja Browniana y utilizar cotas para la distribución del supremo de este campo y así obtener resultados para el supremo del proceso sumergido. Dentro de los trabajos en colaboración es importante mencionar uno de gran trascendencia: “The Two-Parameter Brownian Bridge: Kolmogorov Inequalities and Upper and Lower Bounds for the Distribution of the Supremum” (Annals of Probability, 1982). Este trabajo es de una singular complejidad técnica, reveladora de las dotes de ambos autores, y en él se usa una desigualdad diferencial, encontrada por Cabaña en 1979, verificada por el supremo del Puente Browniano a dos parámetros. Se resuelve la inecuación en derivadas parciales, con técnicas difíciles surgidas en buena parte del estudio de la ecuación del calor y las soluciones integradas permiten dar cotas inferiores y superiores para la distribución del supremo de la Hoja Browniana. Quisiera resaltar aquí que esta distribución todavía no se conoce; su conocimiento exacto, si es posible, sería, a mi entender, un paso muy importante en la teoría de procesos a varios parámetros. Luego de esta fructífera colaboración, ambos investigadores deciden, cada uno por su cuenta, trabajar en la obtención de Fórmulas de Rice para procesos con parámetros multidimensionales. Para

entender mejor de lo que hablo permítanme remitirme a la situación cuando el parámetro es unidimensional, el tiempo. Rice, en los años cuarenta, había obtenido la fórmula para la esperanza del número de cruces de un proceso regular (con una derivada continua); también en el libro de Cramer-Ledbetter se habían demostrado fórmulas similares para los momentos de orden superior del número de cruces. La situación para campos (procesos a parámetro multidimensional) había sido solamente atacada en un artículo de Ingeniería de Longuet-Higgins (Cambridge Phil. Trans. 1959) dedicado al modelo aleatorio de las olas. Cabaña conjuntamente con S. Benzaquén, publican el artículo "The expected measure of the level set of a regular stationary gaussian process" (Pacific Jour. of Math. 1982) en el cual se establece por primera vez una fórmula de Rice, para la longitud de la curva de nivel de un campo a parámetro d -dimensional. Más tarde Mario Wschebor introduce, con miras a quitarle restricciones al tipo de procesos para los cuales se verifican tales fórmulas, las medidas de DiGiorgi y de esta manera logra generalizar la Fórmula de Cabaña y Benzaquén, además de obtener formulas tipo Rice para los momentos de orden superior. Todos estos resultados se encuentran desarrollados en el Lecture Notes in Mathematics No. 1147. Cabaña, por su parte, sigue trabajando y en los resúmenes del segundo Clapem, que tuvo lugar en Caracas en julio de 1985, publica un trabajo sobre estos temas con un método de cartas locales que es más y menos general que el trabajo de Wschebor, lamentablemente este trabajo ha tenido muy poca difusión en la comunidad científica mundial.

Una palabra para el postgrado de Matemática de la UCV. En 1977 un grupo de pioneros donde se destacaban: el profesor Chela Flores, A. Reyes, H. Gzyl, D. Flores, M. Cotlar, C. Finol, G. Cámara, D. Crepín, G. Miranda entre otros, decide la creación del postgrado de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV. En este postgrado pronto surgen la Probabilidad y la Estadística Matemática como áreas básicas. Además del personal de planta de la Facultad contamos con la valiosa colaboración de M. Wschebor, E. Cabaña, A. de Acosta, L. R. Pericchi. Pronto se empezaron a presentar trabajos de grado en esta disciplinas. Destacando dentro de las primeras tesis en el área: José R. León, Wilfredo Urbina, Ileana Iribarren, Marisela Domínguez. Hoy contamos con un número considerable de tesis de Maestría y Doctorado, se ha trabajado de manera conjunta con lo que se llama actualmente el CESMA, que fue el grupo de Probabilidad y Estadística Matemática de la USB y con casi todo el personal del Departamento de Matemáticas del IVIC.

Entramos en los ochenta y empiezan ya a incorporarse a las actividades de investigación y formación, aquellos investigadores que salieron a estudiar al exterior o hicieron su formación en el país. Dentro de este grupo permítanme mencionar a Joaquín Ortega, mi eterno colaborador. Joaquín empezó sus estudios, como muchos de los matemáticos de Venezuela, en la Facultad de Ingeniería, proverbial por la dificultad de sus cursos de matemática. Al igual que todos

los otros estudiantes nos sorprendió el allanamiento de Rafael Caldera y decidió irse a Londres a estudiar. Se doctoró en el Imperial College. Allí realizó una tesis sobre el estudio fino de las trayectorias de los procesos Gaussianos. Quien haya leído sus trabajos, y yo creo ser testigo de excepción, se puede dar cuenta de la finura de sus cálculos lo que me hace considerarlo como el más húngaro de nuestros probabilistas. A él se le deben los primeros estudios en Venezuela de las propiedades del Movimiento Browniano fraccionario; en la época en que él lo estudió este proceso no era tan famoso como lo es ahora, debido a su inclusión en todas las ramas de la aplicación: hidrología, mercados financieros, modelaje del consumo de la electricidad, imágenes, etc. Estudia propiedades asintóticas de sus incrementos y desigualdades finas para la distribución del supremo. Sus trabajos son referencia obligatoria cuando se trata de comprender propiedades de estos procesos y sus profundas diferencias con el Movimiento Browniano “tout court”. Luego de estas incursiones Joaquín consiente en trabajar conjuntamente conmigo, pero eso es harina de otro costal.

Mención especial merece el grupo de Probabilidad y Estadística de la Universidad Simón Bolívar, convertido ahora en el CESMA. Aunque he hablado fundamentalmente de Probabilidad, Luis Raúl Pericchi desarrolló allí desde su llegada, después de terminar su doctorado en Inglaterra, una intensa labor y hoy en día él es considerado una autoridad mundial en Estadística Bayesiana. Del lado de la probabilidad la U.S.B. recibió en la década del setenta a José Luis Palacios quién, además de estudiar problemas probabilísticos ligados al estudio de grafos, siempre con una mirada original, y de una dificultad combinatoria considerable, se ha dedicado también con bastante éxito a la literatura. Ya mencioné a Emiro Molina, quien es el representante de la estadística clásica en la cuna venezolana del Bayesianismo. Adolfo Quiroz, también en el CESMA, constituye el continuador en Venezuela de la tradición dejada por Giné del estudio de procesos empíricos. Sus trabajos sobre la aplicación de toda esta tecnología a problemas de interés práctico son importantes. Sus pruebas de Gaussianidad, sus estadísticos multidimensionales tipo Kolmogorov y el estudio de modelos lineales dan cuenta de una carrera muy promisoriosa y que tiene mucho que dar todavía.

Quisiera cerrar esta charla con los nuevos miembros de esta comunidad, quedará con ellas o ellos la deuda de desarrollar un poco mejor y con más detalle, en otra oportunidad, los aspectos básicos de su trabajo.

Dentro de los alumnos de E. Cabaña destacan: Ileana Iribarren, María Victoria Sánchez de Naranjo, profesora de la ULA, y Stella Brassesco. Ileana desarrolla en su tesis TCL para funcionales de nivel de procesos a multiíndice. Sus técnicas, además de usar con eficiencia los cálculos de momentos descubiertos por Cabaña-Wschebor, usan también los TCL para variables aleatorias mixing (con dependencia débil) y para esto se sirvió de la importante relación que surgió, luego de 1983, con la Universidad de Orsay. María Victoria quien hace

su tesis de Maestría sobre la estimación de la anisotropía de campos Gaussianos; luego de su ida a Mérida define la integral estocástica de Ito-Wiener para procesos vectoriales, generalizando trabajos previos de Taqqu-Major-Dobrushin, obteniendo con gran eficacia Teoremas Centrales y no Centrales para estos procesos. Stella, luego de terminar su trabajo de tesis de licenciatura con E. Cabaña, va a estudiar al IMPA bajo la dirección de María Eulalia Vares, donde considera procesos que son soluciones de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas, que modelan fenómenos muy interesantes de la Física Matemática. En sus trabajos hay un gran despliegue técnico y allí se generalizan a este tipo de situaciones la teoría de Friedlin-Venzel. Marisela Domínguez hace su doctorado en la Universidad Central de Venezuela trabajando en el área que establece la relación entre Probabilidad y Análisis Armónico. En particular logra resolver problemas difíciles sobre la determinación de la velocidad de convergencia a cero del coeficiente de α -mixing de procesos Gaussianos a parámetro continuo y de procesos vectoriales. Publica varios artículos dedicados a estos temas. Mención especial merecen Alejandra Cabaña y sus pruebas de Kolmogorov-Smirnov optimizadas y Careen Ludeña con su aproximación a la estadística bajo hipótesis de dependencia fuerte. Raúl Jiménez comienza su carrera interesándose en soluciones por métodos probabilísticos de la ecuación de onda. Obtiene resultados muy interesantes que ligan las soluciones de estas ecuaciones hiperbólicas con el cálculo estocástico. Lamentablemente quizás se retira demasiado pronto de esta línea de investigación y se dedica con igual éxito a la teoría de la entropía y de otras funcionales de sumo interés en estadística no paramétrica. Ricardo Ríos, luego de completar su tesis en Orsay se concentra en estudiar y a comprender todas las nuevas derivaciones de la estadística no paramétrica bajo hipótesis de dependencia débil.

El tema de toda conferencia es arbitrario y este no tiene por que ser la excepción. Los asuntos tratados y las historias relatadas, están profundamente influenciadas por la experiencia vivida por el autor. Ausencias hay, no obstante debo decir que ninguna ha sido voluntaria. Mi interés es el de haber producido en alguno de ustedes la suficiente curiosidad sobre esta hermosa saga, para producir un trabajo mucho más completo y sin las omisiones de las que esta conferencia padece.