Fibrados Vectoriales, Elipticidad y Teorema del Indice

Gerardo A. Mendoza*
Department of Mathematics, Temple University,
Philadelphia, PA 19122, U.S.A.
gmendoza@math.temple.edu

Resumen

Una introducción a fibrados vectoriales, clase y carácter de Chern y el Teorema del Indice de Atiyah-Singer, aplicados a la determinación de condiciones necesarias para la existencia de operadores pseudodiferenciales elípticos entre fibrados dados, y el cómputo del índice de algunos de tales operadores.

1 Introducción

Estas notas son una introducción a los temas que forman el título, aplicados al problema de la existencia de isomorfismos entre ciertos fibrados vectoriales y el cálculo del índice de algunos operadores elípticos via el Teorema del Indice de Atiyah-Singer. Estas aplicaciones representan una parte de resultados obtenidos en colaboración con Howard Jacobowitz, presentados en [9]. La pregunta que nos planteamos fue la siguiente: dada una variedad compacta $\mathcal{M}$ y fibrados vectoriales complejos E, $F \to \mathcal{M}$ con fibras de la misma dimensión, ¿existe un operador (pseudo)diferencial P lineal elíptico de secciones de E en secciones de F? La respuesta es generalmente *no*.

Describir nuestros resultados requiere ingredientes de diversas áreas que expondré a lo largo de este artículo, entrelazándolos con nuestros resultados. El resto de esta introducción presenta el contexto necesario para describir completamente el problema. En la Sección 2 nos ocuparemos de ejemplos de fibrados vectoriales de rango 1 sobre S^2. La idea es tener algunos casos concretos en la mano, ilustrando a la vez la idea de fibrado vectorial (definido en esta introducción). En la Sección 3 presentamos un número de ejemplos de operadores

*Agradezco a los organizadores de las XIV Jornadas de Matemáticas su amable invitación al evento, y a la Fundación Polar el financiamiento de mi visita.

diferenciales elípticos entre fibrados de rango 1 sobre una variedad compacta orientable de dimensión 2 (una superficie de Riemann). La Sección 4 presenta una primera condición necesaria para la existencia de un operador elíptico entre dos fibrados dados, en términos de las clases características de Chern, también definidas en esa sección. En la Sección 5 analizamos fibrados de rango 1 y probamos que la condición obtenida en la Sección 4 es suficiente en ese caso. La Sección 6 básicamente dice que si hay un operador elíptico de E a F, entonces en realidad E y F están íntimamente ligados. En esa sección explotamos este conocimiento para refinar la relación entre las clases de Chern de la Sección 4 de fibrados E y F para los cuales existe el tal operador elíptico. En la Sección 7 describimos el carácter de Chern y la clase de Todd, dos ingredientes primarios en la fórmula del índice de Atiyah-Singer, el cual está descrito en la Sección 8. Finalmente, en la Sección 9 usamos el teorema de Atiyah-Singer para calcular el índice de ciertos operadores.

Los operadores (pseudo)diferenciales cuya existencia queremos indagar son localmente matrices cuadradas (digamos $r \times r$) $P = [P_\mu^\nu]$ de operadores escalares lineales P_μ^ν con coeficientes suaves en $\mathbb{R}^n$. Estos últimos son operadores diferenciales, o más generalmente pseudodiferenciales. Esto quiere decir que

$$P_\mu^\nu u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot (x-x')} p_\mu^\nu(x,\xi) u(x') dx' d\xi$$

donde las $p_\mu^\nu(x,\xi)$ son funciones suaves que imitan lo que ocurre con operadores diferenciales en cuanto a que son, en un sentido que se puede precisar, sumas

$$p_\mu^\nu \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j,\mu}^\nu$$

con $p_{m-j,\mu}^\nu(x,\xi)$ homogéneo en ξ de grado $m-j$, mas no necesariamente polinomial en ξ. El número m, el mismo para todas las componentes de P, es el orden del operador, que suponemos positivo. El símbolo principal de P es la matriz $[p_{m,\mu}^\nu(x,\xi)]$ pensada como operador lineal de $\mathbb{C}^r$ en $\mathbb{C}^r$. El par (x,ξ) se interpreta como el covector $\sum_{i=1}^n \xi_i dx^i|_x$. La elipticidad del operador es la condición que la matriz $[p_{m,\mu}^\nu(x,\xi)]$ sea invertible. El artículo [14] es una introducción corta muy buena al tema de operadores pseudodiferenciales.

Sea $\mathcal{M}$ un espacio topológico. Un fibrado vectorial localmente trivial real ($\Gamma = \mathbb{R}$) o complejo ($\Gamma = \mathbb{C}$) de rango $r \in \mathbb{N}$ sobre $\mathcal{M}$ es un espacio topológico E y un mapa continuo $\rho : E \to \mathcal{M}$ tal que existe un cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $\mathcal{M}$ por abiertos y para cada $\alpha \in A$ un homeomorfismo $\phi_\alpha : \rho^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \Gamma^r$ de la forma $\phi_\alpha(\sigma) = (\rho(\sigma), \tilde{\phi}_\alpha(\sigma))$ tales que $\phi_\beta \phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \Gamma^r \to U_\alpha \cap U_\beta \times \Gamma^r$ es lineal en la segunda variable. Las ϕ_α se llaman trivializaciones locales. Las funciones $\phi_\beta^{-1}\phi_\alpha$, definidas en $U_\alpha \cap U_\beta \times \Gamma^r$ si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, son de la forma $(q,z) \mapsto (x, \phi_{\beta\alpha}(q)z)$ donde los $\phi_{\beta\alpha}(q)$ son continuos en q y lineales en z. Estas

$\phi_{\beta\alpha}$, llamadas funciones de transición, satisfacen

$$\phi_{\beta\alpha} = \phi_{\alpha\beta}^{-1} \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta, \ \phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma}\phi_{\gamma\alpha} = \mathrm{Id} \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \tag{1.1}$$

A partir de las funciones de transición uno puede reconstruir el fibrado E.

La estructura de espacio vectorial de Γ^r se transfiere consistentemente a estructuras de espacios vectoriales en cada *fibra* $E_q = \rho^{-1}(q)$ de $E \to \mathcal{M}$. Una sección de $E \to \mathcal{M}$ es una función $\sigma : \mathcal{M} \to E$ tal que $\sigma(q) \in E_q$. Con la trivialización local ϕ_α uno puede definir r *secciones locales* σ_μ, $\sigma_\mu(q) = \phi_\alpha^{-1}(q, e_\mu)$ (las e_μ forman una base de Γ^r) tales que las $\sigma_\mu(q)$ son una base de E_x. Una familia de secciones así es un *marco local.* En el contexto de variedades uno reemplaza continuo por suave y homeomorfismo por difeomorfismo C^∞. El espacio de secciones suaves de E es $C^\infty(\mathcal{M}; E)$. Localmente los elementos de $C^\infty(\mathcal{M}; E)$ son combinaciones lineales $\sum_\mu a_\mu \sigma_\mu$ donde los σ_μ se obtienen de las trivializaciones locales, y las funciones a_μ son suaves.

Suponiendo ahora y en el resto de estas notas que $\mathcal{M}$ es una variedad suave paracompacta orientable,[1] sean E, $F \to \mathcal{M}$ fibrados vectoriales complejos de rango r. Un operador pseudodiferencial de E en F es un operador lineal $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$ que en términos de trivializaciones de E y F sobre abiertos $U \subset \mathcal{M}$ que son dominios de coordenadas locales de $\mathcal{M}$ es como el P descrito más arriba.

El símbolo principal p de P puede (y debe) verse como un homomorfismo entre fibrados vectoriales, de la siguiente manera. Dado el fibrado vectorial $\rho : E \to \mathcal{M}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ T^*\mathcal{M}\backslash 0 & \xrightarrow[\pi]{} & \mathcal{M} \end{array}$$

se completa colocando en la esquina superior izquierda el conjunto

$$\pi^*E = \{(\xi, \sigma) \in (T^*\mathcal{M}\backslash 0) \times E : \pi(\xi) = \rho(\sigma)\} \tag{1.2}$$

con mapas a $T^*\mathcal{M}\backslash 0$ y E definidos por la restricciones de las proyecciones. Aquí $T^*\mathcal{M}\backslash 0$ es $T^*\mathcal{M}$ sin la imagen de la sección 0. Uno comprueba que $\pi^*E \to T^*\mathcal{M}\backslash 0$ es un fibrado vectorial. La fibra en $\xi \in T^*_x\mathcal{M}$ es $\pi^*E_\xi = \{\sigma \in E_x\}$, según (1.2). Igualmente tenemos $\pi^*F \to \mathcal{M}$ dado $F \to \mathcal{M}$. Si ahora $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$ es un operador pseudodiferencial, su símbolo principal es un mapa suave $p : \pi^*E \to \pi^*F$ que se puede escribir en términos de las representaciones locales del operador, y tiene las siguientes propiedades: $p(\pi^*E_\xi) \subset \pi^*F_\xi$, y $p(\xi) : \pi^*E_\xi \to \pi^*F_\xi$ es lineal. Una función así, de π^*E en

[1] Para hablar de operadores pseudodiferenciales no es necesario que $\mathcal{M}$ sea orientable.

π^*F, es un homomorfismo de fibrados vectoriales. El operador P es elíptico si su símbolo principal p es invertible. Esto es, si hay un homomorfismo $q : \pi^*F \to \pi^*E$ tal que $pq = qp = \mathrm{Id}$. Uno dice entonces que los fibrados π^*E y π^*F son isomorfos, y que p es un isomorfismo.

El símbolo p es homogéneo de grado m, el orden del operador: $p(t\xi) = t^m p(\xi)$ ($t > 0$), así que para saber p basta con saberlo en $S^*\mathcal{M}$, el fibrado sobre $\mathcal{M}$ que consiste de las esferas en cada fibra de $T^*\mathcal{M}$. Debido a esto, basta con trabajar en este fibrado, que tiene la ventaja de ser una variedad compacta. Para simplificar la notación, llamaremos $\hat{E}$ al fibrado π^*E obtenido como arriba pero considerando π como mapa $S^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Cada operador pseudodiferencial $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$ tiene un símbolo principal. Se puede probar que dado un homomorfismo suave $\hat{E} \to \hat{F}$, hay un operador pseudodiferencial de E en F de orden $\mathcal{M}$ cuyo símbolo principal es el homomorfismo dado.

Dicho todo esto, el problema de la existencia de un operador pseudodiferencial elíptico entre un par de fibrados E y F es realmente determinar si $\hat{E}$ y $\hat{F}$ son isomorfos como fibrados vectoriales sobre $S^*\mathcal{M}$. Si lo son, diremos que E y F están elípticamente relacionados.

La cuestión de existencia de operadores diferenciales[2] elípticos es más difícil. Hay fibrados E, F que admiten operadores pseudodiferenciales elípticos, pero no diferenciales. Ver [3].

Algunas referencias útiles son las siguientes. Sobre el tema de variedades diferenciables, Warner [22] y Kobayashi-Nomizu [12] son muy completos. Sobre fibrados, el libro de Steenrod [19] es clásico. El libro de Husemoller [8] es muy útil aunque más difícil de leer. Los libros de Milnor-Stasheff [13], Bott-Tu [6] y Kobayashi-Nomizu [12] son más legibles y claros en lo que concierne a clases características. Sobre cohomología, el libro de Warner citado arriba también es recomendable. Finalmente el libro de Gilkey [7] contiene una demostración completa del teorema del índice.

2 Fibrados de rango 1 sobre S^2

Comencemos con el fibrado cotangente de la esfera

$$S^2 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3 : \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1\},$$

el cual es un fibrado real de rango 2. Como conjunto, T^*S^2 es el conjunto de diferenciales de funciones (C^1 o C^∞, no importa) en puntos de S^2:

$$T_q^*S^2 = \{df|_q : f \text{ es una función } C^1 \text{ definida cerca de } q\}$$
$$T^*S^2 = \bigcup_{p \in S^2} T_q^*S^2 \quad \text{(unión disjunta)}$$

[2]En lugar de pseudodiferenciales.

junto con el mapa $\pi : T^*S^2 \to S^2$ que manda $\nu \in T_q^*S^2$ en $\pi(\nu) = q$.

En S^2 marcamos los puntos $\mathfrak{n} = (0,0,1)$ y $\mathfrak{s} = (0,0,-1)$. En $\mathcal{U}_\mathfrak{n} = S^2 \backslash \{\mathfrak{s}\}$ tenemos la proyección esterográfica $\wp_+ : S^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\wp_+(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\frac{\omega_1}{1+\omega_3}, \frac{\omega_2}{1+\omega_3})$. Con $z = x + iy$, la inversa es

$$\wp_+^{-1}(x,y) = \frac{1}{|z|^2+1}(2x, 2y, 1-|z|^2).$$

Igualmente en $\mathcal{U}_\mathfrak{s} = S^2 \backslash \{\mathfrak{n}\}$ tenemos $\wp_- : S^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\wp_-(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\frac{\omega_1}{1-\omega_3}, -\frac{\omega_2}{1-\omega_3})$ (el signo $-$ tiene que ver con la orientación). El cálculo directo de la composición $\wp_- \circ \wp_+^{-1}$ produce

$$\wp_- \circ \wp_+^{-1}(x,y) = \frac{1}{|z|^2}(x, -y) \tag{2.1}$$

o con notación compleja, $\wp_- \circ \wp_+^{-1}(z) = 1/z$. Estas dos functiones $\wp_+$, $\wp_-$ son coordenadas complejas en S^2. Usaremos la notación $z = \wp_+$, $z = x + iy$, $\zeta = \wp_-$, $\zeta = \xi + i\eta$. Las funciones x, y son coordenadas (reales) en $\mathcal{U}_\mathfrak{n}$. Con esta notación la ecuación (2.1) dice que si $q \in \mathcal{U}_\mathfrak{s} \cap \mathcal{U}_\mathfrak{n}$ entonces $\zeta(q) = 1/z(q)$, esto es, $\zeta = 1/z$.

En términos de x y y, un covector $\nu \in T_q^*S^2$ sobre un punto $q \in \mathcal{U}_\mathfrak{n}$ se escribe como

$$\nu = a\, dx|_q + b\, dy|_q \tag{2.2}$$

en donde a y b son números reales si estamos hablando de $T_q^*S^2$ o complejos si queremos hablar de $\mathbb{C}T_q^*S^2$, la complexificación de $T_q^*S^2$. Esto da un mapa natural $\phi_\mathfrak{n} : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\mathfrak{n}) \to \mathcal{U}_\mathfrak{n} \times \Gamma^2$, $\Gamma = \mathbb{R}$ o $\Gamma = \mathbb{C}$ según el caso:

$$\pi^{-1}(\mathcal{U}_\mathfrak{n}) \ni \nu = a\, dx|_q + b\, dy|_q \mapsto (q, (a,b)) \in \mathcal{U}_\mathfrak{n} \times \Gamma^2 \tag{2.3}$$

Igualmente si $q \in \mathcal{U}_\mathfrak{s}$ y $\nu \in T_q^*S^2$ entonces

$$\nu = \alpha\, d\xi|_q + \beta\, d\eta|_q \tag{2.4}$$

y hay el correspondiente mapa $\phi_\mathfrak{s} : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\mathfrak{s}) \to \mathcal{U}_\mathfrak{s} \times \Gamma^2$. Si $q \in \mathcal{U}_\mathfrak{s} \cap \mathcal{U}_\mathfrak{n}$ y $\nu \in T_q^*S^2$, ν puede escribirse usando dx, dy o $d\xi$, $d\eta$. Encontramos la relación entre los coeficientes usando $z = 1/\zeta$. De esto, o directamente de (2.1) uno obtiene $x = \xi/|\zeta|^2$, $y = -\eta/|\zeta|^2$ en $\mathcal{U}_\mathfrak{n} \cap \mathcal{U}_\mathfrak{s}$ y usando la fórmula $df = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta$ para calcular dx y dy obtenemos

$$dx = \frac{\eta^2 - \xi^2}{|\zeta|^4} d\xi - \frac{2\xi\eta}{|\zeta|^4} d\eta, \quad dy = \frac{2\xi\eta}{|\zeta|^4} d\xi - \frac{\xi^2 - \eta^2}{|\zeta|^4} d\eta$$

de lo cual resulta que si ν está dado por (2.2), entonces

$$\nu = \frac{1}{|\zeta|^4}\{[a(\eta^2-\xi^2)+2b\xi\eta]d\xi|_q + [(-2a\xi\eta + b(\eta^2-\xi^2)]d\eta|_q\}. \tag{2.5}$$

De esto resulta que

$$\phi_{\mathfrak{s}}\phi_{\mathfrak{n}}^{-1}(q,(a,b)) = (q, \frac{1}{|\zeta|^4}(a(\eta^2-\xi^2)+2b\xi\eta), (-2a\xi\eta + b(\eta^2-\xi^2))).$$

La segunda componente,

$$\phi_{\mathfrak{sn}}(q)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\eta^2-\xi^2)/|\zeta|^4 & 2\xi\eta/|\zeta|^4\\ -2\xi\eta/|\zeta|^4 & (\eta^2-\xi^2)/|\zeta|^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

es la función de transición. De todo esto resulta que T^*S^2 es un fibrado vectorial real de rango 2.

Otro ejemplo, más interesante para nosotros, se obtiene usando la estructura compleja de S^2. Usando $dx = (dz+d\overline{z})/2$ y $dy = (dz-d\overline{z})/2i$ uno puede escribir el covector en (2.2) como

$$\nu = \frac{a-bi}{2}dz|_q + \frac{a+bi}{2}d\overline{z}|_q. \tag{2.6}$$

Igualmente, si ν está dado por (2.4), entonces también

$$\nu = \frac{\alpha-\beta i}{2}d\zeta|_q + \frac{\alpha+\beta i}{2}d\overline{\zeta}|_q. \tag{2.7}$$

y si $q \in \mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ entonces sustituyendo

$$\alpha = \frac{1}{|\zeta|^4}(a(\eta^2-\xi^2)+2b\xi\eta), \quad \beta = \frac{1}{|\zeta|^4}(-2a\xi\eta + b(\eta^2-\xi^2))$$

(obtenidas de (2.5)) en (2.7) resulta

$$\nu = \frac{a-bi}{2}\left[-\frac{\xi^2-\eta^2-2i\xi\eta}{|\zeta|^4}\right]d\zeta|_q + \frac{a+bi}{2}\left[-\frac{\xi^2-\eta^2+2i\xi\eta}{|\zeta|^4}\right]d\overline{\zeta}|_q$$

que es lo mismo que se obtiene si en (2.6) uno sustituye $dz = -\frac{1}{\zeta^2}\,d\zeta$, $d\overline{z} = -\frac{1}{\overline{\zeta}^2}\,d\overline{\zeta}$. Esto dice que separar la parte sobre $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ del cotangente complexificado $\mathbb{C}T_q^*S^2$ en la suma directa de elementos de la forma $Adz|_q$ y elementos de la forma $Bd\overline{z}|_q$, o separarlo sobre $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ en la suma directa de elementos de la forma $A'd\zeta|_q$ y elementos de la forma $B'd\overline{\zeta}|_q$ es consistente sobre $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$. El conjunto de todos los covectores de la forma $A\,dz|_q$ o $A'd\zeta|_q$ (con q variando en S^2) se denota $\bigwedge^{1,0}S^2$, y el de los conjugados, $\bigwedge^{0,1}S^2$. Ambos son fibrados complejos de rango 1. La suma directa fibra a fibra es $\mathbb{C}T^*_q S^2$. Esto se escribe $\mathbb{C}T^* S^2 = \bigwedge^{1,0} S^2 \oplus \bigwedge^{0,1} S^2$. Escribiremos $\pi_{1,0}$ y $\pi_{0,1}$ para las proyecciones canónicas $\mathbb{C}T^* S^2 \to \bigwedge^{1,0} S^2$ y $\mathbb{C}T^* S^2 \to \bigwedge^{0,1} S^2$. Las formas diferenciales $\sigma_{\mathfrak{n}} = dz$ y $\sigma_{\mathfrak{s}} = d\zeta$, respectivamente, son marcos locales de $\bigwedge^{1,0} S^2$ sobre $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ y $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$, y están relacionadas por

$$\sigma_{\mathfrak{s}} = -\frac{1}{z^2}\sigma_{\mathfrak{n}}. \tag{2.8}$$

Obtendremos otro ejemplo de un fibrado vectorial de rango 1 sobre S^2 de la representación de S^2 como el espacio proyectivo complejo de dimensión 1, $\mathbb{CP}^1$. Este último es el cociente de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ por la relación de equivalencia $(z_0, z_1) \sim (z_0', z_1') \iff \exists \mu \in \mathbb{C}$ tal que $(z_0, z_1) = \mu(z_0', z_1')$. La clase de equivalencia de (z_0, z_1) se denota $[z_0, z_1]$. Antes de presentar el fibrado, mostraremos que $\mathbb{CP}^1$ "es" S^2. El cociente es un espacio topológico en el cual tenemos dos abiertos: $\mathcal{U}_0$, el conjunto de elementos $[z_0, z_1]$ con $z_1 \neq 0$, y $\mathcal{U}_1$, el conjunto de elementos $[z_0, z_1]$ con $z_0 \neq 0$. Si $[z_0, z_1] \in \mathcal{U}_0$, entonces, como $z_1 \neq 0$, $[z_0, z_1] = [z_0/z_1, 1]$. El cociente z_0/z_1 determina y es determinado por $[z_0, z_1]$, y tenemos una función $\hat{z} : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{C}$, $\hat{z}([z_0, z_1]) = z_0/z_1$. De la misma manera, tenemos una función $\hat{\zeta} : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{C}$. Es fácil ver que $\hat{z}$ y $\hat{\zeta}$ son homeomorfismos. Si $[z_0, z_1] \in \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$, entonces $\hat{\zeta}([z_0, z_1]) = 1/\hat{z}([z_0, z_1])$, esto es, $\hat{\zeta} = 1/\hat{z}$. Recordemos ahora que en S^2 tenemos $z : \mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \to \mathbb{C}$ y $\zeta : \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \to \mathbb{C}$, tambien relacionadas por $\zeta = 1/z$. Definimos $\psi : \mathbb{CP}^1 \to S^2$ de la siguiente manera: Si $q \in \mathcal{U}_0$, $\psi(q) = z^{-1}(\hat{z}(q))$, y si $q \in \mathcal{U}_1$, $\psi(q) = \zeta^{-1}(\hat{\zeta}(q))$. Esta definición es consistente en $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$, y es un homeomorfismo.[3]

Obtenemos un fibrado $\rho : \gamma \to \mathbb{CP}^1$ de rango 1 (llamado el fibrado canónico sobre $\mathbb{CP}^1$) especificando que la fibra sobre $[z_0, z_1]$ es el subespacio complejo de dimensión 1 de $\mathbb{C}^2$ generado por (z_0, z_1). Este subespacio no depende del representante de $[z_0, z_1]$. En $\mathcal{U}_0$ tenemos la sección local $\sigma_{\mathfrak{n}}$ definida por

$$\sigma_{\mathfrak{n}}([z_0, z_1]) = (z_0/z_1, 1).$$

Notemos que $(z_0/z_1, 1)$ está en la fibra de γ sobre $[z_0, z_1]$ (el espacio generado por (z_0, z_1)), así que esto de verdad es una sección. Sobre $\mathcal{U}_1$ tenemos la sección local

$$\sigma_{\mathfrak{s}}([z_0, z_1]) = (1, z_1/z_0).$$

Usando estas secciones locales uno define trivializaciones de γ sobre $\mathcal{U}_0$ y $\mathcal{U}_1$, de la misma manera que (2.3) resulta de (2.2). De la relación

$$\sigma_{\mathfrak{s}} = \frac{1}{z}\sigma_{\mathfrak{n}} \tag{2.9}$$

[3] Aquí z^{-1} es la función inversa de z, no la inversa multiplicativa $1/z$.

se obtiene la función de transición, que no es más que el mapa $U_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \to \mathbb{C}\backslash 0$ dado por multiplicación por $1/z$.

El resto de esta sección es la determinación de todos los fibrados vectoriales complejos de rango 1 sobre S^2. En particular veremos que $\bigwedge^{1,0} S^2$ no es isomorfo a γ porque las funciones de transición $1/z^2$ y $1/z$ no son homotópicas.[4]

En general se puede probar lo siguiente (ver por ejemplo [8, pág. 29, Corolario 4.8]): Si $\mathcal{X}$ es un espacio topológico paracompacto y $\rho : E \to \mathcal{X}$ es un fibrado vectorial localmente trivial, digamos complejo de rango r, y si $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ es un abierto contractible, entonces $E|_{\mathcal{U}}$ es trivial, esto es, isomorfo a $\mathcal{U} \times \mathbb{C}^r$ como fibrado vectorial.[5] En particular, sobre tales abiertos el fibrado admite un marco (r secciones suaves $\sigma_\nu : \mathcal{U} \to E_{\mathcal{U}}$ tales que para cada $q \in \mathcal{U}$, las $\sigma_\nu(q)$, $\nu = 1, \ldots, r$, son base de la fibra E_q).

En el caso de S^2 que estamos considerando, los abiertos $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ y $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ son contractibles, y por lo tanto si $E \to S^2$ es un fibrado de rango 1, hay secciones nunca nulas $\sigma_{\mathfrak{n}} : \mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \to E_{\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}}$ y $\sigma_{\mathfrak{s}} : \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \to E_{\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}}$. Estas están relacionadas sobre $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ a través de

$$\sigma_{\mathfrak{s}} = h\sigma_{\mathfrak{n}} \tag{2.10}$$

con alguna

$$h : \mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \to \mathbb{C}\backslash\{0\} \tag{2.11}$$

suave. La clase de homotopía de h determina a E módulo isomorfismo. Probaremos esto. Supongamos que E' es otro fibrado de rango 1, que $\sigma'_{\mathfrak{n}}$ y $\sigma'_{\mathfrak{s}}$ son secciones nunca nulas de E' sobre $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ y que $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$, que $\sigma'_{\mathfrak{s}} = h'\sigma'_{\mathfrak{n}}$ con h' homotópica a h. Probaremos que existen secciones suaves nunca nulas $\tilde{\sigma}_{\mathfrak{n}} : \mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \to E_{\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}}$ y $\tilde{\sigma}_{\mathfrak{s}} : \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} \to E_{\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}}$ tales que $\tilde{\sigma}_{\mathfrak{s}} = h'\tilde{\sigma}_{\mathfrak{n}}$ (es decir, la "h" para el nuevo par de marcos de E es la misma que para E' con $\sigma'_{\mathfrak{s}}$ y $\sigma'_{\mathfrak{n}}$. Una vez demostrado esto, uno define $\Phi : E \to E'$ especificando $\Phi(\tilde{\sigma}_{\mathfrak{n}}) = \sigma'_{\mathfrak{n}}$ y $\Phi(\tilde{\sigma}_{\mathfrak{s}}) = \sigma'_{\mathfrak{s}}$, y extendiendo por linealidad. Esta definición es consistente porque los "h" son los mismos.

Notamos primero que h/h' es homotópica[6] al mapa constante 1. Por lo tanto h/h' admite un logaritmo.[7] Sea $\chi : S^2 \to \mathbb{R}$ suave tal que $\chi(q) = 1$ para q cerca de $\mathfrak{n}$ y $\chi(q) = 0$ para q cerca de $\mathfrak{s}$. Entonces $\chi \log(h/h')$ es

---

[4]Dos funciones continuas f_0, $f_1 : X \to Y$ entre espacios topológicos son homotópicas si existe $F : \mathcal{X} \times I \to \mathcal{Y}$ continua tal que $\forall q \in \mathcal{X}$: $F(q, 0) = f_0(q)$ y $F(q, 1) = f_1(q)$; aquí I es el intervalo $[0, 1]$. Tal F es una homotopía de f_0 a f_1. Homotopía es una relación de equivalencia.

[5]En el caso de variedades paracompactas $\mathcal{M}$, uno puede probar esto si $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ es difeomorfo a una bola usando conexiones y transporte paralelo a lo largo de rayos.

[6]Si F es una homotopía de h a h', entonces F/h' es una homotopía de h/h' a 1

[7]Si $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ es homotópica a 1 entonces la integral de línea de $\frac{df}{f}$ en cualquier curva cerrada es 0, y por lo tanto hay g tal que $dg = \frac{df}{f}$. Automáticamente $e^g = cf$ para alguna $c \neq 0$ que puede absorberse en la definición de g.

suave cerca de $\mathfrak{s}$ y $(1-\chi)\log(h/h')$ es suave cerca de $\mathfrak{n}$. Esto da $h/h' = e^{\chi\log(h/h')}e^{(1-\chi)\log(h/h')}$. Sean $h_{\mathfrak{n}} = e^{(1-\chi)\log(h/h')}$, $h_{\mathfrak{s}} = e^{-\chi\log(h/h')}$. Estas funciones, definidas respectivamente en $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ y $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$, son suaves nunca nulas, y $h = h_{\mathfrak{s}}^{-1}h_{\mathfrak{n}}h'$. Por lo tanto, usando (2.10), tenemos

$$h_{\mathfrak{s}}\sigma_{\mathfrak{s}} = h'h_{\mathfrak{n}}\sigma_{\mathfrak{n}}$$

Definiendo $\tilde{\sigma}_{\mathfrak{n}} = h_{\mathfrak{n}}\sigma_{\mathfrak{n}}$ y similarmente $\tilde{\sigma}_{\mathfrak{s}}$ obtenemos lo que queríamos.

No sólo es verdad que la clase de homotopía de la función de transición h determina a E módulo isomorfismo, sino también que a cada función (2.11), por ejemplo $h(z) = z^k$, le corresponde un fibrado. Este puede construirse de la siguiente manera. Definimos E como el cociente de la unión disjunta $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}\times\mathbb{C} \sqcup \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}\times\mathbb{C}$ por la menor relación de equivalencia para la cual $(q,z) \in \mathcal{U}_{\mathfrak{n}}\times\mathbb{C}$ es equivalente a $(q,z') \in \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}\times\mathbb{C}$ si y sólo si $z = h(q)z'$. Sobre $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ tenemos la sección $\sigma_{\mathfrak{n}}$ definida mandando q en la clase de equivalencia de $(q,1)$ como elemento de $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}\times\mathbb{C}$, y similarmente tenemos una sección $\sigma_{\mathfrak{s}}$. Si $q \in \mathcal{U}_{\mathfrak{n}}\cap\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$, $\sigma_{\mathfrak{n}}(q)$ tiene dos elementos, $(q,1) \in \mathcal{U}_{\mathfrak{n}}\times\mathbb{C}$, y $(q,1/h(q)) \in \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}\times\mathbb{C}$. Esto es, $\sigma_{\mathfrak{n}}(q) = (1/h(q))\sigma_{\mathfrak{s}}(q)$, más concisamente, $\sigma_{\mathfrak{n}} = (1/h)\sigma_{\mathfrak{s}}$.

Proposición 2.1 *Hay una correspondencia* 1 *a* 1 *entre los enteros y los fibrados vectoriales complejos $E \to S^2$ de rango* 1*, dada por el índice de la (clase de homotopía de la) función de transición* (2.10).

Al fibrado canónico $\gamma \to S^2$ le corresponde -1. Al fibrado $\bigwedge^{1,0}S^2$ le corresponde -2 (el negativo de la característica de Euler de S^2). A $\bigwedge^{0,1}S^2$ le corresponde 2.

3 Ejemplos de operadores elípticos en variedades de dimensión 2

Las variedades que consideramos aquí son compactas y orientables, por ejemplo S^2 y el toro $S^1\times S^1$. Es un hecho que estas variedades admiten estructuras complejas. Fijemos una de estas variedades, $\mathcal{M}$, y una estructura compleja. Tenemos entonces los fibrados complejos $\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}$ y $\bigwedge^{0,1}\mathcal{M}$, ambos de rango 1, descritos en el caso de S^2 en la sección anterior, y que dan una descomposición

$$\mathbb{C}T^*\mathcal{M} = \bigwedge\nolimits^{1,0}\mathcal{M} \oplus \bigwedge\nolimits^{0,1}\mathcal{M} \tag{3.1}$$

y proyecciones

$$\pi_{1,0} : T_q^*\mathcal{M} \to \bigwedge\nolimits^{1,0}\mathcal{M}, \qquad \pi_{0,1} : \mathbb{C}T_q^*\mathcal{M} \to \bigwedge\nolimits^{0,1}\mathcal{M}$$

El operador d de funciones en 1-formas, $d : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{C}T^*\mathcal{M})$, se descompone de acuerdo a

$$df = \pi_{1,0} df + \pi_{0,1} df$$

y obtenemos dos operadores, $\partial = \pi_{1,0} \circ d$ y $\overline{\partial} = \pi_{0,1} \circ d$,

$$\partial : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}; \textstyle\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}), \qquad \overline{\partial} : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}; \textstyle\bigwedge^{0,1}\mathcal{M})$$

Estos son operadores elípticos. Para ver esto, calcularemos el símbolo principal de ∂.

La receta general para calcular el símbolo principal de un operador pseudodiferencial $P : C^\infty(M; E) \to C^\infty(M; F)$, E y F fibrados sobre $\mathcal{M}$, es como sigue. Tomamos $q \in \mathcal{M}$, un covector no nulo $\nu \in T_q^*\mathcal{M}$ y una función real suave f tal que $df(q) = \nu$. Tomamos también un elemento $\sigma_0 \in E_q$ y lo extendemos a una sección suave $\sigma \in C^\infty(M; E)$. Si el operador es de orden m, el límite

$$\operatorname{sim}(P)(\nu)(\sigma_0) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau^m} e^{-i\tau f(q)} P(e^{i\tau f}\sigma)(q) \in F_q$$

existe, y depende sólo de $df(q)$ y $\sigma(q)$. Esto define, para cada $q \in \mathcal{M}$ y $\nu \in T_q^*\mathcal{M}\backslash 0$, un mapa lineal $\operatorname{sim}(P)(\nu) : E_q \to F_q$. Elipticidad, recordemos, es la invertibilidad de $\operatorname{sim}(P)(\nu)$ para todo ν no nulo.

Apliquemos esto verbatim al caso de ∂. Tomemos $q_0 \in \mathcal{M}$, $\nu \in T_{q_0}^*\mathcal{M}\backslash 0$ y una función $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ suave con $df(a_0) = \nu$. El espacio de funciones $\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ puede verse como el espacio de secciones del fibrado trivial $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$, vía $g \leftrightarrow (q \mapsto (q, g(q)))$, y por lo tanto ∂ puede verse como operador de secciones de $E = \mathcal{M} \times \mathbb{C}$ a secciones de $F = \bigwedge^{0,1}\mathcal{M}$. Tomar $\sigma_0 \in E_{q_0}$ es tomar (q_0, s), $s \in \mathbb{C}$. Extender a una sección es tomar una función g tal que $g(q_0) = s$ y mirar $q \mapsto (q, g(q))$. Tenemos

$$\begin{aligned} e^{-i\tau f}\partial(e^{i\tau f} g) &= e^{-i\tau f}\pi_{1,0} d(e^{i\tau f} g) \\ &= e^{-i\tau f}\pi_{1,0}(i\tau e^{i\tau f} g df + e^{i\tau f} dg) \\ &= i\tau g \pi_{1,0} df + \pi_{1,0} dg \\ &= i\tau g \partial f + \partial g \end{aligned}$$

Dividiendo entre τ (∂ es de primer orden), tomando el límite y evaluando en q_0 obtenemos

$$\operatorname{sim}(\partial)(\nu)(s) = i g(q_0)\partial f|_{q_0} = i s \pi_{1,0}(\nu)$$

Por lo tanto, el símbolo en ν es el mapa $\mathbb{C} \mapsto \bigwedge_{q_0}^{1,0}\mathcal{M}$ dado por multiplicación por $i\pi_{1,0}(\nu)$. Para ver que este mapa es invertible sólo necesitamos ver que es inyectivo, porque ambos fibrados son de rango 1. Supongamos que $z = x + iy$ es una coordenada local compleja de $\mathcal{M}$ cerca de q_0. El covector ν es entonces $\nu = a\,dx + b\,dy$ con ξ y η reales, y, según (2.6),

$$\pi_{1,0}(\nu) = \frac{a - ib}{2} dz \tag{3.2}$$

Este covector complejo no es cero, pues si lo fuera, tendríamos $a = b = 0$, pero sabemos que $\nu \neq 0$.

Igualmente uno prueba que $\overline{\partial}$ es elíptico, con símbolo

$$\mathrm{sim}(\overline{\partial})(\nu)(s) = is\frac{a + ib}{2} d\overline{z} \tag{3.3}$$

si $\nu = a\,dx + b\,dy$.

Concluimos de esto que hay operadores elípticos del fibrado trivial en $\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}$ y $\bigwedge^{0,1}\mathcal{M}$.

Podemos construir más operadores elípticos usando conexiones. En general, una conexión en el fibrado $E \to \mathcal{M}$ es un operador lineal[8] $\nabla : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes \bigwedge^1 \mathcal{M})$ con la propiedad

$$\nabla f\sigma = f\nabla\sigma + \sigma \otimes df \text{ para cualquier función } f \text{ y sección } \sigma. \tag{3.4}$$

Automáticamente ([15]) ∇ es un operador diferencial de orden 1. Si $\mathcal{M}$ es paracompacta, E admite una conexión.

Tomemos un fibrado vectorial complejo de rango 1 en nuestra variedad $\mathcal{M}$ y una conexión en E. La descomposición (3.1) nos da

$$E \otimes T^*\mathcal{M} = (E \otimes \textstyle\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}) \oplus (E \otimes \bigwedge^{0,1}\mathcal{M}) \tag{3.5}$$

lo cual nos permite escribir $\nabla\sigma = \nabla^{1,0}\sigma + \nabla^{0,1}\sigma$, con

$$\nabla^{1,0} : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes \textstyle\bigwedge^{1,0}\mathcal{M})$$

Este es un operador diferencial de orden 1. Como E y $\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}$ son fibrados de rango 1, $E \otimes \bigwedge^{1,0}\mathcal{M}$ es de nuevo de rango 1. Calculemos el símbolo de $\nabla^{1,0}$. Sean f una función real suave y σ una sección de E.

$$\begin{aligned} e^{-i\tau f}\nabla^{1,0}(e^{i\tau f}\sigma) &= e^{-i\tau f}(\mathrm{Id} \otimes \pi_{0,1})\nabla(e^{i\tau f}\sigma) \\ &= e^{-i\tau f}(\mathrm{Id} \otimes \pi_{0,1})(e^{i\tau f}\nabla\sigma + \sigma \otimes i\tau e^{i\tau f} df) \\ &= \nabla^{1,0}\sigma + i\tau\sigma \otimes \pi_{1,0} df \end{aligned}$$

[8]El producto tensorial de los fibrados E y F es el fibrado cuya fibra en cada punto es el producto tensorial de las fibras de E y F en ese punto. El producto tensorial de dos espacios vectoriales complejos V, W es el espacio vectorial formado por las funciones bilineales $V^* \times W^* \to \mathbb{C}$. Si $v \in V$ y $w \in W$, $v \otimes w$ es la función bilineal $V^* \times W^* \to \mathbb{C}$ definida por $V^* \times W^* \ni (\mu, \omega) \mapsto \nu(v)\omega(w) \in \mathbb{R}$.

Dividiendo entre τ y tomando límite,

$$\operatorname{sim}(\nabla^{1,0})(df)(\sigma) = i\sigma \otimes \pi_{1,0}df$$

Como $\pi_{1,0}df \neq 0$ si df es real no nulo, $\nabla^{1,0}$ es elíptico.

En la sección anterior vimos que los fibrados vectoriales de rango 1 sobre S^2 están clasificados por los enteros. Esto es verdad en general, en cualquier variedad compacta orientable (y orientada) de dimensión 2 (fibrados de rango 1). Podemos entonces enumerar estos fibrados sobre $\mathcal{M}$ como E_k, $k \in \mathbb{Z}$. Esta enumeración es consistente y asigna el múmero[9] -1 al fibrado canónico $\gamma \to S^2$, y el número $2-2g$ (la característica de Euler) a $\bigwedge^{0,1}\mathcal{M}$ si g es el género de $\mathcal{M}$, y $2g-2$ a $\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}$. Con esta enumeración, $E_k \otimes E_\ell$ es isomorfo a $E_{k+\ell}$. El número k es el grado de E_k, $\deg(E_k) = k$ y se obtiene por integración de la primera clase de Chern del fibrado en cuestión. Ver la Secciones 4 para la definición de clases de Chern y la Sección 5 para algunos cálculos concretos.

Lo que probamos con $\nabla^{1,0}$ es que hay un operador elíptico de orden 1 de cualquier E_k a E_{k+2g-2}, y por composición, para cada κ entero positivo, de E_k a $E_{k+\kappa(2g-2)}$. Usando $\nabla^{0,1}$ lo mismo vale para κ negativo:

Teorema 3.1 *Sea $\mathcal{M}$ compacta orientable de dimensión 2 y género g. Si E, $F \to \mathcal{M}$ son fibrados complejos de rango 1 y $\deg(E) - \deg(F) = \kappa(2-2g)$ con κ entero, entonces existe un operador diferencial elíptico de orden $|\kappa|$ de secciones de E en secciones de F.*

En la siguiente sección veremos que no es posible encontrar operadores pseudodiferenciales elípticos entre fibrados que no satisfagan la condición del Teorema.

4 Sucesión de Gysin, clases de Chern y una condición necesaria

Supongamos que $\rho : E \to \mathcal{M}$ es un fibrado vectorial real de rango s. Debido a que $\mathcal{M}$ es paracompacta existe en E una métrica suave h. Definimos

$$SE = \{\sigma \in E : h(\sigma,\sigma) = 1\}.$$

Para cada $x \in \mathcal{M}$, $E_x \cap SE$ es la esfera unitaria en E_x. Este es el llamado fibrado de esferas de E. Si E es orientable y orientado, existe una relación concreta entre la cohomología de $\mathcal{M}$ y la de SE, dada por la sucesión de Gysin [6, 8, 13], la sucesión exacta

$$\cdots \to H^{q-s}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\smile \mathbf{e}_E} H^q(\mathcal{M}) \xrightarrow{\rho^*} H^q(SE) \xrightarrow{\rho_*} H^{q-s+1}(\mathcal{M}) \to \cdots$$

[9] En el caso de γ, el -1 es la potencia -1 en la función de transición de (2.9), y en el caso de $\bigwedge^{1,0}S^2$ el número -2 es la potencia $-2 = 2g-2$ (con $g=0$) en (2.8)

en donde $\mathbf{e}_E$ es cierta clase en $H^s(\mathcal{M})$, llamada la clase de Euler de $E \to \mathcal{M}$. Automáticamente $\mathbf{e}_E = 0$ si $\dim \mathcal{M} < s$. El símbolo $\smile_{\mathbf{e}_E}$ indica producto copa en cohomología, $u \mapsto u \smile_{\mathbf{e}_E}$. El mapa $\rho^* : H^{q+s}(\mathcal{M}) \to H^{q+s}(SE)$ es el 'traído' usual, y el mapa $\rho_* : H^{q+s}(SE) \to H^{q+1}(\mathcal{M})$ es una especie de integración en las fibras de SE (para cada x, la esfera en E_x).

La cohomología en discusión es con coeficientes en $\mathbb{Z}$ o cualquier módulo sobre $\mathbb{Z}$. Así, la misma sucesión puede verse con coeficientes en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$. En este último caso, si $\mathcal{M}$ es compacta, las cohomologías involucradas pueden tomarse como cohomologías de de Rham. Por ejemplo, $H^q(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ es el espacio de q-formas diferenciales cerradas módulo el espacio de formas exactas.

En la sucesión de Gysin, q es cualquier entero; $H^q(\mathcal{M}) = 0$ si $q < 0$ o si $q > \dim \mathcal{M}$. Una aplicación es entonces:

Lema 4.1 *Si $q < s - 1$ entonces $\rho^* : H^q(\mathcal{M}) \to H^q(SE)$ es un isomorfismo. Si $q = s - 1$, entonces $\rho^* : H^q(\mathcal{M}) \to H^q(SE)$ es inyectivo.*

Como caso especial, consideremos el fibrado cotangente $\pi : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. La clase de Euler de este fibrado, denotada $\mathbf{e}_{\mathcal{M}}$, está en $H^n(\mathcal{M})$, $n = \dim \mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ es compacta (estamos suponiendo siempre $\mathcal{M}$ orientada), la 'integral' de $\mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ es la característica de Euler de $\mathcal{M}$,

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(\mathcal{M}, \mathbb{R}). \tag{4.1}$$

Si n es impar, este numero es 0 porque en general $H^i(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \approx H^{n-i}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ si $\mathcal{M}$ es compacta orientable. Se deduce que si $\dim \mathcal{M}$ es impar, $\mathbf{e}_{\mathcal{M}} = 0$.

Las clases de Chern de fibrados vectoriales complejos $E \to \mathcal{M}$ de rango r consisten de elementos específicos $\mathrm{c}_j(E) \in H^{2j}(\mathcal{M})$, $j = 0, \ldots, r$, con $\mathrm{c}_0(E) = 1$. Estas clases se pueden definir de varias maneras, por ejemplo de la siguiente manera en el caso en que $\mathcal{M}$ es paracompacta (ver [13], por ejemplo). Fijamos una métrica hermiteana en E. El fibrado E es considerado momentáneamente como fibrado real[10] (por lo tanto de rango $2r$), y como tal tiene una clase de Euler $\mathbf{e}_E \in H^{2r}(\mathcal{M})$. Se define $\mathrm{c}_r(E) = \mathbf{e}_E \in H^{2r}(\mathcal{M})$. Fijamos ahora una métrica hermiteana en E. Sea $\rho_S : SE \to \mathcal{M}$ la proyección, y consideremos $\rho_S^* E \to SE$. Este fibrado admite una sección global nunca nula canónica, a saber, dado $\sigma \in SE$, el elemento $\theta(\sigma) = (\sigma, \sigma) \in \rho_S^* E$ (literalmente, según la fórmula (1.2)). Esta sección global genera un subfibrado Θ de $\rho_S^* E$ de rango complejo 1, y usando el producto hermiteano h uno construye el ortogonal a ese fibrado, obteniendo así un nuevo fibrado complejo $E_1 \to SE$, de rango $r - 1$. Este fibrado tiene su propia clase de Euler, la clase $\mathrm{c}_{r-1}(E_1)$ que ahora está en $H^{2r-2}(SE)$. Como el rango real es $s = 2r$, $H^{2r-2}(SE)$ es isomorfo a $H^{2r-2}(\mathcal{M})$

[10] Considerado como fibrado real, E tiene una orientación canónica.

(Lema 4.1). Se define entonces $\mathrm{c}_{r-1}(E) \in H^{2(r-1)}(\mathcal{M})$ como el elemento que corresponde a $\mathrm{c}_{r-1}(E_1) \in H^{2(r-1)}(SE)$. La definición continúa inductivamente.

El único ingrediente arbitrario en la definición de las $\mathrm{c}_j(E)$ del párrafo anterior es la métrica hermiteana. Pero como los fibrados SE definidos con diversas métricas son homeomorfos, y como E_1 es isomorfo a $\rho_S^* E/\Theta$, es fácil ver que las clases definidas no dependen de la métrica.

Definición 4.2 *La clase total de Chern del fibrado vectorial complejo $E \to \mathcal{M}$ de rango r es el elemento*

$$\mathrm{c}(E) = 1 + \mathrm{c}_1(E) + \mathrm{c}_2(E) + \cdots + \mathrm{c}_r(E) \in \bigoplus_{j \geq 0} H^{2j}(\mathcal{M}).$$

Lema 4.3 *Si $\rho : E \to \mathcal{M}$ es un fibrado complejo y $f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ un mapa (suave o continuo), entonces $\mathrm{c}(f^*E) = f^*\,\mathrm{c}(E)$. Si $F \to \mathcal{M}$ es un fibrado complejo isomorfo a E, entonces $\mathrm{c}(F) = \mathrm{c}(E)$. Si $E = F \oplus G$, entonces $\mathrm{c}(E) = \mathrm{c}(F) \smile \mathrm{c}(G)$.*

En la proposición, f^*E se define de manera análoga a (1.2), con $\mathcal{N}$ y f en lugar de $T^*\mathcal{M}\backslash 0$ y π.

De todo esto obtenemos una condición necesaria para que dos fibrados complejos E, $F \to \mathcal{M}$ de rango r estén elípticamente relacionados, expresada en términos de las clases de Chern de E y F y la clase de Euler $\mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ de $T^*\mathcal{M}$, una clase en $H^n(\mathcal{M})$, $n = \dim \mathcal{M}$.

Teorema 4.4 *Si E, $F \to \mathcal{M}$ de rango r están elípticamente relacionados, entonces existe un entero κ tal que $c(E) - c(F) = \kappa \mathbf{e}_{\mathcal{M}}$*

Demostración: La hipótesis es que existe un isomorfismo $p : \hat{E} \to \hat{F}$, y por lo tanto tenemos $\mathrm{c}_j(\hat{E}) - \mathrm{c}_j(\hat{F}) = 0$ para todo j, según el Lema 4.3. Supondremos que $\dim \mathcal{M}$ es par, digamos $2m$ y dejaremos el caso de dimensión impar al lector (en el caso $\dim \mathcal{M}$ impar, E tiene que ser isomorfo a F, ver el Corolario 6.2 más adelante). Para $j < m$ tenemos que $\pi^* : H^{2j}(\mathcal{M}) \to H^{2j}(S^*\mathcal{M})$ es un isomorfismo (Lema 4.1) y por lo tanto $\mathrm{c}_j(E) - \mathrm{c}_j(F) = 0$. Para $j = m$, de $\mathrm{c}_m(\hat{E}) - \mathrm{c}_m(\hat{F}) = 0$ sólo podemos deducir que $\mathrm{c}_m(\hat{E}) - \mathrm{c}_m(\hat{F})$ está en el rango de $\smile_{\mathbf{e}_{\mathcal{M}}} : H^0(\mathcal{M}) \to H^{2m}(\mathcal{M})$. Como $H^0(\mathcal{M}) \approx \mathbb{Z}$, el rango de $\smile_{\mathbf{e}_{\mathcal{M}}}$ en este caso consiste de los múltiplos enteros de $\mathbf{e}_{\mathcal{M}}$, y $\mathrm{c}_m(\hat{E}) - \mathrm{c}_m(\hat{F}) = \kappa \mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ para algún $\kappa \in \mathbb{Z}$. □

Es claro que si las clases de Chern de E y las de F están relacionadas como en el Teorema, entonces las clases de $\hat{E}$ y las de $\hat{F}$ son iguales. El problema estaría por lo tanto completamente resuelto si el mapa que a un fibrado vectorial complejo asigna su clase total de Chern fuera inyectivo. Esto, sin embargo no es verdad, excepto en el caso de fibrados complejos de rango 1. Para otros casos especiales ver [1, 10, 16, 20, 21]).

5 Suficiencia en el caso de fibrados de rango 1

Para fibrados vectoriales complejos de rango 1, llamados fibrados de líneas complejas, la condición del Teorema 4.4 también es suficiente para la existencia de operadores pseudodiferenciales elípticos, porque para ellos, la clase c_1 determina el fibrado.

Supongamos que $\rho : E \to \mathcal{M}$ es un fibrado de líneas complejas. Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un cubrimiento de $\mathcal{M}$ por abiertos tales que E es trivial sobre U_α para todo α, y para cualquier α_0, $\alpha_1 \in A$, $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}$, si no es vacío, es simplemente conexo.[11] En esta sección $\mathcal{M}$ tiene cualquier dimensión, pero conviene tener en mente como ejemplo concreto el caso $\mathcal{M} = S^2$.

Tenemos trivializaciones $\phi_\alpha : \rho^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ para cada $\alpha \in A$, y si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\phi_\beta \phi_\alpha^{-1}(q, z) = (q, h_{\beta\alpha}(q)z)$ con $h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}\backslash 0$ una función suave. Como $U_\alpha \cap U_\beta$ es simplemente conexo, existe para cada α, $\beta \in A$ una función $k_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$ tal que $h_{\beta\alpha} = e^{-2\pi i k_{\beta\alpha}}$. Estas $k_{\beta\alpha}$ no son únicas, pero la única ambiguedad reside en tomar constantes enteras $m_{\alpha\beta}$ y reemplazar $k_{\beta\alpha}$ por $k_{\beta\alpha} + m_{\beta\alpha}$. El signo $-$ en la definición de las $k_{\beta\alpha}$ en términos de las $h_{\beta\alpha}$ es una convención. De (1.1) sabemos que $h_{\beta\alpha} = 1/h_{\alpha\beta}$. Podemos suponer que nuestra escogencia de los $k_{\beta\alpha}$ refleja esto: $k_{\beta\alpha} = -k_{\alpha\beta}$. También de (1.1) sabemos que $h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} h_{\alpha\beta} = 1$ en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, es decir, $1 = e^{-2\pi i [k_{\beta\gamma} + k_{\gamma\alpha} + k_{\alpha\beta}]}$:

$$c_{\alpha\beta\gamma} = k_{\beta\gamma} - k_{\alpha\gamma} + k_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z} \text{ si } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset \tag{5.1}$$

Esta colección de números $c_{\alpha\beta\gamma}$ para cada α, β, γ con $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ es un cociclo de Čech, esto es, ella satisface

$$c_{\beta\gamma\delta} - c_{\alpha\gamma\delta} + c_{\alpha\beta\delta} - c_{\alpha\beta\gamma} = 0 \ \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ tales que } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\delta \neq \emptyset, \tag{5.2}$$

y por lo tanto determina una clase de cohomología de Čech. La fórmula (5.1) parece decir que las $\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$ son una cofrontera, pero esto no es verdad pues los $k_{\alpha\beta}$ de esa fórmula no son enteros, sino funciones. Si a los $k_{\beta\alpha}$ les sumamos enteros $m_{\beta\alpha}$ con $m_{\beta\alpha} = -m_{\alpha\beta}$, entonces a la cocadena en (5.1) le hemos sumado una cofrontera de Čech, y eso no cambia la clase.[12]

[11] Por ejemplo, podemos tomar una métrica riemanniana en $\mathcal{M}$ y cubrir $\mathcal{M}$ con abiertos U_α geodésicamente convexos. En este caso, las intersecciones $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ son geodésicamente convexas, por lo tanto simplemente conexos (incluso contractibles).

[12] Para construir la cohomología de Čech con coeficientes en $\mathbb{Z}$ de un espacio topológico $\mathcal{X}$, uno comienza con un cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $\mathcal{X}$ por abiertos. Una q-cocadena ($q = 0, 1, \ldots$) es un conjunto

$$c = \{c_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_q} : U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q} \to \mathbb{Z} : (\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \in A^{q+1},\ c_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_q} \text{ es continua}\}$$

Las $c_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_q}$ deben ser antisimétricas en los índices, por ejemplo $c_{\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha}$. El conjunto de tales q-cocadenas se denota $\mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$. Se define $\delta : \mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \to \mathcal{C}^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ así: δc es el

Uno puede demostrar que esta clase es en realidad $c_1(E)$, según la Definición 4.2.

Por otro lado, comenzando con una cociclo $c = \{c_{\alpha\beta\gamma}\}$ (satisface (5.2)), podemos definir con ellas un fibrado de rango 1. Primero queremos encontrar funciones suaves $\tilde{k}_{\alpha\beta}$ definidas en $U_\alpha \cap U_\beta$ tales que $c_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{k}_{\beta\gamma} - \tilde{k}_{\alpha\gamma} + \tilde{k}_{\alpha\beta}$. Para ello aplicamos el primer paso de un esquema general para convertir cohomología de Čech con coeficientes en $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{Z}$) en cohomología de de Rahm.[13] Sea $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\mathfrak{U}$; esto es, $\sum \chi_\alpha = 1$, la clausura K_α de $\{q \in \mathcal{M} : \chi_\alpha(q) \neq 0\}$ está contenida en U_α, y para cada compacto $K \subset \mathcal{M}$, $\{\alpha : K \cap K_\alpha \neq \emptyset\}$ es finito. Dado el cociclo $\{c_{\alpha\beta\gamma}\}$, definimos $\tilde{k}_{\alpha\beta} = \sum_\mu \chi_\mu c_{\mu\alpha\beta}$. Estas son funciones definidas en $U_\alpha \cap U_\beta$, y

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{\beta\gamma} - \tilde{k}_{\alpha\gamma} + \tilde{k}_{\alpha\beta} &= \sum_\mu \chi_\mu [c_{\mu\beta\gamma} - c_{\mu\alpha\gamma} + c_{\mu\alpha\beta}] \\ &= \sum_\mu \chi_\mu [-c_{\alpha\beta\gamma} + c_{\mu\beta\gamma} - c_{\mu\alpha\gamma} + c_{\mu\alpha\beta} + c_{\alpha\beta\gamma}] = \sum_\mu \chi_\mu c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta\gamma}\end{aligned}$$

usando (5.2) y que $\sum \chi_\mu = 1$. Estas $\tilde{k}_{\alpha\beta}$ pueden usarse para definir funciones de transición $\tilde{h}_{\alpha\beta} = e^{-2\pi i \tilde{k}_{\alpha\beta}}$. Definimos con ellas un fibrado vectorial de rango 1 de la siguiente manera. En la union disjunta $\bigsqcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times \mathbb{C}$ definimos una relación de equivalencia como la menor para la cual $(q,z) \in U_\alpha \times \mathbb{C} \sim (q,z') \in U_\beta \times \mathbb{C}$ si y sólo si $z' = h_{\beta\alpha}(q) z$, y definimos $\tilde{E}$ como el cociente. Si las $c_{\alpha\beta\gamma}$ ya provenían de un fibrado vía (5.1), entonces con $k'_\alpha = \sum_\mu \chi_\mu (\tilde{k}_{\mu\alpha} - k_{\mu\alpha})$ tenemos $k_{\alpha\beta} = \tilde{k}_{\alpha\beta} - (k'_\alpha - k'_\beta)$, y con esto uno prueba que el fibrado definido usando las $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ como funciones de transición es isomorfo a E. Todo esto es análogo a la construcción de fibrados de rango 1 sobre S^2 y al hecho de que sólo la clase de homotopía de las funciones de transición importan.

conjunto de funciones $\delta c_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{q+1}} : U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_{q+1}} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\delta c_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{q+1}} = \sum_{\ell=0}^{q+1} (-1)^q c_{\alpha_0\alpha_1\dots\hat{\alpha}_\ell\dots\alpha_{q+1}}.$$

Entonces $\delta\delta = 0$ (elemental pero fastidioso de probar). Se define

$$\check{H}^q(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) = \ker[\delta : \mathcal{C}^q(\mathfrak{U},\mathbb{Z}) \to \mathcal{C}^{q+1}(\mathfrak{U},\mathbb{Z})]/\delta(\mathcal{C}^{q-1}(\mathfrak{U},\mathbb{Z}))$$

y finalmente se toma el límite inductivo $\check{H}^q(\mathcal{X},\mathbb{Z}) = \varinjlim \check{H}^q(\mathfrak{U},\mathbb{Z})$ bajando por refinamientos de la partición. Cuando $\mathcal{X}$ es una variedad, frecuentemente basta tomar un refinamiento suficientemente fino con abiertos especiales. En lugar de $\mathbb{Z}$ uno puede poner otro grupo abeliano, ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$ por ejemplo). También puede suponerse que los $c_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_q}$ son funciones, o secciones de un fibrado (cohomología de haces). Para más sobre esto, ver [22]

[13] En la Sección 7 completaremos la cuenta para obtener una clase de de Rham que representa $c_1(E)$.

Teorema 5.1 *Hay una correspondencia* 1 *a* 1 *entre elementos de* $H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ *y fibrados vectoriales complejos* $E \to \mathcal{M}$ *de rango* 1.

Teorema 5.2 *Sea* $\mathcal{M}$ *compacta orientable de dimensión* ≥ 3. *Sean* E, $F \to \mathcal{M}$ *fibrados de líneas complejas. Entonces hay un operador (pseudo)diferencial elíptico de* $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E)$ *si y sólo si* E *es isomorfo a* F.

Demostración: Si E es isomorfo a F entonces hay un operador elíptico de E en F, sencillamente porque hay operadores elípticos de E en E. Por ejemplo, si $\nabla : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes T^*\mathcal{M})$ es una conexión en E y fijamos métricas, entonces $\nabla^*\nabla : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E)$ es un operador elíptico. Y si hay un operador pseudodiferencial elíptico $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E)$, entonces $\mathrm{c}_1(E) = \mathrm{c}_1(F)$ por el Teorema 4.4, pero esto implica que E es isomorfo a F por el Teorema 5.1. $\square$

Teorema 5.3 *Sea* $\mathcal{M}$ *compacta orientable de dimensión* 2. *Sean* E, $F \to \mathcal{M}$ *fibrados de líneas complejas. Entonces hay un operador (pseudo)diferencial elíptico* $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E)$ *si y sólo si* $\mathrm{c}_1(E) - \mathrm{c}_1(F) = \kappa \mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ *para algún* $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Ya sabemos que si hay un operador elíptico $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E)$, entonces se cumple la relación entre las clases de Chern. Para probar el converso, usamos que $\mathrm{c}_1(E \otimes G) = \mathrm{c}_1(E) + \mathrm{c}_1(G)$ cuando E y G son fibrados de líneas, ver más abajo. Usando luego que $\mathrm{c}_1(\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}) = -\mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ o $\mathrm{c}_1(\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}) = \mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ (que no demostraremos; este es el Teorema de Gauss-Bonnet) obtenemos por ejemplo que si $\mathrm{c}_1(F) = \mathrm{c}_1(E) - \kappa \mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ con $\kappa > 0$ entonces por el Teorema 5.1, F es isomorfo a $E \otimes \bigotimes_1^\kappa \bigwedge^{1,0}\mathcal{M}$, y por lo tanto el tal operador elíptico existe, debido al Teorema 3.1. $\square$

El que $\mathrm{c}_1(E \otimes G) = \mathrm{c}_1(E) + \mathrm{c}_1(G)$ es fácil de probar. Cubrimos $\mathcal{M}$ con abiertos U_α difeomorfos a discos tales que las intersecciones son simplemente conexas, y tales que E y G son ambos triviales sobre cada U_α. Sean ϕ_α, ψ_α trivializaciones para E y G sobre U_α, y escribamos

$$\phi_\beta \phi_\alpha^{-1}(q, z) = (q, h_{\beta\alpha}(q)z), \quad \psi_\beta \psi_\alpha^{-1}(q, z) = (q, m_{\beta\alpha}(q)z)$$

para obtener las funciones de transición. Sean $\sigma_\alpha(q) = \phi_\alpha^{-1}(q, 1)$, $\eta_\alpha(q) = \psi_\alpha^{-1}(q, 1)$, secciones, respectivamente, de E y G sobre U_α. Obtenemos trivializaciones para $E \otimes G$ definiendo $\tau_\alpha(\sigma_\alpha(q) \otimes \eta_\alpha(q)) = (q, 1)$. Entonces

$$\tau_\beta \tau_\alpha^{-1}(q, z) = (q, h_{\beta\alpha}(q) m_{\beta\alpha}(q) z).$$

Usando ahora que las funciones de transición de $E \otimes G$ son los productos $h_{\beta\alpha} m_{\beta\alpha}$, y que para definir c_1 uno usa logaritmo, que convierte productos en sumas, uno obtiene $\mathrm{c}_1(E \otimes H) = \mathrm{c}_1(E) + \mathrm{c}_1(G)$.

6 Equivalencia elíptica

Continuamos con el problema de la existencia de isomorfismos $p : \hat{E} \to \hat{F}$, donde E, $F \to \mathcal{M}$ son fibrados complejos, ahora de rango r. Los resultados de esta sección están contenidos en [9]. La observación de partida (más bien elemental) es:

Proposición 6.1 *Sean E, $F \to \mathcal{M}$ fibrados complejos de rango r. Supongamos que hay un isomorfismo $p : \hat{E} \to \hat{F}$. Si hay una sección $\zeta : \mathcal{M} \to S^*\mathcal{M}$, entonces E y F son isomorfos.*

Demostración: Sea $\pi : S^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ la proyección, de manera que por ejemplo $\hat{E} = \pi^*E$. De la definición (1.2), si $\sigma \in E_x$ entonces $(\zeta(x), \sigma) \in \pi^*E_{\zeta(x)}$. Por lo tanto podemos aplicar p: $p(\zeta(x), \sigma) \in \pi^*F_{\zeta(x)}$. Este elemento tiene la forma $(\zeta(x), a(x, \sigma)) \in S^*\mathcal{M} \times F$ con la segunda componente en F_x (de nuevo según (1.2), ahora con F en lugar de E). Obtenemos por lo tanto un mapa lineal $a(x) : E_x \to F_x$, y un homomorfismo $a : E \to F$. Este homomorfismo es continuo (suave) y el mapa análogo $F \to E$ construido usando p^{-1} es su inversa. Por lo tanto a es un isomorfismo. $\square$

Si $\dim \mathcal{M}$ es impar o $\mathcal{M}$ no es compacta,[14] entonces hay una sección global $\zeta : \mathcal{M} \to S^*\mathcal{M}$. Por lo tanto

Corolario 6.2 ([9]) *Sean E, $F \to \mathcal{M}$ fibrados complejos de rango r. Si $\dim \mathcal{M}$ es impar, o $\mathcal{M}$ no es compacta, entonces hay un operador pseudodiferencial elíptico de E en F si y sólo si E es isomorfo a F.*

Por lo tanto el único caso por discutir es el de variedades compactas (orientables) de dimensión par.

Si $S^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ no admite una sección local, fijemos un punto $x_0 \in \mathcal{M}$. Sea $U_1 = \mathcal{M}\backslash\{x_0\}$. En U_1 tenemos una sección local $\zeta_1 : U_1 \to S^*\mathcal{M}|_{U_1}$. Sea U_2 un entorno de x_0 difeomorfo a una bola en $\mathbb{R}^n$. En U_2 tambien existe una sección local $\zeta_2 : U_2 \to S^*\mathcal{M}|_{U_2}$. Si hay un isomorfismo entre $\hat{E}$ y $\hat{F}$, entonces la prueba de la Proposición 6.1 muestra que hay isomorfismos

$$h_1 : F|_{U_1} \to E|_{U_1}, \quad h_2 : F|_{U_2} \to E|_{U_2}.$$

Sea $h_{21} = h_2 h_1^{-1}$, un isomorfismo de $E|_{U_1 \cap U_2}$ en sí mismo. Este isomorfismo permite reconstruir F a partir de E, de manera similar a la construcción de fibrados sobre esferas a partir del fibrado trivial. Uno define $\tilde{F}$ como el cociente de la unión disjunta $E|_{U_1} \sqcup E|_{U_2}$ módulo la relación de equivalencia determinada por "$\sigma_1 \in E|_{U_1}$ es equivalente a $\sigma_2 \in E|_{U_2}$ si y sólo si $\sigma_2 = h_{21}\sigma_1$" y prueba que $\tilde{F}$ es isomorfo a F. Usaremos la notación $E_{\mathfrak{U}}$ para denotar el conjunto de clases de equivalencia por isomorfismo de fibrados $F \to \mathcal{M}$ obtenidos de E a partir de isomorfismos de $E|_{U_1 \cap U_2}$ en sí mismo.

[14] Siempre suponemos que $\mathcal{M}$ es orientable

Teorema 6.3 *Sean* E, $F \to \mathcal{M}$ *fibrados complejos de rango* r. *Si* $\hat{F}$ *y* $\hat{E}$ *son isomorfos (es decir,* E *y* F *están elípticamente relacionados), entonces* $F \in E_{\mathfrak{U}}$.

Un cálculo largo en [9] demuestra el siguiente resultado:

Proposición 6.4 *Sea* $\mathcal{M}$ *compacta de dimensión par* $2m$ *y* $E \to \mathcal{M}$ *un fibrado complejo de rango* r. *Si* $F \in E_{\mathfrak{U}}$, *entonces* $c(F) = c(E) + (m-1)!\kappa\mu$, *donde* μ *es un generador de* $H^{2m}(\mathcal{M})$ *y* κ *un entero, necesariamente* 0 *si* $r < m$.

Esta proposición es similar al Teorema 4.4. En el caso en que el rango de E es m, el número κ determina el fibrado F entre todos los fibrados en $E_{\mathfrak{U}}$. Si en realidad $\hat{E}$ es isomorfo a $\hat{F}$, entonces el número $(m-1)!\kappa$ es, debido al Teorema 4.4, un múltiplo de la característica de Euler $\chi(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$ (ver la fórmula (4.1)). Más precisamente

Teorema 6.5 *Sea* $\mathcal{M}$ *compacta de dimensión par* $2m$ *y* $E \to \mathcal{M}$ *un fibrado complejo de rango* m. *Si* F *(necesariamente en* $E_{\mathfrak{U}}$*) está elípticamente relacionado con* E, *entonces*

$$\mathrm{c}(F) = \mathrm{c}(E) + (m-1)!\kappa\chi(\mathcal{M})\mu, \tag{6.1}$$

donde μ *es un generador de* $H^{2m}(\mathcal{M})$ *y* κ *un entero. En este caso,* E *y* F *son isomorfos si y sólo si* $\kappa = 0$, *es decir, sus clases de Chern son iguales.*

Para la demostración, que también es un cálculo largo, ver [9]. Notemos que $\chi(\mathcal{M})\mu = \pm\mathbf{e}_{\mathcal{M}}$. No tenemos un converso a éste teorema cuando $m > 1$, ni tampoco un teorema similar a este cuando el rango de los fibrados no es m, excepto si $\dim \mathcal{M} = 2$ o los fibrados son de rango 1. En este último caso, ya discutimos el problema completamente en cualquier dimensión, en los Teoremas 5.2 y 5.3. Algo más de información puede extraerse observando que luego de fijar un marco de E sobre U_2, los isomorfismos de $E|_{U_1 \cap U_2}$ en sí mismo (sus clases de homotopía) pueden identificarse con elementos de $\pi_{2m-1}(\mathrm{U}(r))$ (E de rango r, $\dim \mathcal{M} = 2m$, y $\mathrm{U}(r)$ es el grupo de matrices unitarias $r \times r$). Desafortunadamente los grupos de homotopía $\pi_k(\mathrm{U}(m))$ no se conocen excepto en ciertos casos. Para más sobre esto último, consultar por ejemplo [4] y [11].

Supongamos ahora que $\dim \mathcal{M} = 2$, $\mathcal{M}$ compacta orientable. Si $E \to \mathcal{M}$ es un fibrado de rango $r > 1$, entonces E tiene un subfibrado trivial de rango $r - 1$ (ver [8, pág. 99, Teorema 1.2] , es decir, E es isomorfo al fibrado $E_1 \otimes \mathbb{C}^{r-1}$, donde E_1 es un fibrado de líneas complejas completamente determinado por E (vía $\mathrm{c}_1(E)$). Debido a esto, al considerar la existencia de operadores elípticos del fibrado E en otro fibrado F basta considerar el caso en que el rango de los fibrados es 1. Usando el Teorema 5.3 obtenemos entonces

Teorema 6.6 *Sea $\mathcal{M}$ compacta orientable de dimensión 2. Sean E, $F \to \mathcal{M}$ fibrados de rango r. Hay un operador (pseudo)diferencial elíptico*

$$P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$$

si y sólo si $\mathrm{c}_1(F) = \mathrm{c}_1(E) + \kappa \mathbf{e}_{\mathcal{M}}$ con algún entero κ.

7 Carácter de Chern, clase de Todd y conexiones

El carácter de Chern y la clase de Todd son otras clases características asociadas a un fibrado vectorial complejo $E \to \mathcal{M}$, que se obtienen a partir de las clases de Chern y que intervienen en la fórmula del índice.

Para el carácter de Chern, una definición es como sigue. Supongamos que el fibrado tiene rango r. Sea D la matriz diagonal con entradas $x_1, \dots, x_r$ en la diagonal. La función analítica $f : x \mapsto \operatorname{tr} e^D$, definida para todo x, es simétrica: $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = f(x_1, \dots, x_r)$ si $(i_1, \dots, i_r)$ es un reordenamiento de $(1, \dots, r)$. Por lo tanto sus polinomios de Taylor f_N de orden N también lo son, y podemos escribirlos como funciones polinomiales de las funciones simétricas elementales $\sigma_1 = \sum_i x_i$, $\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, etc.: existe un único polinomio $p_N(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ de orden N tal que $f_N(x) = p_N(\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x))$. El carácter total de Chern de E es la expresión en $H^{\mathrm{par}}(\mathcal{M}, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{j \geq 0} H^{2j}(\mathcal{M}, \mathbb{Q})$ que se obtiene al sustituir $\sigma_1 = \mathrm{c}_1(E)$, $\sigma_2 = \mathrm{c}_2(E)$, … , $\sigma_r = \mathrm{c}_r(E)$ en p_N con N suficientemente grande. En el cálculo de

$$\mathrm{ch}(E) = p_N(\mathrm{c}_1(E), \dots, \mathrm{c}_r(E)),$$

los productos son productos copa. El cálculo debe hacerse con cohomología racional porque los polinomios p_N tienen coeficientes en $\mathbb{Q}$. Basta tomar $N = [\![\dim \mathcal{M}/2]\!] + 1$.

En general, cualquier función analítica simétrica f en r variables permite la construcción de clases especiales.

Otra manera de obtener la clase y carácter de Chern de un fibrado como clases de cohomología reales, (ver [5, 12, 13]), es mediante conexiones. Recordemos que una conexión en el fibrado $E \to \mathcal{M}$ es un operador diferencial lineal $\nabla : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes \bigwedge^1 \mathcal{M})$ con la propiedad (3.4). Dada una conexión ∇_0 en E, se definen operadores $\nabla_k : C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes \bigwedge^k \mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes \bigwedge^{k+1} \mathcal{M})$,

$$\nabla(\sigma \otimes \alpha) = \nabla\sigma \wedge \alpha + \sigma \otimes d\alpha,$$

también de primer orden. El operador $\nabla_1 \nabla_0 : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; E \otimes \bigwedge^2 \mathcal{M})$ es en realidad de orden 0, dado por un homomorfismo Ω de E en $E \otimes \bigwedge^2 \mathcal{M}$.

Esta es la curvatura de la conexión. Si las σ_μ son un marco local para E, hay 2-formas Ω^ν_μ tales que $\Omega(\sigma_\mu) = \sum_\nu \sigma_\nu \otimes \Omega^\nu_\mu$. La forma obtenida al calcular formalmente

$$\det(\mathrm{Id} + \frac{i}{2\pi}[\Omega^\nu_\mu]) = 1 + \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{tr}[\Omega^\nu_\mu] + \cdots + \left(\frac{i}{2\pi}\right)^r \det[\Omega^\nu_\mu] \tag{7.1}$$

(usando $\wedge$ como producto) no depende del marco σ_μ y puede probarse que representa la clase total de Chern en cohomología real (ver [5, pág. 77, (2.11)], también [12]).

Igualmente, la forma

$$\mathrm{tr}\exp(\frac{i}{2\pi}[\Omega^\nu_\mu]) = r + \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{tr}[\Omega^\nu_\mu] + \cdots = r + \mathrm{c}_1(E) + \frac{1}{2}(\mathrm{c}_1(E)^2 - 2\,\mathrm{c}_2(E)) + \cdots$$

no depende del marco y representa $\mathrm{ch}(E)$ en cohomología real.

Finalmente, la clase de Todd de E es la clase $\mathrm{Td}(E)$ obtenida usando la función simétrica

$$\mathrm{td}(x) = \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}$$

La clase de Todd interviene en la fórmula del índice, de la manera siguiente. La complexificación del fibrado tangente de $\mathcal{M}$, $\mathbb{C}T\mathcal{M}$, es un fibrado complejo, por lo tanto admite clases de Chern, y en consecuencia clase de Todd. Esta la denotamos $\mathrm{Td}(\mathcal{M})$.

En lo que resta de esta sección veremos cómo en el caso de un fibrado $E \to \mathcal{M}$ de rango 1, la clase de Chern (como clase en cohomología de Čech con coeficientes en $\mathbb{Z}$), vista como cohomología real, puede calcularse usando una conexión, ilustrando con esto la fórmula (7.1). Supongamos que el fibrado tiene funciones de transición como en la Sección 5 (usamos la notación introducida en esa sección). Con ellas tenemos por un lado la clase de Chern $\mathrm{c}_1(E)$, expresada como clase de cohomología mediante la fórmula (5.1). Como en la Sección 5 definimos $\tilde{k}_{\alpha\beta} = \sum_\nu \chi_\nu c_{\nu\alpha\beta}$. Definimos ahora $c_{\alpha\beta} = d\tilde{k}_{\alpha\beta}$. Estas 1-formas, definidas sobre $U_\alpha \cap U_\beta$, satisfacen

$$c_{\beta\gamma} - c_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta} = 0 \text{ en } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

(porque $c_{\beta\gamma} - c_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta} = d(\tilde{k}_{\beta\gamma} - \tilde{k}_{\alpha\gamma} + \tilde{k}_{\alpha\beta}) = dc_{\alpha\beta\gamma}$) y debido a esto, la 2-forma $c_\alpha = d\sum_\mu \chi_\mu c_{\mu\alpha}$, definida inicialmente en U_α, satisface $c_\alpha = c_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$, y por lo tanto éstas determinan una 2-forma global c, que calcularemos. Primero, usando las definiciones de $c_{\alpha\beta\gamma}$ y $\tilde{k}_{\alpha\beta}$,

$$c_{\alpha\beta} = \sum_\mu d\chi_\mu\,[k_{\alpha\beta} - k_{\mu\beta} + k_{\mu\alpha}] = \sum_\mu d\chi_\mu\,[-k_{\mu\beta} + k_{\mu\alpha}]$$

usando $d\sum\chi_\mu = 0$. El lado derecho es

$$
\begin{aligned}
&d[\sum_\mu \chi_\mu\,(-k_{\mu\beta}+k_{\mu\alpha})] - \sum_\mu \chi_\mu\,(-dk_{\mu\beta}+dk_{\mu\alpha})\\
&= d[\sum_\mu \chi_\mu\,(-k_{\mu\beta}+k_{\mu\alpha})] + \sum_\mu \chi_\mu\, dk_{\alpha\beta} = d[\sum_\mu \chi_\mu\,(-k_{\mu\beta}+k_{\mu\alpha})] + dk_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}
\end{aligned}
$$

esta vez usando que $k_{\mu\beta} - k_{\mu\alpha} = k_{\alpha\beta} - c_{\mu\alpha\beta}$ y recordando que las $c_{\alpha\beta\gamma}$ son constantes. Segundo,

$$
c_\alpha = d\sum_\nu \chi_\nu c_{\nu\alpha} = \sum_\nu d\chi_\nu \wedge d[\sum_\mu \chi_\mu(-k_{\mu\alpha}+k_{\mu\nu})] + d\sum_\nu \chi_\nu dk_{\nu\alpha}
$$

Como $d\sum_\nu \chi_\nu = 0$, el primer término en la derecha es igual a

$$
\sum_\nu d\chi_\nu \wedge d\sum_\mu \chi_\mu k_{\mu\nu} = d\sum_\nu \chi_\nu \wedge d\sum_\mu \chi_\mu k_{\mu\nu} = d\eta
$$

una forma exacta globalmente definida. Ya mencionamos que c_α es independiente de α, y por lo tanto define una 2-forma global $\tilde{c} = \sum_\nu d\chi_\nu \wedge dk_{\nu\alpha} + d\eta$. Por lo tanto, $\mathrm{c}_1(E)$ está representada en cohomología de de Rham por la clase de

$$
\sum_\nu d\chi_\nu \wedge dk_{\nu\alpha}.
$$

Regresando a la definición de las $k_{\alpha\beta}$, recordemos que $h_{\alpha\beta} = e^{-2\pi i k_{\alpha\beta}}$, y por lo tanto $dk_{\alpha\beta} = \frac{i}{2\pi}\frac{dh_{\alpha\beta}}{h_{\alpha\beta}}$:

$$
\mathrm{c}_1(E) = \frac{i}{2\pi}\sum_\nu d\chi_\nu \wedge \frac{dh_{\nu\alpha}}{h_{\nu\alpha}} \quad \text{en cohomología real.} \tag{7.2}
$$

Definimos ahora una conexión en E. Sea $\sigma_\alpha : U_\alpha \to E|_{U_\alpha}$ la sección tal que $\phi_\alpha(\sigma_\alpha(q)) = (q,1) \in U_\alpha \times \mathbb{C}$. Como $\phi_\beta(\phi_\alpha^{-1}(q,1)) = (q, \phi_{\beta\alpha}(q))$, tenemos $\phi_\alpha^{-1}(q,1) = h_{\beta\alpha}\sigma_\beta$, y por lo tanto

$$
\sigma_\alpha = h_{\beta\alpha}\sigma_\beta \tag{7.3}
$$

En $E|_{U_\alpha}$ definimos la conexión ∇_α como aquella para la cual $\nabla_\alpha\sigma_\alpha = 0$ (esto la determina completamente, pues σ_α es un marco global en U_α). Definimos la conexión ∇ en E como $\nabla = \sum_\nu \chi_\nu\nabla_\nu$. Calcularemos $\nabla\sigma_\alpha$ usando (7.3) dos veces:

$$
\nabla\sigma_\alpha = \sum_\nu \chi_\nu\nabla_\nu\sigma_\alpha = \sum_\nu \chi_\nu\nabla_\nu h_{\nu\alpha}\sigma_\nu = \sum_\nu \chi_\nu\sigma_\nu \otimes dh_{\nu\alpha} = \sum_\nu \chi_\nu\sigma_\alpha \otimes \frac{dh_{\nu\alpha}}{h_{\nu\alpha}},
$$

en la última igualdad usando $\sigma_\nu = h_{\alpha\nu}\sigma_\alpha = \frac{1}{h_{\nu\alpha}}\sigma_\alpha$. Esto es,

$$\nabla\sigma_\alpha = \sigma_\alpha \otimes (\sum_\nu \chi_\nu \frac{dh_{\nu\alpha}}{h_{\nu\alpha}}).$$

La 1-forma $\omega_\alpha = \sum_\nu \chi_\nu \frac{dh_{\nu\alpha}}{h_{\nu\alpha}}$, definida en U_α, es la forma de conexión de ∇ respecto a σ_α. El diferencial de esta forma es independiente de α, y es la forma de curvatura de ∇:

$$\Omega = d\sum_\nu \chi_\nu \frac{dh_{\nu\alpha}}{h_{\nu\alpha}} = \sum_\nu d\chi_\nu \wedge \frac{dh_{\nu\alpha}}{h_{\nu\alpha}}$$

Por lo tanto, de (7.2)

$$[\frac{i}{2\pi}\Omega] = \mathrm{c}_1(E) \quad \text{en cohomología real.} \tag{7.4}$$

donde [] quiere decir clase. Supongamos que ∇' es otra conexión en E. Si σ es una sección de E y f una función, uno calcula que $\nabla'(f\sigma) - \nabla(f\sigma) = f(\nabla'\sigma - \nabla\sigma)$ usando (3.4). Esto implica que $\nabla' - \nabla$ es un operador de orden 0, dado por un homomorfismo $E \to E \otimes \bigwedge^1 \mathcal{M}$: hay una 1-forma η tal que $\nabla'(\sigma) - \nabla(\sigma) = \sigma \otimes \eta$ para toda sección σ. Por lo tanto $\nabla'\sigma_\alpha = \nabla\sigma_\alpha + \sigma_\alpha \otimes \eta = \sigma_\alpha \otimes (\omega_\alpha + \eta)$, y la curvatura de ∇' es $\Omega' = d(\omega_\alpha + \eta) = \Omega + d\eta$. Como $d\eta$ es exacta (η está globalmente definida), las clases de de Rham de Ω y Ω' son iguales. Obtenemos que la fórmula (7.4) vale con cualquier conexión.

8 El teorema del Indice de Atiyah-Singer

Sean H y K espacios de Hilbert, $\mathcal{D} \subset H$ un subespacio denso, y $P : \mathcal{D} \to K$ un operador lineal, no necesariamente continuo. Supongamos que P es cerrado, es decir, $\mathcal{D}$ con la norma $u \mapsto \|u\|_P = \|u\|_H + \|Pu\|_K$ es completo. Decimos que P es Fredholm si el núcleo $\ker P$ de P es de dimensión finita, el rango $P(\mathcal{D})$ es cerrado, y $\operatorname{coker} P = H/P(\mathcal{D})$ es de dimensión finita. El índice de un operador Fredholm es el número

$$\operatorname{Ind} P = \dim\ker P - \dim\operatorname{coker} P \tag{8.1}$$

Este número no cambia bajo perturbaciones pequeñas de P, es decir, si a P se le suma un operador $Q : \mathcal{D} \to K$ continuo respecto a la norma $\|\cdot\|_P$, con norma suficientemente pequeña. Tampoco cambia bajo perturbaciones relativamente compactas arbitrarias de P: $\operatorname{Ind} P = \operatorname{Ind} P + Q$ si $Q : \mathcal{D} \to K$ manda conjuntos acotados de $\mathcal{D}$ en conjuntos relativamente compactos de K.

Los operadores diferenciales (o pseudodiferenciales) lineales elípticos (con coeficientes suaves) entre fibrados vectoriales E y F sobre una variedad compacta $\mathcal{M}$ son Fredholm, y por lo tanto tienen un índice.

Dos operadores elípticos P, $P' : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$ con el mismo símbolo principal difieren en un operador relativamente compacto respecto a cualquiera de ellos y por lo tanto los índices de P y P' son iguales: el índice de un operador elíptico depende sólo del símbolo principal. Más aún, dos operadores elípticos con símbolos principales suficientemente cercanos en la norma uniforme tienen el mismo índice. Como consecuencia de esto, dos operadores elípticos cuyos símbolos principales se pueden conectar por una familia continua de símbolos elípticos tienen el mismo índice. El índice depende sólo de la clase de homotopía del símbolo principal.

Esto es indicativo de que el índice de un operador elíptico debería estar asociado a un objeto de carácter topológico. Esto es verdad y la descripción precisa del índice analítico en terminos de construcciones topológicas usando p es el teorema del índice de Atiyah-Singer.

El primer paso en la fórmula de Atiyah-Singer es la construcción de un fibrado vectorial que codifique el símbolo principal del operador, el isomorfismo $p : \hat{E} \to \hat{F}$.

Sea $\pi_\Sigma : \Sigma \to \mathcal{M}$ el fibrado de esferas del fibrado $T^*\mathcal{M} \oplus \mathbb{R} \to \mathcal{M}$. Concretamente, fijemos una métrica g en $T^*\mathcal{M}$ (una métrica riemanniana en $\mathcal{M}$). En cada fibra $T_x\mathcal{M} \oplus \mathbb{R}$ de $T^*\mathcal{M} \oplus \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ tenemos una esfera $\Sigma_x = \{(\xi, t) : g(\xi, \xi) + t^2 = 1\}$ de dimensión $n = \dim \mathcal{M}$. El punto de Σ_x de la forma $(0, 1)$ lo denotamos $\mathfrak{n}(x)$, y el punto $(0, -1)$, $\mathfrak{s}(x)$. Esto define secciones suaves $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s} : \mathcal{M} \to \Sigma$. Sea $\mathcal{U}_\mathfrak{n}$ el conjunto Σ menos la imagen de $\mathfrak{s}$, y $\mathcal{U}_\mathfrak{s}$ el conjunto Σ menos la imagen de $\mathfrak{n}$. La intersección $\mathcal{U}_\mathfrak{n} \cap \mathcal{U}_\mathfrak{s}$ de estos dos abiertos se puede contraer al ecuador en Σ, el fibrado de esferas $S^*\mathcal{M}$ (el ecuador en la fibra Σ_x es $S^*_x\mathcal{M}$), moviendo puntos a lo largo de meridianos. Por lo tanto podemos considerar el isomorfismo $p : \hat{E} \to \hat{F}$ como el isomorfismo

$$p : \pi_\Sigma^* E|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n} \cap \mathcal{U}_\mathfrak{s}} \to \pi_\Sigma^* F|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n} \cap \mathcal{U}_\mathfrak{s}}.$$

y usarlo para definir un fibrado $H \to \Sigma$ de manera análoga a la construcción de fibrados en S^2 de la Sección 2 o la construcción de los fibrados en $E_\mathfrak{U}$ en la Sección 6, como clases de equivalencia de elementos de $\pi_\Sigma^* E|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n}} \sqcup \pi_\Sigma^* F|_{\mathcal{U}_\mathfrak{s}}$ módulo la relación de equivalencia definida por p. Para más detalles, consultar [7].

Teorema 8.1 (Teorema del índice de Atiyah-Singer) *Sea $\mathcal{M}$ una variedad compacta y sean E, $F \to \mathcal{M}$ fibrados vectoriales complejos de rango r, $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$ un operador pseudodiferencial elíptico con símbolo principal p. Sea $H \to \Sigma$ el fibrado obtenido a partir de E, F y p por el procedimiento descrito arriba. Entonces*

$$\operatorname{Ind}(P) = (-1)^{\dim \mathcal{M}} \int_\Sigma \pi_\Sigma^* \operatorname{Td}(\mathcal{M}) \wedge \operatorname{ch}(H).$$

La fórmula usa clases *reales*, y dice que del producto $\operatorname{Td}(\mathcal{M}) \wedge \operatorname{ch}(H)$ uno debe tomar la parte de grado tope $= \dim \Sigma = 2 \dim \mathcal{M}$, e integrar esa forma. La integral está calculada usando una orientación específica de Σ.

9 El índice de algunos operadores

Con el teorema del índice y la información provista por el Teorema 6.5, puede uno probar:

Teorema 9.1 *Sea $\mathcal{M}$ compacta orientable de dimensión par $2m$. Sean E, $F \to \mathcal{M}$ fibrados vectoriales complejos de rango r, $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$ un operador pseudodiferencial elíptico. Si $r < m$ entonces $\operatorname{Ind}(P) = 0$. Si $r = m$ y $\mathbf{e}_{\mathcal{M}} \neq 0$, entonces $\operatorname{Ind}(P)$ depende sólo del número κ en la fórmula (6.1).*

Dado el Teorema de Atiyah-Singer, las cuentas son relativamente sencillas, usando una sucesión de Mayer-Vietoris. Como la fórmula de Atiyah-Singer para el índice es una integral de formas de grado tope, uno puede trabajar directamente con cohomología de de Rham. La estrategia es calcular las clases de Chern de H y luego el carácter de Chern. Con la notación de la sección anterior, notemos que $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cup \mathcal{U}_{\mathfrak{s}} = \Sigma$ y recordemos que $S^*\mathcal{M}$ es un retracto de $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$. La sucesión de Mayer-Vietoris asociada a $(\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}, \mathcal{U}_{\mathfrak{s}})$,

$$\cdots \to H^{q-1}(\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}) \xrightarrow{\delta} H^q(\Sigma) \xrightarrow{\mathbf{r}} H^q(\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}) \oplus H^q(\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}) \xrightarrow{\mathbf{s}} H^q(\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(\Sigma) \to \cdots,$$

una sucesión exacta en donde $\mathbf{r}\alpha = r_{\mathfrak{n}}^*\alpha \oplus r_{\mathfrak{s}}^*\alpha$, $r_{\mathfrak{n}}^*$ y $r_{\mathfrak{s}}^*$ son restricción a $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ y $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$, respectivamente, y $\mathbf{s}(\alpha_{\mathfrak{n}} \oplus \alpha_{\mathfrak{s}}) = \alpha_{\mathfrak{n}} - \alpha_{\mathfrak{s}}$. El homomorfismo δ es el siguiente. Sea ϕ una función suave en Σ, $\phi = 1$ cerca de la imagen de la sección $\mathfrak{n}$, igual a 0 cerca de la imagen de la sección $\mathfrak{s}$. Si $\beta \in H^{q-1}(\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}})$, sea b una forma que representa β. Sea $\delta\beta$ la clase de $d\phi \wedge b$. Uno puede probar que $\delta : H^{2j-1}(\mathcal{U}_{\mathfrak{n}} \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{s}}) \to H^{2j}(\Sigma)$ es el mapa 0 si $j < m$ (también si $j = m$ y además $\mathbf{e}_{\mathcal{M}} \neq 0$). La restricción de $\mathrm{c}_j(H)$ a $\mathcal{U}_{\mathfrak{n}}$ es $r_{\mathfrak{n}}^*\pi_\Sigma^*\,\mathrm{c}_j(E)$, y la restricción a $\mathcal{U}_{\mathfrak{s}}$ es $r_{\mathfrak{n}}^*\pi_\Sigma^*\,\mathrm{c}_j(F)$. Supongamos que el rango de E es menor que m. Ya del Teorema 4.4 sabemos que si $j < m$, $\mathrm{c}_j(E) = \mathrm{c}_j(F)$, así que $\mathbf{r}(\mathrm{c}_j(H)) = 0$. Pero $\mathbf{r}$ es inyectivo. Por lo tanto $\mathrm{c}_(H) = 0$. Como el rango r de H es igual al de E, las clases $\mathrm{c}_j(H)$ para $j > r$ son cero. Por lo tanto $\mathrm{ch}(H) = r$. De esto resulta que la clase $\pi_\Sigma^*\,\mathrm{Td}(\mathcal{M}) \wedge \mathrm{ch}(H)$ no tiene componentes de grado $\dim \Sigma$, y su integral es 0.

El caso en que el rango de E es m es algo más delicado, pero la conclusión es que $c(H)$ sólo depende de k (según la fórmula (6.1)), y de $c(E)$ y $c(F)$. De allí, $\mathrm{ch}(H)$ no depende de p. Los detalles están en [9].

Nuestros cómputos del índice extienden algunos resultados conocidos, ver [2, 14, 18].

Como ejemplo, calculemos el índice de un operador elíptico entre fibrados de rango 1 sobre una variedad compacta orientable de dimensión 2. Suponemos dados los fibrados E, $F \to \mathcal{M}$ de rango 1 y un operador elíptico $P : C^\infty(\mathcal{M}; E) \to$

$C^\infty(\mathcal{M};F)$ con símbolo principal p. Sabemos que $c_1(F)-c_1(E)=\kappa\mathbf{e}_\mathcal{M}$ con algún entero κ.

Con la notación de la Sección 8, sea $\pi_\Sigma:\Sigma\to\mathcal{M}$ la proyección. El fibrado $H\to\Sigma$ se construye pegando el fibrado $\pi_\Sigma^*E|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n}}\to\mathcal{U}_\mathfrak{n}$ con el fibrado $\pi_\Sigma^*F|_{\mathcal{U}_\mathfrak{s}}\to\mathcal{U}_\mathfrak{s}$ usando p. Sea χ una función suave en Σ tal que $\chi=1$ en un entorno de la imagen de la sección $\mathfrak{n}$ (los "polos norte" de Σ), y $\chi=0$ en un entorno de la imagen de $\mathfrak{s}$. Sean ∇^E y ∇^F conexiones en E y F. Ellas inducen conexiones $\nabla^\mathfrak{n}$ en $H|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n}}\approx\pi_\Sigma^*E|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n}}$ y $\nabla^\mathfrak{n}$ en $H|_{\mathcal{U}_\mathfrak{s}}\approx\pi_\Sigma^*E|_{\mathcal{U}_\mathfrak{s}}$. Sea $\nabla=\chi\nabla^\mathfrak{n}+(1-\chi)\nabla^\mathfrak{s}$.

Como $\mathbb{C}T\mathcal{M}$ es trivial porque $\mathcal{M}$ es de dimensión 2, tenemos $\mathrm{Td}(\mathcal{M})=1$. Por lo tanto, para calcular la forma de grado tope ($=4$) de $\mathrm{Td}(\mathcal{M})\wedge\mathrm{ch}(H)$ sólo necesitamos encontrar $\frac{1}{2!}\frac{1}{(2\pi i)^2}\Omega\wedge\Omega$ con Ω la curvatura de ∇. Una sección local σ de E, digamos sobre $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}$, induce una seccion local de $H|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n}}$ sobre $\pi_\Sigma^{-1}(\mathcal{U})$ que también denotaremos por σ. Igual una sección local η de F sobre $\mathcal{U}$ induce una sección η de $H|_{\mathcal{U}_\mathfrak{n}}$. Sobre el abierto $\mathcal{U}_\mathfrak{n}\cap\mathcal{U}_\mathfrak{n}\cap\pi_\Sigma^{-1}(\mathcal{U})$ ellas están relacionadas por $p(\sigma)=f\eta$ con alguna función $f:\mathcal{U}_\mathfrak{n}\cap\mathcal{U}_\mathfrak{n}\cap\pi_\Sigma^{-1}(\mathcal{U})\to\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\nabla\sigma&=\chi\nabla^E\sigma+(1-\chi)\nabla^F f\eta\\&=\chi\sigma\otimes\pi_\Sigma^*\omega^E+(1-\chi)f\eta\otimes(\pi_\Sigma^*\omega^F+f^{-1}df)\\&=\sigma\otimes[\chi\pi_\Sigma^*\omega^E+(1-\chi)(\pi_\Sigma^*\omega^F+f^{-1}df)]\end{aligned}$$

con $\nabla^E\sigma=\sigma\otimes\omega^E$ (en $E\to\mathcal{M}$) y similarmente ω^F. Esto dice que la forma de conexión de ∇ repecto a σ es

$$\omega=\chi\pi_\Sigma^*\omega^E+(1-\chi)(\pi_\Sigma^*\omega^F+f^{-1}df)$$

y en consecuencia, la curvatura de ∇ está dada localmente por

$$\Omega=\chi\pi_\Sigma^*\Omega^E+(1-\chi)\pi_\Sigma^*\Omega^F+d\chi\wedge(\pi_\Sigma^*\omega^E-\pi_\Sigma^*\omega^F-f^{-1}df)$$

Usando que el producto exterior de 2-formas es conmutativo y que el producto de 2-formas en $\mathcal{M}$ es nulo (porque $\dim\mathcal{M}=2$) obtenemos

$$\begin{aligned}\Omega\wedge\Omega&=-2\chi\pi_\Sigma^*\Omega^E\wedge d\chi\wedge f^{-1}df-2(1-\chi)\pi_\Sigma^*\Omega^F\wedge d\phi_+\wedge f^{-1}df\\&=\pi_\Sigma^*\Omega^E\wedge f^{-1}df\wedge d\chi^2-\pi_\Sigma^*\Omega^F\wedge f^{-1}df\wedge d(1-\chi)^2\end{aligned}$$

y $\mathrm{ch}_2(H)=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\Omega\wedge\Omega$. Esta 4-forma está calculada usando información local (σ y η, que aparecen a través de f en la fórmula), pero en realidad es independiente de esa información local. Para calcular la integral, pensamos que respecto a un marco ortonormal local de $T^*\mathcal{M}$, $S^*\mathcal{M}$ se ve como

$$\{(q;(\xi,\eta))\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2:\xi^2+\eta^2=1\}=\mathcal{U}\times S^1$$

y que Σ se ve como

$$\{(q;(\xi,\eta),t)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}:\xi^2+\eta^2+t^2=1\}.$$

La orientación es aquella para la cual, cerca de $t=0$, la forma

$$-dx\wedge dy\wedge(\eta\,d\xi-\xi\,d\eta)\wedge dt$$

es positiva (ver [7]). De

$$\pi_\Sigma^*\Omega^E\wedge f^{-1}df\wedge d\chi^2=\pi_\Sigma^*\Omega^E\wedge f^{-1}df\wedge\frac{\partial\chi^2}{\partial t}dt$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}\times S^2}\pi_\Sigma^*\Omega^E\wedge f^{-1}df\wedge d\chi^2&=-\int_{\mathcal{U}\times S^1}\pi_\Sigma^*\Omega^E\wedge f^{-1}df\\&=-\int_{\mathcal{U}}\Omega^E\int_{S^1}f^{-1}df\\&=-2\pi i\,\deg(f)\int_{\mathcal{U}}\Omega^E\end{aligned}$$

donde $\deg f=\frac{1}{2\pi i}\int_{S_q^*\mathcal{M}}\frac{df}{f}$ (un número independiente de q). De esto resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\frac{i}{2\pi}\right]^2\int_\Sigma\Omega\wedge\Omega&=\frac{1}{2}\deg(f)\int_{\mathcal{M}}\frac{i}{2\pi}\Omega^E+\frac{i}{2\pi}\Omega^F\\&=\frac{1}{2}\deg(f)\int_{\mathcal{M}}\mathrm{c}_1(E)+\mathrm{c}_1(F),\end{aligned}$$

es decir,

$$\operatorname{Ind}P=\int\mathrm{Td}(\mathcal{M})\wedge\mathrm{ch}(H)=\frac{1}{2}\deg(f)(\deg E+\deg F).$$

Por ejemplo, con E el fibrado trivial (cuyas secciones son funciones $\mathcal{M}\to\mathbb{C}$) y $F=\bigwedge^{1,0}\mathcal{M}$, tenemos el operador elíptico $\partial:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M};\bigwedge^{1,0}\mathcal{M})$ cuyo símbolo principal en coordenadas locales, en el punto $\xi\,dx+\eta\,dy$ de $S^*\mathcal{M}$ es la multiplicación por $\frac{i}{2}(\xi-i\eta)dz$ si $z=x+iy$ es una coordenada compleja local (según la fórmula (3.2)). El índice del mapa $\mathbb{R}^2\ni(\xi,\eta)\mapsto f(\xi,\eta)=\xi-i\eta\in\mathbb{C}$ con las orientaciones usuales es -1, y por la fórmula del índice,

$$\operatorname{Ind}\partial=\frac{1}{2}(-1)(\deg E+\deg F)=-\frac{1}{2}[0+(2g-2)]=1-g$$

lo cual es bien conocido.

Referencias

[1] Adachi, M., *A remark on Chern classes*, Sûgaku **11** (1959/1960), 225–226 (En japonés).

[2] Atiyah, M., *Topology of elliptic operators*, Proc. Sympos. Pure Math. **16** (1968), 101–119, Berkeley, 1968.

[3] Bär, C., *Elliptic symbols*, Math. Nachr **201** (1999), 7–35.

[4] Bott, R., *A report on the unitary group*, Proc. Sympos. Pure Math. **3** (1962), 1–6.

[5] Bott, R., Chern, S. S., *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections*, Acta Math. **114** (1965), 71–114.

[6] Bott, R., Tu, L. W., *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

[7] Gilkey, P. B., *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, 1984.

[8] Husemoller, D., *Fibre Bundles*, 2nd edition, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[9] Jacobowitz, H., Mendoza, G., *Elliptic equivalence of vector bundles*, (2000), preprint.

[10] Kervaire, M., *A note on obstructions and characteristic classes*, Am. J. Math. **81** 1959 773–784.

[11] Kervaire, M., *Some nonstable homotopy groups of Lie groups*, Illinois J. Math **4** (1960), 161–169.

[12] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of differential geometry*, Interscience Publishers, New York, 1969.

[13] Milnor, J., Stasheff, J., *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[14] Nirenberg, L., *Pseudo-differential operators*, in Proc. Sympos. Pure Math. **16** (1968), 149–167.

[15] Peetre, J., *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels*, Math. Scan. **7** (1959), 211–217 & **8** (1960), 116–120.

[16] Peterson, F., *Some remarks on Chern classes*, Ann. Math. **69** (1959), 414–420.

[17] Samleson, H., *Groups and spaces of loops*, Comm. Math. Helv. **28** (1954), 278–287.

[18] Seeley, R., *Regularization of Singular Integral Operators on compact manifolds*, Amer. J. Math. **83** (1961), 265–275.

[19] Steenrod, N., *Topology of fiber bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1951.

[20] Sternstein, M., *Necessary and sufficient conditions for homotopy classification by cohomology and homotopy homomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 250–256.

[21] Thomas, E., *Homotopy classification of maps by cohomology homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 138–151.

[22] Warner, F., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1983.