Las Olimpíadas Matemáticas de Centroamérica y el Caribe

José Heber Nieto
jhnieto@luz.ve
Departamento de Matemática
Facultad Exp. de Ciencias, La Universidad del Zulia
Apartado Postal 526, Maracaibo. Venezuela

Introducción

La *Olimpíada Matemática de Centroamérica y el Caribe* (OMCC) nació en 1999 con el propósito de promover la participación de los países de la región en concursos olímpicos de matemática, estimular la participación de jóvenes menores de 17 años en concursos matemáticos y fomentar el intercambio de experiencias académicas y organizativas para fortalecer el recurso humano involucrado en este tipo de eventos.

La OMCC se realiza con el auspicio permanente de la *Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura* (OEI) y el apoyo eventual de otras organizaciones públicas y privadas, según el país anfitrión.

Cada país participa con un equipo de hasta tres estudiantes y un profesor, como Jefe de Delegación. También pueden asistir otros profesores en calidad de observadores, tutores o asistentes al seminario que se desarrolla paralelamente a la competencia y que busca elevar el nivel matemático de los participantes, capacitándolos como promotores y entrenadores olímpicos.

El desarrollo de la Olimpíada es responsabilidad del Jurado Internacional, integrado por los Jefes de Delegación de los países participantes y un miembro designado por el Comité Organizador del país sede, quien lo preside. Este Jurado selecciona los problemas a proponer, establece los criterios de evaluación de los mismos y adjudica las medallas y otros premios.

La prueba se realiza en dos días consecutivos. Cada día los participantes disponen de cuatro horas y media para resolver tres problemas, cada uno de los cuales tiene un valor de siete puntos.

Durante los días siguientes los estudiantes confraternizan en paseos y otras actividades recreativas, mientras sus respuestas son evaluadas por sus respectivos Jefes de Delegación y por Tribunales designados para cada problema por el Comité Organizador. Posteriormente, en una sesión de *coordinación* entre los evaluadores se asignan los puntajes definitivos, quedando la decisión final a cargo del Jurado Internacional en caso de que se presenten diferencias de opinión irreconciliables. Las medallas se adjudican de tal manera que no más de la mitad de los participantes resulten premiados, con una proporción de 1:2:3 entre oro, plata y bronce. Los estudiantes que no obtienen medalla pero resuelven perfectamente un problema, reciben una mención honorífica.

Hasta el presente se han celebrado tres de estas Olimpíadas, en Costa Rica (1999), El Salvador (2000) y Colombia (2001). Las páginas siguientes contienen reseñas de cada una de ellas y los problemas propuestos. La próxima OMCC tendrá lugar en México en julio del 2002. Más información sobre esta olimpíada estará disponible en Internet en `http://einstein.posgrado.unam.mx/omm` y en `http://ichi.fismat.umich.mx/omm`. Luego se realizarán en Puerto Rico (2003), Panamá (2004) y Venezuela (2005).

I OMCC: Costa Rica, 1999

La primera OMCC se celebró en San José, Costa Rica, entre el 7 y el 11 de julio de 1999. En la misma participaron Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico y Venezuela. Los representantes de Venezuela fueron David Eduardo Seguí (Zulia), Homero Martínez (Mérida) e Isaac Cohen (Caracas), de los cuales el primero obtuvo medalla de oro y sus dos compañeros mención honorífica. El Profesor Jorge Salazar fue el Jefe de la Delegación.

El país que acumuló mayor puntuación fue Colombia (70 puntos), seguido de México (64), Cuba (58) y Venezuela (47).

Los problemas propuestos en esta ocasión fueron los siguientes.

1. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales diferentes sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B toda la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos lo sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son n personas?

2. Encontrar un entero positivo n de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la siguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en 500 parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número m que es divisor de n.

3. Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla '+'.

7	8	9	
4	5	6	+
1	2	3	

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla $+$. Pasa la calculadora a B, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A; a continuación pulsa $+$ y le devuelve la calculadora a A, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es ésta?

4. En el trapecio $ABCD$ de bases AB y CD, sea M el punto medio del lado DA. Si $\overline{BC} = a$, $\overline{MC} = b$ y el ángulo MCB mide 150^o, hallar el área del trapecio $ABCD$ en función de a y b.

5. Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a-2$ es un cuadrado perfecto. Demostrar que existen enteros positivos distintos b y c, tales que $a+b$, $a+c$, $b+c$ y $a+b+c$ son cuatro cuadrados perfectos.

6. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.

II OMCC: El Salvador, 2000

La segunda OMCC se realizó en El Salvador del 7 al 16 de julio del 2000. El Jurado Internacional estuvo presidido por el Ing. Carlos Canjura, y participaron los países siguientes: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Honduras, México, Nicaragua, Puerto Rico y Venezuela.

El país sede instituyó la *Copa El Salvador*, para premiar al país de mayor progreso relativo respecto a las dos olimpíadas anteriores.

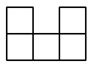
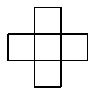
Los representantes de Venezuela fueron Adolfo Rodríguez (Guárico), quien obtuvo medalla de plata; Enrique Restrepo (Zulia), quien obtuvo medalla de bronce, y Héctor Chang (Caracas). El Profesor Henry Martínez fue el Jefe de la Delegación.

El país que acumuló mayor puntaje fue Cuba (95 puntos), cuyos representantes obtuvieron dos medallas de oro y una de plata, adjudicándose también la *Copa El Salvador*. Lo siguieron México (79), Colombia (62), Costa Rica (59), El Salvador (54) y Venezuela (52).

Los seis problemas propuestos fueron los siguientes.

1. Encontrar todos los números naturales de tres dígitos abc ($a \neq 0$) tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

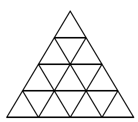
2. Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y n con piezas congruentes a

    y  .

   Notas:
   a) Las piezas no deben superponerse ni dejar huecos.
   b) Los cuadritos de las piezas son de lado 1.

3. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo (las diagonales quedan dentro del pentágono). Sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE, respectivamente. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo y que su área es igual a 2/9 del área del cuadrilátero $ABCD$.

4. En la figura, escribir un entero dentro de cada triangulito de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de vecinos.

   Nota: Dos triangulitos son *vecinos* si comparten un lado.

5. Sea ABC un triángulo rectángulo, C_1 y C_2 dos circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F ($F \neq A$) y C_1 corta al lado CA en el punto E ($E \neq A$). Además, BE corta a C_2 en P y CF corta a C_1 en Q. Demostrar que las longitudes de los segmentos AP y AQ son iguales.

6. Al escribir un entero $n \geq 1$ como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una *representación buena* de n.

   a) Escriba las 5 representaciones buenas de 10.

   b) ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

III OMCC: Colombia, 2001

La tercera OMCC tuvo lugar en Barranquilla, Colombia, del 23 al 30 de julio del 2001. Asistieron delegaciones de Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico y Venezuela. La organización estuvo a cargo de la Universidad Antonio Nariño, institución que administra las Olimpíadas Colombianas de Matemáticas, la Olimpíada Bolivariana y la Olimpíada Iberoamericana de Matemática para Estudiantes Universitarios (`http://olimpia.uanarino.edu.co`). La Rectora de la Universidad, Dra. María Falk de Losada, presidió el Jurado Internacional.

En esta oportunidad la delegación de Venezuela quedó en primer lugar al totalizar 94 puntos, seguida de México (90), Colombia (85), Cuba (83), Costa Rica (74), El Salvador (70) y Puerto Rico (61).

La delegación venezolana estuvo integrada por Héctor Chang (Caracas), Paul Monasterios (Caracas) y María Virginia Amesty (Zulia), con el autor de estas líneas como Jefe de Delegación.

Héctor Chang obtuvo la mayor puntuación individual de la competencia (40 puntos), ganando medalla de oro. Paul Monasterios obtuvo la tercera mayor puntuación (37), obteniendo medalla de plata.

México obtuvo una medalla de oro y dos de bronce, Colombia una de plata y dos de bronce, Cuba dos de plata, Costa Rica dos de bronce, al igual que El Salvador, y Puerto Rico una de plata.

Se otorgaron 8 menciones honoríficas y un premio especial por solución original a la medallista de Puerto Rico, Sherry Gong Li, de tan sólo doce años de edad. La Copa El Salvador se le adjudicó a Puerto Rico.

Se propusieron los seis problemas siguientes.

1. Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

2. Sea AB un diámetro de una circunferencia S con centro O y radio 1. Sean C y D dos puntos sobre S tales que AC y BD se cortan en un punto Q situado en el interior de S y $\angle AQB = 2\angle COD$. Sea P el punto de corte de las tangentes a S que pasan por los puntos C y D. Determinar la longitud del segmento OP.

3. Encontrar todos los números naturales N que cumplan las dos condiciones siguientes:

   - Sólo dos de los dígitos de N son distintos de 0 y uno de ellos es 3.
   - N es un cuadrado perfecto.

4. Determinar el menor entero positivo n para el cual existan enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, menores o iguales que 15 y no necesariamente distintos, tales que los cuatro últimos dígitos de la suma

$$a_1! + a_2! + \cdots + a_n!$$

sean 2001.

5. Sean a, b y c números reales tales que la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones reales distintas p_1, p_2 y la ecuación $cx^2+bx+a=0$ tiene dos soluciones reales distintas q_1, q_2. Se sabe que los números p_1, q_1, p_2, q_2, en ese orden, forman una progresión aritmética. Demostrar que $a+c=0$.

6. Se marcan 10000 puntos sobre una circunferencia y se numeran de 1 a 10000 en el sentido de las manecillas del reloj. Se trazan 5000 segmentos de recta de manera que se cumplan las tres condiciones siguientes:

   - Cada segmento une dos de los puntos marcados.
   - Cada punto marcado pertenece a uno y sólo un segmento.
   - Cada segmento intersecta exactamente a uno de los segmentos restantes.

   A cada segmento se le asocia el producto de los números asignados a sus dos puntos extremos. Sea S la suma de los productos asociados a todos los segmentos. Demostrar que S es múltiplo de 4.

Conclusiones

En sus tres años de existencia la Olimpíada Matemática de Centroamérica y el Caribe ha puesto de manifiesto el talento matemático de los jóvenes de la región. Los países con menor experiencia olímpica han elevado su nivel, comenzando a participar en competencias internacionales. Los países de mayor experiencia la han compartido con los demás y han tenido la oportunidad de preparar a sus estudiantes más jóvenes para eventos más exigentes, tales como la Olimpíada Iberoamericana, la Asiático-Pacífica o la Internacional.

Asimismo estas olimpíadas han permitido intercambiar experiencias educativas y estrechar lazos de amistad y cooperación entre países que tienen características y problemas similares.