

Estudio de Algunas Propiedades del Mar Usando Modelos Aleatorios

Joaquín Ortega

Departamento de Matemáticas, I.V.I.C.
Escuela de Matemáticas, U.C.V., Venezuela
jortega@ivic.ve

1 Introducción

En este trabajo presentamos una revisión de algunas técnicas clásicas para estudiar el estado del mar usando parámetros que pueden obtenerse a partir del espectro de energía de la ola, que es una de las funciones que registran, de manera rutinaria, las boyas. Los resultados que presentamos son bien conocidos y están ampliamente documentados en la literatura, de modo que el objetivo no es presentar resultados originales, sino más bien introducir un tema de aplicación de gran interés. En algunas instancias, particularmente en la sección dedicada a la estadística a largo plazo, presentamos únicamente técnicas clásicas de análisis. Hay desarrollos recientes, como las técnicas de “Peaks over thresholds”, que no han sido incluidas.

La idea fundamental es modelar la superficie del mar como una ‘superficie aleatoria’ que evoluciona en el tiempo, es decir, como un proceso aleatorio M que depende de la posición en el espacio \mathbf{x} , del tiempo t y, por supuesto, de un parámetro aleatorio ω que pertenece a un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) : $M(t, \mathbf{x}, \omega)$. Por costumbre omitiremos el parámetro ω .

La mayoría de los datos estadísticos sobre la altura del mar se obtienen o bien de boyas, barcos o plataformas estacionarias o bien de observaciones satelitales. En el primer caso la información que se obtiene es la evolución a lo largo del tiempo de la ola *en un punto fijo \mathbf{x} del espacio*. En este caso usaremos la notación $M(t)$ para la altura del nivel del mar en un punto fijo como función del tiempo.

Por otro lado, las observaciones satelitales son capaces de obtener información sobre grandes áreas de manera casi instantánea. Nos dan una ‘fotografía’ de lo que ocurre en el mar en un instante dado. Sin embargo, los satélites están en permanente movimiento y sólo nos proveen información instantánea sobre el

área barrida en su órbita. En este caso tenemos la altura del mar $M(\mathbf{x})$ como función de la ubicación espacial *en un instante de tiempo fijo*.

Vamos a concentrarnos para este trabajo en los modelos más sencillos, que corresponden a la primera situación: consideraremos que estamos observando al mar desde una posición fija, una boya por ejemplo, y registramos la altura del mar en ese punto como función del tiempo.

Como ejemplo de los datos de interés, en la Figura 1 presentamos tres registros de la altura del mar durante períodos de 20 minutos, tomados desde una plataforma fija¹.

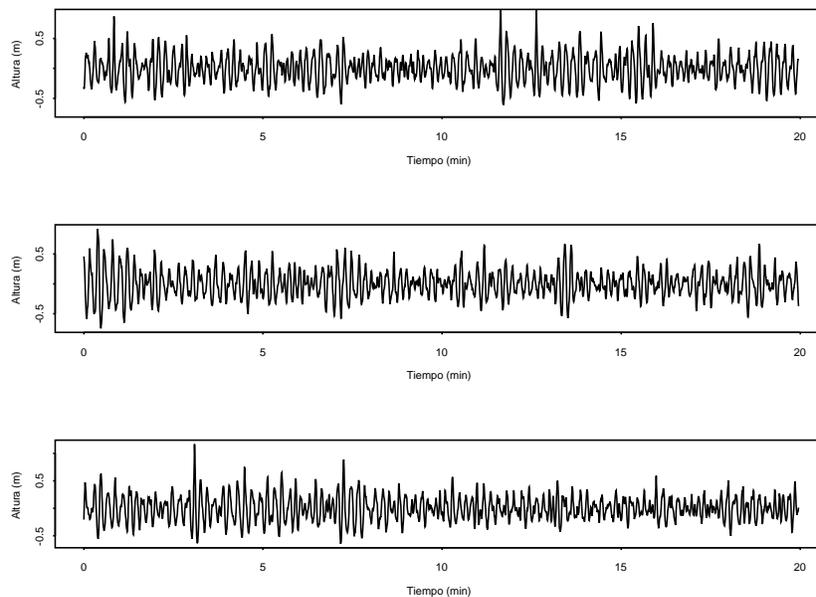


Figura 1
Tres registros de la altura del mar durante períodos de 20 minutos

Para poder obtener un modelo manejable que nos permita estudiar esta situación es necesario hacer algunas suposiciones. La primera de ellas tiene que ver con la permanencia en el tiempo de las condiciones del mar, es decir, la estacionaridad. En nuestro caso (y para procesos aleatorios en general) el término se refiere no a las olas sino a sus propiedades estadísticas.

¹Datos suministrados por el Instituto Meteorológico Noruego

Por supuesto, las condiciones del mar cambian con el tiempo, y con ellas los parámetros de las distribuciones estadísticas de la altura de las olas, su longitud, período, etc., de modo que esta hipótesis sólo se cumple parcialmente. Sin embargo, durante un intervalo de tiempo suficientemente largo de condiciones meteorológicas estables podemos suponer que la distribución de las olas en un punto específico no cambia con el tiempo. Tiene sentido entonces hablar de altura media, longitud media, período medio y otras características estadísticas en ese punto del espacio. Decimos en este caso que el mar está *completamente desarrollado*.

Supondremos, entonces, que el proceso que sirve de modelo es estacionario. Esto quiere decir que la distribución de $M(t+h)$ es la misma para cualquier valor de h , y en particular es siempre igual a la de $M(0)$. Más aún, para cualquier n y cualesquiera instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n la distribución del vector $(M(t_1+h), M(t_2+h), \dots, M(t_n+h))$ es independiente del valor de h .

Supondremos también que el nivel medio del mar es 0 y mediremos las variaciones respecto a él. Esto quiere decir que el proceso que consideramos es centrado: $EM(t) = 0$.

Nuestra tercera hipótesis pide que las trayectorias del proceso M sean continuas. M es en realidad una función sobre el espacio producto $[0, \infty) \times \Omega$ con la propiedad de que para cada $t \in [0, \infty)$ fijo, $M(t, \cdot)$ es medible. Si fijamos $\omega \in \Omega$ obtenemos una función

$$M(\cdot, \omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

que se conoce como una trayectoria del proceso. Pedimos que para casi todo $\omega \in \Omega$ (es decir, con probabilidad 1) esta función sea continua.

La cuarta hipótesis es que el proceso sea ergódico. Sin entrar en detalles sobre el significado técnico de esta hipótesis, es ella la que permite sustituir los valores esperados (teóricos) por promedios temporales (empíricos):

$$\begin{aligned} E(M(t)) &\equiv \int_{\Omega} M(t, \omega) dP(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u) du \\ \text{Cov}(M(t), M(t+h)) &\equiv \int_{\Omega} M(t, \omega) M(t+h, \omega) dP(\omega) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u) M(u+h) du \end{aligned}$$

Finalmente llegamos a la hipótesis de Gaussianidad. Es generalmente aceptado que estados completamente desarrollados del mar en aguas profundas pueden ser modelados por procesos Gaussianos. Esto quiere decir que la distribución de la altura de la ola en un punto dado y en un instante de tiempo t tiene la siguiente función de distribución:

$$P(M(t) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

donde σ^2 es la varianza de la distribución.

En realidad la hipótesis de Gaussianidad quiere decir más que esto. Para cualquier valor de n y cualesquiera instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n la distribución del vector $(M(t_1 + h), M(t_2 + h), \dots, M(t_n + h))$ tiene densidad Gaussiana:

$$f_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}' \Sigma^{-1} \mathbf{u}\right\}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\Sigma = (\text{Cov}(M(t_i), M(t_j)))$.

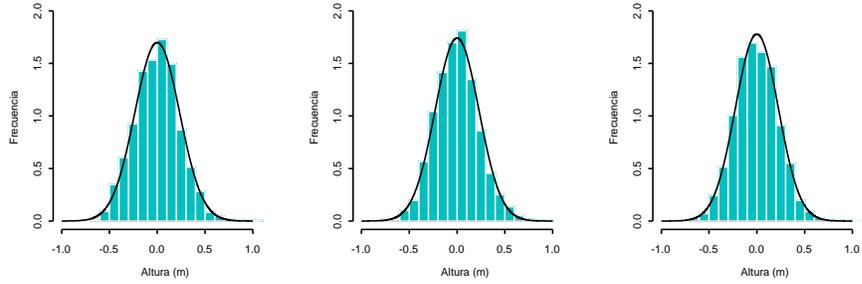


Figura 2

Histogramas correspondientes a los registros presentados en la Figura 1.

Como estamos suponiendo que el proceso es estacionario y centrado, la función de covarianza debe satisfacer

$$r(s, t) = \text{Cov}(M(s), M(t)) = E(M(s)M(t)) = r(|s - t|)$$

En particular si $s = t$

$$r(s, s) = \text{Var}(M(s)) = E(M^2(s)) = r(0)$$

La función de covarianza r es par y por lo tanto, si es diferenciable en 0, la derivada debe ser nula. Más aún, si r tiene dos derivadas en el origen la segunda derivada debe ser negativa: $r''(0) < 0$.

2 La Representación Espectral

La función de covarianza de cualquier proceso estacionario es positiva-definida: Para cualquier n y cualesquiera z_1, \dots, z_n ,

$$\sum_{i,j=1}^n r(t_i - t_j) z_i z_j = \sum_{i,j=1}^n E(M(t_i)M(t_j)) z_i z_j = E\left(\sum_{i=1}^n M(t_i) z_i\right)^2 \geq 0$$

y por el Teorema de Bochner es la Transformada de Fourier de una función de distribución que llamaremos S , es decir, r tiene una representación espectral:

$$r(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau h} dS(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau h) dS(\tau)$$

donde S se conoce como la función de distribución espectral. Su derivada s , si existe, es la densidad espectral y se conoce también como el espectro.

Si la función de covarianza es integrable entonces la fórmula anterior es invertible

$$S(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\tau h) r(h) dh$$

Usando la representación espectral tenemos

$$r'(h) = \int_{-\infty}^{\infty} -\tau \operatorname{sen}(\tau h) dS(\tau)$$

$$r''(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \cos(\tau h) dS(\tau)$$

y en particular

$$r''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau).$$

La integral anterior se conoce como el segundo momento espectral:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = -r''(0)$$

Si r no es dos veces diferenciable en 0 entonces

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = \infty$$

La existencia del segundo momento espectral está asociada a la regularidad de las trayectorias del proceso. Cuando $m_2 < \infty$ la función de covarianza tiene el siguiente desarrollo cerca del origen:

$$r(h) = \sigma^2 - \frac{m_2 h^2}{2} + o(h^2)$$

Más aún, es posible mostrar que $m_2 < \infty$ si y sólo si M es diferenciable en media cuadrática, es decir, si hay un proceso $M'(t)$ tal que

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} \rightarrow M'(t) \quad \text{en } L^2$$

y entonces

$$E(M'(t)) = 0, \quad \text{Var}(M'(t)) = -r''(0) = m_2$$

Este proceso $M'(t)$ es Gaussiano, independiente de $M(t)$ y tiene función de covarianza

$$\text{Cov}(M'(t), M(t+h)) = -r''(h)$$

La densidad conjunta de M y M' es

$$p(u, z) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{m_2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} + \frac{z^2}{m_2} \right) \right\}$$

En el estudio de las olas el espectro juega un papel fundamental y se interpreta, como es usual, como la distribución de la energía por frecuencia. Observamos que $r(0) = \text{Var}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) d\tau$, de modo que la varianza del proceso representa la energía total. El espectro es simétrico y normalmente sólo considera la parte positiva, y se renormaliza multiplicándola por 2. Usaremos la misma notación s para el espectro renormalizado.

La gráfica que presentamos a continuación presenta ejemplos de densidades espectrales medidas en cuatro lugares distintos: Mar del Norte (Prof. 4.320 m.), Golfo de México (Prof. 80 m.), Alaska (Prof. 460 m.) y Hawai (Prof. 5.000 m.)². En cada gráfica representamos una sucesión de cuatro espectros para la misma ubicación, tomados cada 12 horas. Teniendo en cuenta la interpretación del espectro como la distribución de energía por frecuencia y el hecho de que el área bajo la curva representa la energía total, esta sucesión da una idea de lo rápido que pueden cambiar las condiciones en un punto fijo del mar. En la tabla que se incluye en cada figura se muestra el área total bajo la curva, es decir, la energía total registrada por el espectro.

²Los datos para producir estos gráficos fueron tomados de la página web del National Data Buoy Center de los Estados Unidos. <http://seaboard.ndbc.noaa.gov>

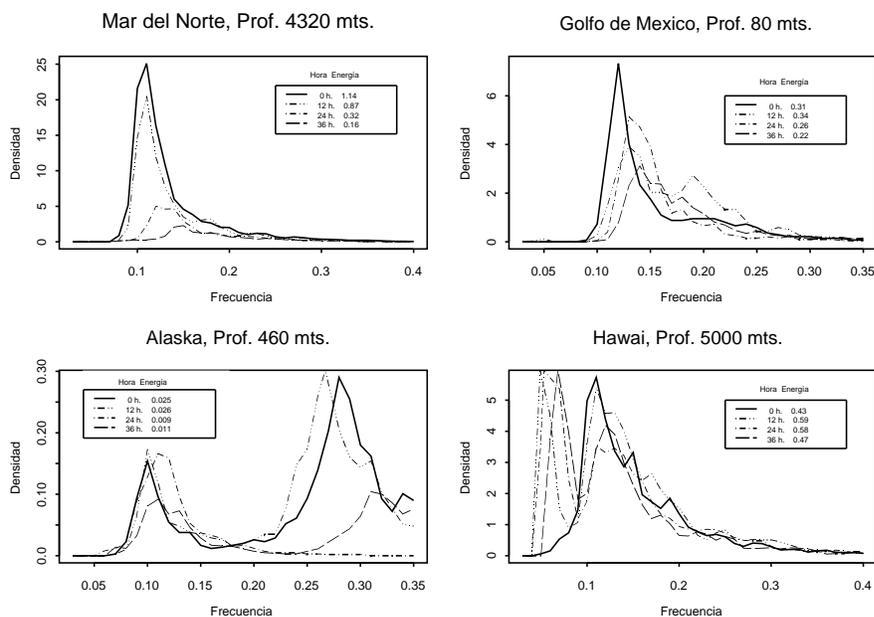


Figura 3

Densidades espectrales para cuatro ubicaciones distintas.

La principal fuente de irregularidades en las olas es el viento local. Sin embargo, existen sistemas de olas conocidos en inglés como 'swell' y que en algunos casos se traduce como 'mar gruesa', 'mar de fondo' o 'marejada', que viajan grandes distancias y se mezclan con las olas generadas localmente. El 'swell' se define como las olas que viajan fuera del área donde han sido generadas. Durante su desplazamiento las olas más pequeñas son superadas por olas mayores y esto produce un tren de ondas más regular que se mueve en una dirección común. La mezcla del 'swell' con las olas locales no es fácil de identificar en el registro de alturas. Sin embargo, puede ser identificado en el espectro. En la figura anterior, en los casos de Alaska y Hawai observamos espectros bimodales que reflejan la existencia de dos trenes de olas superpuestos con distintas frecuencias dominantes. Uno de ellos corresponde al 'swell' y el otro corresponde a las olas generadas localmente.

Para estudiar los espectros lo usual es utilizar densidad espectrales 'típicas', que dependen de algunos parámetros que deben ser estimados en cada caso. Esto permite comparar resultados obtenidos bajo diferentes hipótesis y tiene la ventaja adicional de que los cálculos se simplifican. Los dos tipos de espectro

más comunes son el de Pierson-Moskowitz

$$s(\tau) = \frac{g^2 \alpha}{\tau^5} e^{-\beta(\tau_p/\tau)^4}, \quad \text{para } 0 \leq \tau \leq \tau_{max}$$

con frecuencia modal τ_p , y el espectro JONSWAP (JOint North-Sea WAVE Project) definido por

$$s(\tau) = \frac{g^2 \alpha}{\tau^5} e^{-\beta(\tau_p/\tau)^4} \times \gamma^{\exp[-(1-\tau/\tau_p)^2/2\sigma_\tau^2]}$$

donde $\sigma_\tau = 0.07$ para $\tau < \tau_p$ y $\sigma_\tau = 0.09$ para $\tau > \tau_p$.

Por lo general estas fórmulas no describen con mucha precisión a los espectros reales, sino que hay diferencias en algunos lugares. Sin embargo, los espectros anteriores pueden ser combinados para obtener espectros más realistas. Esto es lo que ocurre comunmente cuando se mezclan olas de distintos orígenes, como olas locales y 'swell', en cuyo caso el resultado es la superposición de dos sistemas de olas y el espectro es la mezcla de los dos espectros individuales.

3 Características de las Olas

3.1 Altura Significativa

La medida más importante de la severidad del mar es la *altura significativa*. Esta medida trata de indicar la altura de las olas más altas que uno puede encontrarse durante un período razonable de tiempo. Significativa quiere decir que es suficientemente alta como para tener efecto sobre un barco o sobre una estructura colocada en el oceano.

Ha habido varios intentos de dar una definición precisa de este concepto, comenzando con observaciones visuales desde barcos hasta medidas más precisas realizadas con boyas marinas. Una de las definiciones generalmente aceptadas es la siguiente.

Definición La altura significativa de un estado del mar se define como

$$H_{m_0} = 4\sqrt{\text{Var}(M(t))}$$

3.2 Características basadas en cruces del nivel medio

Otras características importantes también tienen más de una definición. La definición usual está basada en los cruces del cero. Sea $M(t)$ el proceso que modela las olas en un punto del espacio; $M(t)$ representa la altura sobre el nivel medio del mar. Supongamos que $M(t)$ cruza este nivel medio hacia abajo en

los instantes t_1, t_2, \dots, t_n . El tiempo entre dos cruces sucesivos del nivel medio hacia abajo definen el período de la ola. Usaremos la notación $T_{d,k}$:

$$T_{d,k} = t_{k+1} - t_k$$

La distancia vertical entre el máximo y el mínimo valor del proceso en este intervalo se define como la altura de la ola. Usaremos la notación $H_{d,k}$.

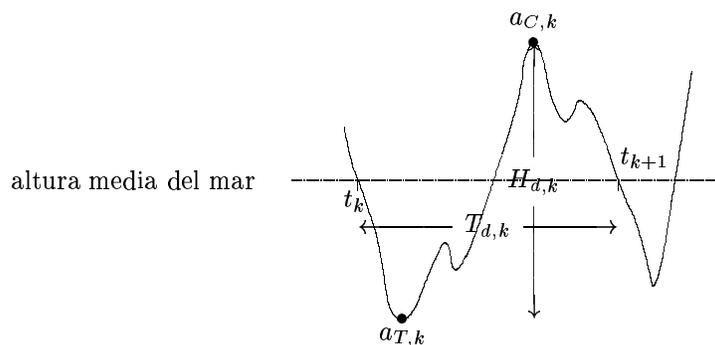


Figura 4

Una *cresta* a_C es el máximo valor de M para t en un intervalo entre dos cruces sucesivos hacia abajo del nivel medio: $t_k < t < t_{k+1}$. De manera similar un *seno* a_S es el (valor absoluto del) valor mínimo en el mismo intervalo de tiempo. Para distinguir diferentes crestas y senos en los intervalos sucesivos ponemos un índice k en cada valor: $(a_{C,k}, a_{S,k})$.

3.3 Características basadas en extremos sucesivos

Otra definición posible considera todos los extremos de la ola. Supongamos que la ola tiene una sucesión de mínimos locales $(M_{m,k})$ y máximos locales consecutivos $(M_{M,k})$. Una ola min-max es el par $(M_{m,k}, M_{M,k})$ de valores mínimo y máximo consecutivos. La altura de la ola min-max es la diferencia entre estos valores mientras que el período min-max es la diferencia de tiempos correspondiente. De manera similar se define las olas max-max y min-min.

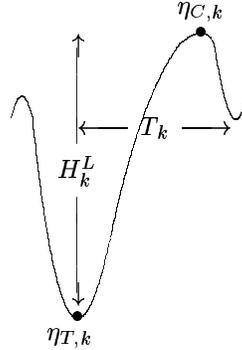


Figura 5

3.4 Otras Características

El momento espectral de orden n se define como

$$m_n = \int_0^{\infty} \tau^n s(\tau) d\tau$$

En la sección anterior definimos el segundo momento espectral y vimos que para un proceso Gaussiano, su existencia está relacionada con la regularidad de las trayectorias. Esto es cierto en general: la existencia de momentos de orden superior está asociada a una mayor regularidad de las trayectorias.

Los momentos espectrales no son los únicos parámetros asociados a la densidad espectral de interés en el estudio del mar. Ya vimos que la altura significativa es otro de ellos. En términos de los momentos espectrales la altura significativa es

$$H_{m_0} = 4\sqrt{\text{Var}(M(t))} = 4\sqrt{m_0}$$

A partir del espectro vemos que la *frecuencia media* está dada por

$$\frac{m_1}{m_0}$$

Si el espectro está concentrado alrededor de una frecuencia dominante, la frecuencia media da el período medio.

Otros parámetros de interés son

$$\tau_{i,j} = \sqrt{\frac{m_i}{m_j}}$$

y el ancho espectral, que se define por

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{2,0}}{\tau_{4,2}}\right)^2}$$

En la siguiente gráfica mostramos algunos de los espectros considerados anteriormente y sus anchos espectrales.

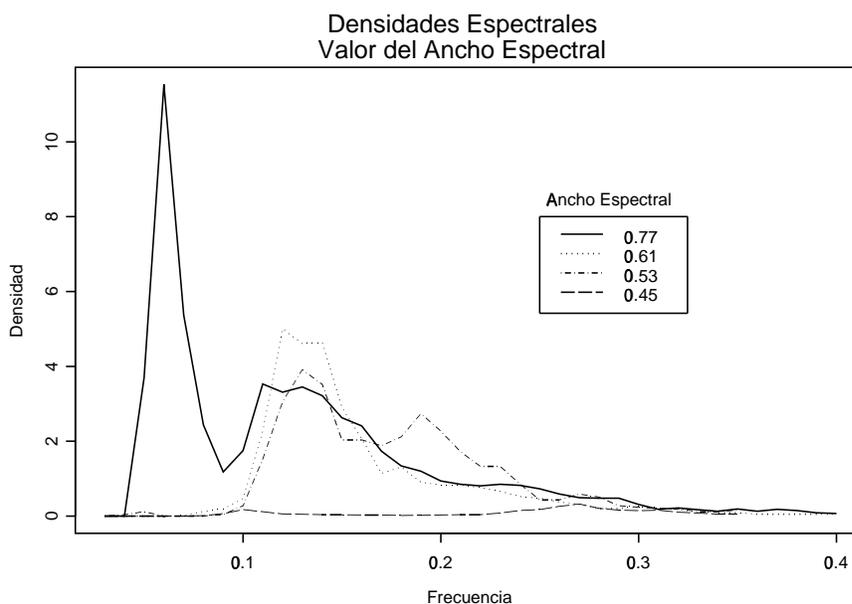


Figura 6
Ancho de Banda Espectral para cuatro espectros

4 Cruces y Fórmula de Rice

Llamemos G_u al conjunto de las funciones continuas en $[0, 1)$ y que no son idénticamente iguales a u en ningún subintervalo. Las trayectorias de un proceso estacionario están en G_u c. p. 1: todo intervalo contiene al menos un racional y

$$P(X(\cdot) \notin G_u) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(X(t_j) = u) = 0$$

donde t_j es una enumeración de los racionales.

Diremos que $f \in G_u$ tiene un cruce hacia arriba del nivel u en el punto $t_0 > 0$ si para algún $\varepsilon > 0$

$$f(t) \leq u \text{ en el intervalo } (t_0 - \varepsilon, t_0)$$

y

$$f(t) \geq u \text{ en } (t_0, t_0 + \varepsilon).$$

Por continuidad $f(t_0) = u$ y por la definición de G_u

$$f(t) < u \text{ para algunos puntos } t \in (t_0 - \nu, t_0)$$

$$f(t) > u \text{ para algunos puntos } t \in (t_0, t_0 + \nu)$$

Definimos $N_u(I)$ como el número de cruces hacia arriba del nivel u en el intervalo I y $N_u(t) = N_u((0, t])$.

Fórmula de Rice

La fórmula de Rice permite calcular el valor esperado para el número de cruces en un intervalo:

$$\begin{aligned} E(N_u(1)) &= \int_0^\infty zp(u, z) dz \\ &= \int_0^\infty z \frac{1}{2\pi\sqrt{m_2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{z^2}{m_2}\right)\right\} dz \\ &= \frac{\sqrt{m_2}}{2\pi} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

5 Modelo de Banda Estrecha

Suponemos que el proceso que representa la altura de la ola es aproximadamente sinusoidal:

$$X(t) = a(t) \cos(w_0 t + \varepsilon(t))$$

donde $a(t)$ es la amplitud, $\varepsilon(t)$ es la fase y w_0 es la frecuencia donde se concentra el espectro. Tanto $a(t)$ como $\varepsilon(t)$ varían aleatoriamente con t pero lentamente: la velocidad es mucho menor que w_0 . Así

$$\begin{aligned} X'(t) &= a'(t) \cos(w_0 t + \varepsilon(t)) - a(t)(w_0 + \varepsilon'(t)) \operatorname{sen}(w_0 t + \varepsilon(t)) \\ &\approx -a(t)w_0 \operatorname{sen}(w_0 t + \varepsilon(t)) \end{aligned}$$

Por lo tanto la distribución conjunta de X y de X'/w_0 es

$$f\left(x, \frac{x'}{w_0}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + \left(\frac{x'}{w_0}\right)^2\right)\right\}.$$

A partir de aquí podemos obtener la densidad conjunta de a y ε :

$$f(a, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma} a e^{-a^2/2\sigma^2} \quad 0 \leq a < \infty, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi$$

y la marginal de la amplitud es una distribución de Rayleigh con parámetro $2\sigma^2$.

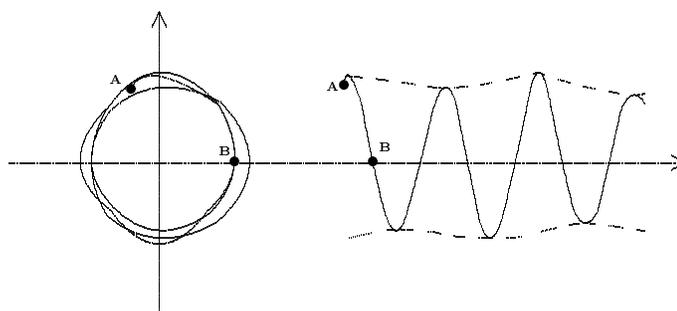


Figura 7
Modelo de Banda Estrecha

Recordamos que σ^2 es el área bajo la densidad espectral, de modo que si conocemos la densidad espectral podemos hacer predicción sobre la altura de olas.

6 Modelo de Banda Ancha

Para los procesos de banda estrecha la trayectoria tiene un sólo máximo durante cada medio ciclo y es éste el que determina la amplitud. Si el proceso no es de banda estrecha puede haber varios extremos durante el medio ciclo determinado por cruces sucesivos del nivel cero. Eliminamos ahora la restricción de que el proceso sea de banda estrecha. Podemos tener ahora máximos positivos y negativos.

Suponemos que el proceso tiene trayectorias continuamente diferenciables. El proceso X tiene un máximo local en t_0 si $X'(t)$ tiene un cruce hacia abajo en t_0 y una cantidad de resultados sobre máximos locales pueden obtenerse a partir de los resultados para cruces hacia abajo.

Para asegurar que X tiene sólo un número finito de máximos en un intervalo finito de tiempo basta pedir que

$$m_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 dS(x) = r^{(4)}(0) < \infty$$

Si $m_4 < \infty$ entonces X tiene segunda derivada (en media cuadrática) y $X(t), X'(t), X''(t)$ son conjuntamente Gaussianos con media 0 y matriz de covarianza.

$$\begin{pmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{pmatrix}$$

Si $m_4 < \infty$ tenemos

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X'(t), X'(t+h)) &= -r''(h) \\ &= m_2 - \frac{m_4}{2}h^2 + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

y si normalizamos

$$\text{Cov}\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{m_2}}, \frac{X'(t+h)}{\sqrt{m_2}}\right) = 1 - \frac{m_4}{2m_2}h^2 + o(h^2) \quad (h \rightarrow \infty)$$

Llamamos $N'(T)$ al número de máximos locales en $[0, T)$ para $X(t)$, que es igual al número de cruces hacia abajo del nivel cero de $X'(t)$, y obtenemos a partir de la fórmula de Rice que

$$E(N'(T)) = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2}\right)^{1/2}$$

Sea ahora $N'_u(T)$ el número de máximos locales de $X(t)$, $0 < t < T$, con altura mayor que u .

Proposición 1 *Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano con trayectorias continuamente diferenciables, con segunda derivada $X''(t)$ en media cuadrática que satisface $\text{Var}(X''(t)) = m_4 < \infty$ y tal que $X(t), X'(t), X''(t)$ tienen distribución no singular, entonces*

$$E(N'_u(T)) = T \int_u^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |z| p(x, 0, z) dz dx$$

donde $p(x, y, z)$ es la densidad conjunta de $X(t), X'(t), X''(t)$. Además, si X está normalizado

$$E(N'_u(T)) = \frac{T}{2\pi} \left[\left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2} \left(1 - \Phi \left(u \left(\frac{m_4}{D} \right)^{1/2} \right) \right) + (2\pi m_2)^{1/2} \phi(u) \Phi \left(\frac{um_2}{D^{1/2}} \right) \right]$$

donde $D = m_4 - m_2^2$.

Llamemos $s_1, s_2, \dots, s_{N'}$ los instantes en los cuales ocurren los $N' = N'(T)$ máximos locales en $[0, T]$ y sean s'_i los instantes de los mínimos, indexados de modo que $s_i < s'_i < s_{i+1}$. Los valores $X(s_1), X(s'_1), X(s_2), \dots$ representan las amplitudes aparentes mientras que $X(s_1) - X(s'_1)$ son las alturas de ola aparentes.

Observamos que

$$\max(X(s_1), \dots, X(s_{N'})) = \sup\{X(t); s_1 < t < s_{N'}\}$$

que es igual a $M(T) = \sup\{X(t); 0 < t < T\}$ si $M(T)$ no se alcanza en 0 ni en T .

Bajo las hipótesis anteriores, si $\text{Var}(X(t)) = m_0$, haciendo una normalización en la ecuación anterior y usando la siguiente notación

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2}, \quad \nu' = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2},$$

$$\varepsilon = \left(1 - \left(\frac{\nu}{\nu'} \right) \right)^{1/2} = \left(1 - \left(\frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right) \right)^{1/2}$$

obtenemos

$$E(N'_u(T)) = T \left[\nu' \left(1 - \Phi \left(\frac{u}{\varepsilon \sqrt{m_0}} \right) \right) + \nu \exp \left(\frac{-u^2}{2m_0} \right) \Phi \left(\frac{u \nu m_2}{\varepsilon \nu' \sqrt{m_0}} \right) \right]$$

El número esperado de máximos es $T\nu'$ y podemos considerar el cociente $E(N'_u(T))/T\nu'$ como una aproximación de la probabilidad de que un máximo local esté por encima del nivel $u > 0$. Definimos la función

$$F_{\max}(u) = 1 - \frac{E(N'_u(1))}{\nu'}$$

que es una función de distribución. La densidad correspondiente es

$$f_{\max}(u) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m_0}} \phi \left(\frac{u}{\varepsilon \sqrt{m_0}} \right) + \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{m_0} \right)^{1/2} \frac{u}{\sqrt{m_0}} \exp \left(\frac{-u^2}{2m_0} \right) \Phi \left(\frac{u(1 - \varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon \sqrt{m_0}} \right)$$

Si el proceso es ergódico,

$$\frac{N'_u(T)}{N'(T)} \rightarrow 1 - F_{\max}(u)$$

con probabilidad 1, de modo que $F_{\max}(u)$ es el límite de la distribución empírica de las amplitudes aparentes. La forma de la distribución depende del llamado parámetro de ancho espectral $\varepsilon = (1 - m_2^2/m_0m_4)^{1/2}$. Valores pequeños de ε corresponden a espectros de banda estrecha. En particular, si $\varepsilon = 0$ obtenemos la distribución de Rayleigh

$$\frac{u}{m_0} \exp\left\{-\frac{u^2}{2m_0}\right\}$$

mientras que para $\varepsilon = 1$ obtenemos la distribución Gaussiana truncada en 0

$$\sqrt{\frac{2}{\pi m_0}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2m_0}\right\}$$

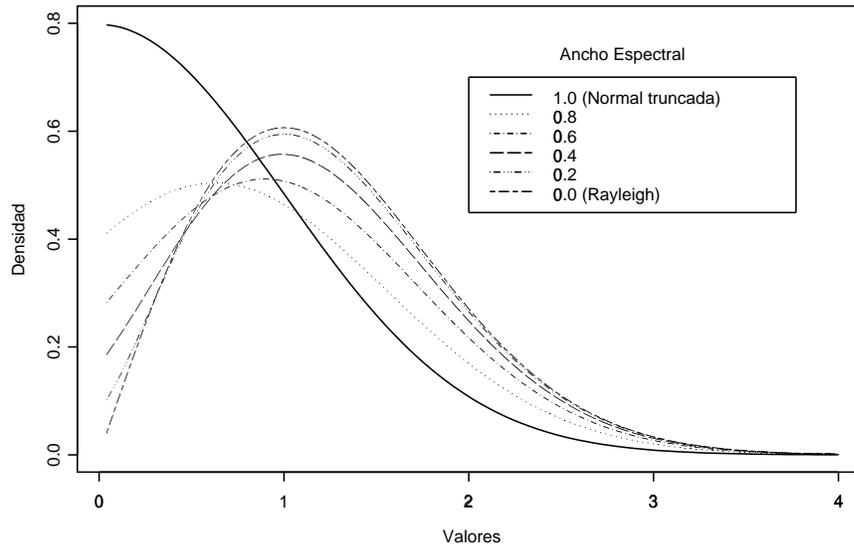


Figura 8
Densidad de Probabilidad del Máximo como función del Ancho de Banda Espectral

7 Altura Significativa

La amplitud (y la altura) significativa es un parámetro asociado al rigor o severidad del mar.

Definimos $u_{1/3}$ por

$$1 - F_{\max}(u_{1/3}) = \frac{1}{3}$$

y la amplitud significativa es la media del tercio superior de las amplitudes

$$A_s = 3 \int_{u_{1/3}}^{\infty} u f_{\max}(u) du$$

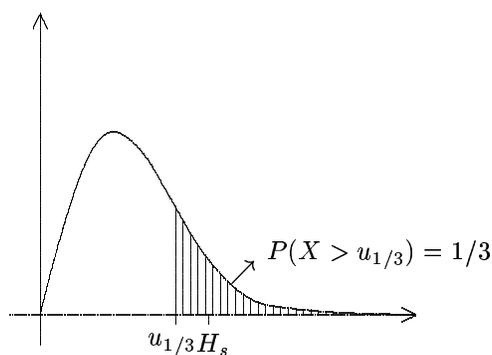


Figura 9

La altura significativa H_s se define de manera similar. Si ε es pequeño $H_s = A_s$. Si el proceso es de banda estrecha y la distribución de Rayleigh es adecuada

$$\int_{u_{1/3}}^{\infty} \frac{2u}{R} e^{-u^2/R} du = \frac{1}{3}$$

de modo que $u_{1/3} = \sqrt{R \ln 3} = 1.048\sqrt{R}$.

Ahora

$$\begin{aligned} H_s &= 3 \int_{u_{1/3}}^{\infty} u f(u) du = 3 \int_{u_{1/3}}^{\infty} \frac{2u^2}{R} e^{-u^2/R} du \\ &= u_{1/3} \exp\left\{-\frac{u_{1/3}^2}{R}\right\} + \sqrt{\pi R} \left(1 - \Phi\left(u_{1/3} \sqrt{\frac{2}{R}}\right)\right) \end{aligned}$$

pero $u_{1/3} = 1.048\sqrt{R}$,

$$H_s = \sqrt{R} \left(\sqrt{\ln 3} + 3\sqrt{\pi}(1 - \Phi(\sqrt{2 \ln 3})) \right) \approx 1.42\sqrt{R}$$

y como $R = 8m_0$, $H_s = 4.01\sqrt{m_0}$. De manera similar $A_s \approx 2.00\sqrt{m_0}$.

8 Estadística a Largo Plazo

Definimos $M(T) = \sup\{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ y suponemos que el proceso satisface la siguiente condición

$$r(h) = 1 - Ch^\alpha + o(h^\alpha)$$

donde $0 < \alpha \leq 2$, y además

$$r(t) \log t \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

Teorema 1

$$P\{a_T(M(T) - b_T) \leq x\} \rightarrow e^{-e^{-x}}$$

cuando $T \rightarrow \infty$ donde

$$a_T = (2 \log T)^{1/2}, \quad b_T = (2 \log T)^{1/2} + a_T^{-1} \log \left(\frac{m_2^{1/2}}{2\pi} \right) \quad (1)$$

Por lo tanto

$$P\{M(T) \leq u\} = P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} X(t) \leq u \right\} \approx \exp\{-e^{-a_T(u-b_T)}\} \quad (2)$$

En general, si tenemos un proceso cuyo máximo pertenece al dominio de atracción de la doble exponencial y tenemos idea de los valores de a_T y b_T para algún valor de T , podemos usarlos para aproximar la distribución de $M(nT)$ para n fijo. Si T es grande podemos suponer que los máximos sobre los intervalos $(0, T]$, $(T, 2T]$, ..., $((n-1)T, nT]$ son aproximadamente independientes, de modo que

$$\begin{aligned} P\{M(nT) \leq u\} &\approx P^n\{M(T) \leq u\} \approx \exp\left\{-ne^{-a_T(u-b_T)}\right\} \\ &= \exp\left\{-e^{-a_T(u-b_T - a_T^{-1} \log n)}\right\} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$a_T = (2 \log T)^{1/2}; \quad b_T = a_T + a_T^{-1} \log n$$

Para un proceso Gaussiano diferenciable se obtiene a partir de las expresiones de los parámetros de ubicación y escala el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} a_{nT} &= a_T + a_T^{-1} \log n + o(a_T^{-1}) \\ b_{nT} &= b_T + a_T^{-1} \log n + o(a_T^{-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

que, por supuesto, coincide con el cálculo anterior.

Estos parámetros de ubicación y escala dependen de la escala de tiempos del proceso. Si cambiamos T por $T' = cT$ en (1) y (2), $(2 \log T)^{1/2}$ cambia a $(2 \log T + 2 \log c)^{1/2}$ mientras que $\sqrt{m_2}$ cambia a $c^{-1} \sqrt{m_2}$ de modo que la aproximación (2) será diferente. Por supuesto, para cualquier escala de tiempo hay una distribución límite precisa para el máximo, el problema es que el error al usar (2) para intervalos finitos depende de la escala de tiempos del proceso.

Una manera natural de medir el tiempo es usando el período medio de los cruces del nivel cero. Supongamos que $m_0 = 1$ y llamemos

$$\eta = \frac{\sqrt{m_2}}{2\pi}$$

al número promedio de cruces hacia arriba del cero por unidad de tiempo e introducimos una nueva escala $T' = \eta T$ que cuenta el tiempo en términos del número esperado de cruces hacia arriba del cero. Entonces

$$\log \eta^{-1} \sqrt{m_2} / 2\pi = \log 1 = 0,$$

la aproximación estandarizada es

$$P\{M(T) \leq u\} \approx \exp(-e^{-(2 \log \eta T)^{1/2}(u - (2 \log \eta T)^{1/2})})$$

y los parámetros de ubicación y escala son iguales:

$$a_T = b_T = (2 \log \eta T)^{1/2}$$

La distribución aproximante tiene media y desviación típica dadas por

$$m_T = (2 \log \eta T)^{1/2} + \frac{\gamma}{(2 \log \eta T)^{1/2}}$$

$$\sigma_T = \frac{\pi}{\sqrt{6}} (2 \log \eta T)^{1/2}$$

En el caso de las olas, con la notación anterior,

$$M_{N'} = \max\{X(s_1), \dots, X(s_{N'})\} = \sup\{X(t) : 0 \leq t \leq T\} = M(T)$$

a menos que el máximo se alcance en $[0, s_1)$ o $(s_{N'}, T]$ y podemos aplicar la teoría anterior. Si el proceso no está normalizado sino que tiene varianza $Var(X(t_0)) = m_0$ la aproximación es

$$P\{M_{N'} \leq u\} \approx \exp(-e^{-a_T(u-b_T)})$$

con

$$a_T = \left(\frac{2 \log \eta T}{m_0}\right)^{1/2}; \quad b_T = (m_0 2 \log \eta T)^{1/2}$$

donde N' es una variable aleatoria. Hace falta, por lo tanto, estimar $\sqrt{m_0}$ y η . Para valores pequeños de ε podemos estimar $\sqrt{m_0}$ por $A_s/2$.

Referencias

- [1] Aage, C., Allan, T., Carter, D.J.T., Lindgren, G. and Olagnon, M. *Oceans from Space. A textbook for Offshore Engineers and Naval Architects*. Ifremer, 1998.
- [2] H. Cramér and M. R. Leadbetter. *Stationary and Related Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, Chichester. 1967.
- [3] Goda, Y. *Random Seas and Design of Maritime Structures*. World Scientific, 2000
- [4] P. Krée and C. Soize. *Mécanique Aléatoire*. Dunod. Paris 1983.
- [5] Massel, S. R. *Ocean Surface Waves: Their Physics and Prediction*. World Scientific, 1996.
- [6] M.S. Longuet-Higgins. *The statistical analysis of a random moving surface*. Philos. Trans. Roy. Soc. Londom, Ser. A, 249, 321-87. 1957.
- [7] M. Ochi *Ocean Waves*. Cambridge Ocean Technology Series. Cambridge University Press. Cambridge U.K. 1998.