

# El Proceso de Wiener y el Teorema del Límite Central.

E. M. Cabaña

## Resumen

El proceso de Wiener permite dar una demostración del Teorema del Límite Central mucho más probabilística que las habituales, que se basan fuertemente en la utilización de la transformada de Fourier o en otros argumentos de carácter analítico.

Con el mismo esfuerzo, se obtiene como resultado un TLC funcional, y con poco esfuerzo más, la convergencia en distribución del *proceso empírico al puente browniano*.

Estas notas describen el contenido de una charla que tuvo lugar en la Universidad de Oriente, en el marco de los Terceros Talleres de Formación Matemática que se desarrollaron en Cumaná, Venezuela, entre el 29 de julio y el 2 de agosto de 2002.

En ella hemos intentado mostrar esta aplicación del proceso de Wiener, sin detallar los aspectos de carácter técnico, a un público con cierta familiaridad con el cálculo de probabilidades, como la que se alcanzaría luego de, al menos, un curso en el que se estudien el cálculo de esperanzas y la convergencia en probabilidad.

## 1 Introducción.

En los albores del análisis matemático, causó sensación un ejemplo de función continua pero no diferenciable en ningún punto, ideado por Weierstrass.

A comienzos del siglo pasado, Albert Einstein propuso un modelo matemático para el movimiento errático de las partículas suspendidas en un ambiente de agitación térmica descubierto por el botánico Robert Brown en 1827. Ese modelo, que después adoptó el nombre de Proceso de Wiener es válido, según lo señaló el propio Einstein, para medios de viscosidad infinita, y ha sido reemplazado por modelos más adecuados, en lo que se refiere a la representación del *Movimiento Browniano*. Sin embargo, el proceso de Wiener ha resultado ser un modelo extremadamente útil para el desarrollo de la probabilidad en particular y del análisis matemático en general. Las trayectorias del proceso de Wiener no son diferenciables en ningún punto, casi seguramente, al igual que el ejemplo de Weierstrass.

En esta presentación vamos a vincular al proceso de Wiener con el Teorema del Límite Central, un teorema clásico en la teoría de la probabilidad, cuyas primeras formulaciones se remontan a Gauss, Laplace, de Moivre. Utilizaremos para ello la Ley de los Grandes Números. Un enunciado sencillo del TLC es el siguiente:

**Teorema 1.1** *Si  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  son variables i.i.d. con esperanza  $\mu$  y variancia  $\sigma^2$ , entonces la sucesión  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}$  converge en distribución a la normal típica.*

La distribución normal típica es la que tiene por densidad  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  y por lo tanto, si  $Z$  tiene distribución normal típica,  $\Phi(Z) = \mathbf{P}\{Z \leq x\} = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ .

**Teorema 1.2** *(Ley de los Grandes Números) Si  $X_1, X_2, \dots$  son variables i.i.d. con esperanza  $\mu, |\mu| < \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu$  c.s. Además,  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i - \mu t \right| = 0$ .*

Una variable  $Y = a + bZ$  tiene distribución normal cuando se obtiene de una variable normal típica  $Z$  por un cambio de posición y/o escala, de modo que el TLC tiene como consecuencia inmediata que las sumas de variables independientes equidistribuidas poseen una distribución *aproximadamente* normal.

Volvamos al proceso de Wiener: los choques de las partículas invisibles del fluido, que rodean a la partícula visible al microscopio que estamos observando, le producen movimientos erráticos, de modo que si  $w(t)$  es la abscisa en un eje determinado de la posición de la partícula, a partir de su posición inicial, los incrementos  $w(t + \delta) - w(t)$  son producto exclusivo de los choques recibidos en  $(t, t + \delta)$  debido a la suposición de que la viscosidad es infinita, por lo que la velocidad inicial no hace diferencias en el incremento resultante.

“One of the chief duties of the mathematician in acting as an advisor to scientists is to discourage them from expecting too much from mathematics”



Wiener, Norbert (1894-1964).

Nació en Columbia, Missouri (U.S.A) el 26 de noviembre de 1894, obtuvo su doctorado en Harvard a los 18 años, y luego estudió en Cambridge, Inglaterra, con Russell, y en Göttingen, Alemania, con Hilbert. También recibió la influencia de Hardy.

En 1933 ganó el Premio Bócher por su trabajo sobre análisis armónico generalizado y teoremas Tauberianos.

Aunque fue más conocido por el desarrollo de la *cibernética*, sus intereses fueron extraordinariamente amplios, y también contribuyó a muchas otras áreas de estudio, entre ellas, la de los procesos aleatorios. En este último tema, es particularmente interesante su aporte a la construcción de una teoría matemática del movimiento browniano.

Contribuyó al desarrollo del Departamento de Matemática del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), en el que enseñó entre 1919 y 1960. Murió el 18 de marzo de 1964 en Estocolmo, Suecia.

Cuando suponemos que las condiciones del movimiento no cambian con el tiempo, encontramos que los sucesivos incrementos  $w(n\delta) - w((n-1)\delta)$  son independientes, equidistribuidos, para cualquier  $\delta$ , y la coherencia con el TLC nos lleva a concluir que, en ausencia de deriva, es razonable admitir que, luego de una normalización,  $w$  debe poseer las siguientes propiedades:

- La familia de variables aleatorias  $\{w(t) : t \geq 0\}$  es gaussiana.
- Los incrementos de  $w$  son independientes.
- $\mathbf{E}w(t) = 0$ ,  $\mathbf{E}w(s)w(t) = s \wedge t$  para cualesquiera  $s, t$ .
- Las trayectorias  $t \rightarrow w(t)$  son continuas.

**Definición 1.1** *Las propiedades precedentes definen (de manera redundante) al proceso de Wiener típico.*

## 2 Algunas propiedades del proceso de Wiener

**Teorema 2.1** *Si  $w$  es un proceso de Wiener,  $\sqrt{h}w(t/h)$  es un nuevo proceso de Wiener.*

**Teorema 2.2** *La distribución condicional de  $w(t) : t_1 \leq t \leq t_2$  dados  $w(t) : t \leq t_1$  y  $w(t) : t \geq t_2$  es la de la suma de la cuerda que une  $(t_1, w(t_1))$ ,  $(t_2, w(t_2))$  y un proceso independiente de las condiciones dadas que llamaremos  $b(t) : t_1 \leq t \leq t_2$ , con las propiedades:*

*$b(t) : t_1 \leq t \leq t_2$  es una familia gaussiana, centrada para  $t_1 \leq s \leq t \leq t_2$ ,  $\mathbf{E}b(s)b(t) = (s - t_1)(t_2 - t)/(t_2 - t_1)$*

Al proceso  $b$  se lo llama Puente Browniano asociado al intervalo  $(t_1, t_2)$ . Al puente browniano asociado al intervalo  $(0, 1)$  se lo llama Puente Browniano Típico.



Nació en París, el 15 de septiembre de 1886. Fue alumno de Volterra. En 1910 ingresó como profesor a la École des Mines de París, y desde 1913 hasta 1959 fue profesor de la École Polytechnique de la misma ciudad.

Sus principales aportes a la matemática fueron en las áreas de la probabilidad, el análisis funcional, las ecuaciones en derivadas parciales y también las series y la geometría.

Sus principales libros son *Leçons d'analyse fonctionnelle* (1922), *Calcul des probabilités* (1925), *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937-54), y *Processus stochastiques et mouvement brownien* (1948).

Paul P. Lévy (1886 - 1971).

**Corolario 2.2.1** *Una construcción explícita del Proceso de Wiener en  $(0, 1)$  puede hacerse eligiendo  $w(0) = 0$ ,  $w(1)$  igual a una variable normal típica  $Z_1$ , y sumando a la correspondiente cuerda un puente  $b$  asociado al intervalo  $(0, 1)$ . Para ello, podemos limitarnos a agregar a la cuerda en su punto medio  $(1/2, w(1)/2)$  una variable aleatoria independiente con la distribución de  $b(1/2)$ , a saber,  $Z_{1/2}/2$ , donde  $Z_{1/2}$  es normal típica independiente de  $Z_1$ . A esta variable que agregamos, podríamos denominarla flecha correspondiente al intervalo  $(0, 1)$ .*

*Conseguimos de esta manera construir  $w$  en los puntos  $0, 1/2, 1$ . En cada uno de los intervalos  $(0, 1/2)$  y  $(1/2, 1)$  agregamos las correspondientes flechas y esto nos construye  $w$  en todos los puntos  $i/4$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Por sucesivas subdivisiones se obtienen, uniendo los puntos ya obtenidos mediante las correspondientes cuerdas, poligonales que convergen uniformemente c.s. a un límite que es el proceso de Wiener.*

Introducimos las notaciones  $D_0 = \{1\}$ ,  $D_n = \{k/2^n : k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) y  $D = \bigcup D_n$ . Llamamos racionales diádicos del intervalo  $(0, 1]$  a los puntos de  $D$ , y racionales diádicos de índice  $n$  a los de  $D_n$ .

A cada racional en  $D$  vamos a asociar una función de la manera siguiente. Al 1 le asociamos  $H_1(t) = 1$  ( $0 < t \leq 1$ ) y a cualquier  $r$  en  $D_n$ ,  $n \geq 1$ ,

$$H_r(t) = 2^{(n-1)/2} \text{sgn}(r-t) \mathbf{1}_{\{|r-t| < 2^{-n}\}}.$$

Esta familia de funciones recibe el nombre de *funciones de Haar*, y es un sistema ortonormal completo en  $L^2(0, 1)$ .

A las integrales

$$S_r(T) = \int_0^T H_r(t) dt = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t < T\}} H_r(t) dt$$

de las funciones de Haar, se las llama *funciones de Schauder*. Dado que las funciones de Schauder son coeficientes de Fourier de funciones indicatrices de intervalos, la igualdad de Parseval expresa, aplicada a este caso, que

$$s \wedge t = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\tau < s\}} \mathbf{1}_{\{\tau < t\}} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in D_n} S_r(s) S_r(t). \quad (1)$$

La Figura 1 indica la forma de las funciones de Haar y de Schauder, para  $r$  de índice mayor que 0.

**Teorema 2.3** (*Construcción del proceso de Wiener de Lévy-Ciesielski*):

*La serie  $w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in D_n} Z_r S_r(t)$ , en la que  $\{Z_r : r \in D\}$  es una familia de variables aleatorias independientes, con distribución gaussiana típica, converge uniformemente en  $0 \leq t \leq 1$  con probabilidad uno, y la suma es un proceso de Wiener.*

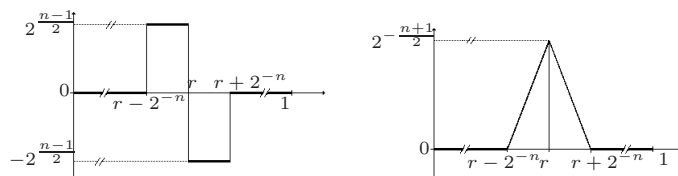


Figure 1: Gráficos de las funciones de Haar  $H_r$  y de Schauder  $S_r$ .

Es inmediato verificar que los incrementos  $v(t) = w(T + t) - w(T)$  a partir de un tiempo determinístico  $T$ , tienen la distribución de un nuevo proceso de Wiener independiente de la trayectoria  $\{w(s) : s \leq T\}$ .

**Teorema 2.4** *Cuando  $T$  es el primer instante en que  $w$  alcanza alguno de los niveles  $-a, b$ , donde  $a, b$  son dos números positivos cualesquiera, los incrementos  $v(t) = w(T + t) - w(T)$  a partir de  $T$ , tienen la distribución de un nuevo proceso de Wiener, independiente de la trayectoria  $\{w(s) : s \leq T\}$ .*

*La probabilidad de que alguno de los niveles se alcance es 1, y la esperanza de  $T$  es  $ab$ . La probabilidad de que el primer nivel alcanzado sea  $-a$  es  $b/(a + b)$  y la de que el primero sea  $b$  es su complemento  $a/(a + b)$ .*

### 3 Inmersión de un paseo al azar en $w$

Observemos el primer instante  $T_1$  en el que  $|w_1|$  alcanza el valor 1. La variable aleatoria  $w_1(T_1)$  vale 1 o  $-1$  con probabilidades  $1/2, 1/2$ . Observamos luego el incremento  $w_2(t) = w_1(T_1 + t) - w_1(T_1)$  y el primer instante  $T_2$  en el que  $|w_2|$  alcanza el valor 1, y luego, sucesivamente, el primer instante  $T_n$  en que  $w_n(t) = w_{n-1}(T_{n-1} + t) - w_{n-1}(T_{n-1})$  alcanza en valor absoluto el valor 1. Como consecuencia, las variables  $X_n = w_n(T_n)$  son independientes con la distribución de los sumandos de un paseo al azar simétrico simple, y  $(w_1(\sum_{i=1}^{[nt]} T_i))_{0 \leq t \leq 1} \sim (s_n(t) = \sum_{i=1}^{[nt]} X_i)_{0 \leq t \leq 1}$ . Para cada  $n$ , elegimos en lugar de  $w_1$  el proceso  $v_n(t) = \sqrt{n}w(t/n)$ , y entonces  $w(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} T_i) \sim s_n(t)$ .

La esperanza común de los tiempos  $T_i$  es 1, de manera que

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} T_i - t \right| = 0,$$

y la continuidad de las trayectorias de  $w$  permite concluir que

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} |w(t) - s_n(t)| = 0. \tag{2}$$

#### 4 Un TLC funcional.

La inmersión de las sumas parciales de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. con  $\mathbf{E}X_1 = 0$ ,  $\mathbf{Var}X_1 = 1$  en un proceso de Wiener permite deducir que (2) vale para  $s_n(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i$ . La inmersión se basa en el siguiente procedimiento<sup>1</sup>:

**Teorema 4.1** *Existen funciones crecientes no negativas  $a, b : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^+$  tales que, cuando  $U$  es uniforme en  $(0, 1)$ , y  $T$  es el tiempo de llegada del proceso de Wiener  $w$  a los niveles  $-a(U), b(U)$ , entonces  $w(T) \sim X_1$  y  $\mathbf{E}T = 1$ .*

Para demostrar la proposición precedente, basta imponer las condiciones requeridas para que valga el resultado, y lo que se obtiene es un sistema de ecuaciones diferenciales que admite solución. En general, esta solución no puede obtenerse mediante una fórmula cerrada.

Para determinar  $a, b$ , notamos en primer lugar que la distribución condicional de  $w(T)$  dada  $U$  es  $-a(U)$  con probabilidad  $b(U)/(a(U) + b(U))$  y  $b(U)$  con probabilidad  $a(U)/(a(U) + b(U))$ .

Como consecuencia de suponer que  $a$  y  $b$  son monótonas no decrecientes,

$$1 - F(b_0) = \mathbf{P}\{w(t) > b_0\} = \int_{\{u: b(u) > b_0\}} \frac{a(u)}{a(u) + b(u)} du,$$

$$F(-a_0) = \mathbf{P}\{w(t) \leq -a_0\} = \int_{\{u: a(u) \geq a_0\}} \frac{b(u)}{a(u) + b(u)} du.$$

Si  $b_0 = b(u_0)$ ,  $a_0 = a(u_0)$ ,

$$\alpha(u) = F(-a(u)), \quad \beta(u) = F(b(u)), \quad (3)$$

entonces  $1 - \beta(u_0) = \int_{\{u: u > u_0\}} \frac{a(u)}{a(u) + b(u)} du$ ,  $\alpha(u_0) = \int_{\{u: u \geq u_0\}} \frac{b(u)}{a(u) + b(u)} du$ , y luego de derivar respecto de  $u_0$  obtenemos

$$\frac{d\beta(u)}{du} = \frac{a(u)}{a(u) + b(u)}, \quad \frac{d\alpha(u)}{du} = -\frac{b(u)}{a(u) + b(u)}. \quad (4)$$

Las cuatro ecuaciones (3), (4) permiten encontrar las cuatro funciones  $a, b, \alpha, \beta$ .

La esperanza de la distribución  $F$  es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t dF(t) &= \int_0^1 [b(u) dF(b(u)) + a(u) dF(-a(u))] = \int_0^1 [b(u) d\beta(u) + a(u) d\alpha(u)] \\ &= \int_0^1 \left[ b(u) \frac{a(u)}{a(u) + b(u)} - a(u) \frac{b(u)}{a(u) + b(u)} \right] = 0, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Descripciones algo menos elementales de este proceso pueden encontrarse en [2] y en [6]

de modo que la suposición de que la esperanza es nula es necesaria para posibilitar la construcción.

La hipótesis de que la variancia es 1 implica:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 dF(t) = \int_0^1 [b^2(u)d\beta(u) + a^2(u)d\alpha(u)] = \int_0^1 a(u)b(u)du. \quad (5)$$

**Ejemplo 4.1** Cuando  $F(x) = e^{x-1}$ ,  $-\infty < x \leq 1$ , encontrar las funciones  $a, b, \alpha, \beta$ .

Las ecuaciones son

$$\alpha(u) = e^{-a(u)-1}, \beta(u) = e^{b(u)-1}, \quad (6)$$

$$b'(u)e^{b(u)-1} = \frac{a(u)}{a(u) + b(u)}, a'(u)e^{-a(u)-1} = \frac{b(u)}{a(u) + b(u)}. \quad (7)$$

De (6) se obtendrán  $\alpha$  y  $\beta$ .

De (7) se llega a  $\frac{db}{da}e^{a+b} = \frac{a}{b}$ , o bien  $be^b db = ae^{-a} da$ , ecuación de variables separables que, integrada, conduce a

$$(1 - b)e^b = (1 + a)e^{-a}. \quad (8)$$

El primer miembro decrece monótonamente de 1 a 0 cuando  $b$  recorre el intervalo  $[0, 1]$ , y el segundo miembro también decrece monótonamente de 1 a 0 cuando  $a$  recorre la semirrecta  $[0, +\infty)$ . Esto implica que ambas correspondencias se pueden invertir. Denotaremos  $\tilde{a}(y)$  y  $\tilde{b}(y)$  a las funciones inversas.

De las dos últimas ecuaciones se obtiene también  $e^b db + e^{-a} da = edu$ , que, integrada, proporciona

$$u = \frac{1}{e}[e^b - e^{-a}]. \quad (9)$$

Esta ecuación nos permite observar en particular que cuando  $a$  recorre  $[0, +\infty)$  y  $b$  recorre correlativamente  $[0, 1]$ , entonces  $u$  recorre  $[0, 1]$ .

Para obtener las funciones  $a(u)$  y  $b(u)$ , calculamos  $\tilde{u}(y) = \frac{1}{e}[e^{\tilde{b}(y)} - e^{-\tilde{a}(y)}]$ , invertimos la correspondencia  $y \mapsto \tilde{u}(y)$  (llamamos  $\tilde{y}(u)$  a la correspondencia inversa) y entonces  $a(u) = \tilde{a}(\tilde{y}(u))$ ,  $b(u) = \tilde{b}(\tilde{y}(u))$ .

Si bien las ecuaciones (8) y (9) que vinculan  $a, b$  con  $u$  no nos proporcionan una fórmula cerrada que describa las funciones  $u \mapsto a$  o  $u \mapsto b$ , la evaluación numérica de las funciones inversas descritas en el contexto precedente nos permite un cálculo aproximado de ambas funciones.

La Figura 2 representa las funciones  $-a(u), b(u)$  en un mismo diagrama.

Observemos como complemento de lo anterior, que la esperanza condicional de  $T$  dado  $U$  es

$$\mathbf{E}(T | U) = \mathbf{E}(w^2(T) | U) = b^2(U) \frac{a(U)}{a(U) + b(U)} + a^2(U) \frac{b(U)}{a(U) + b(U)} = a(U)b(U),$$

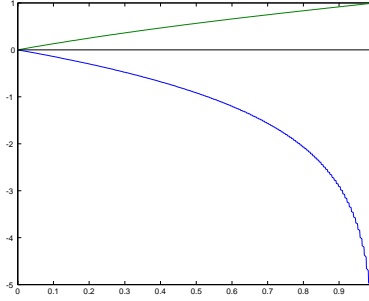


Figure 2: Representaciones gráficas de las funciones  $a, b$ .

de manera que podemos concluir que  $\mathbf{E}T = \mathbf{E}(a(U)b(U))$ . La ecuación (5) muestra que  $\mathbf{E}(T) = 1$ .

## 5 La convergencia del proceso empírico al puente browniano

Se denomina función de distribución empírica de una muestra aleatoria simple  $X_1, \dots, X_n$  de la distribución  $F$  a  $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}}$ . Una consecuencia bastante directa de la Ley de los Grandes Números muestra que en cualquier intervalo de continuidad  $I$  de  $F$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |F_n(t) - F(t)| = 0$  (esta propiedad se conoce como *Ley de Glivenko - Cantelli*).

La función aleatoria  $b_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n b_{X_i}(t)$ , donde  $b_{X_i}(t) = \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}} - F(t)$ , se denomina *proceso empírico*, y su distribución límite es la de un puente browniano  $b(F(t))$  cuando  $F$  es continua. Basta verificarlo cuando  $F$  es la identidad, es decir, cuando  $X_1, \dots, X_n$  es una muestra de la distribución uniforme en  $(0, 1)$ .

Vamos a verificar que en ese caso, existen copias  $b_n^*(t)$  de  $b_n(t)$  y un puente browniano típico  $b$  tales que  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq u \leq 1} |b_n^*(t) - b(t)| = 0$ .

**Lema 5.1** *La transformación  $\mathcal{Q}$  que a cada función  $g$  seccionalmente continua en  $[0, 1]$ , con límite en 1 por la izquierda, asocia*

$$(\mathcal{Q}g)(t) = g(t) - (1-t) \int_0^t \frac{g(u)}{(1-u)^2} du, \quad (10)$$

*tiene por recorrido las funciones  $h$  seccionalmente continuas en  $[0, 1]$  con límite por la izquierda en 1 igual a 0. Su inversa es*

$$(\mathcal{Q}^{-1}h)(t) = h(t) + \int_0^t \frac{h(u)}{1-u} du. \quad (11)$$

$\mathcal{Q}$  tiene la propiedad de continuidad



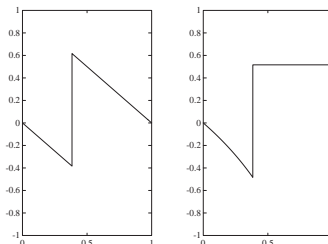


Figure 3: Proceso empírico y proceso empírico transformado para una muestra uniforme de tamaño 1.

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} (\mathcal{Q}g)(t) \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1} g(t),$$

y aplica un proceso de Wiener  $w$  en un puente browniano  $b = \mathcal{Q}w$ .

La continuidad es consecuencia de la acotación válida para cualquier  $t$

$$|(\mathcal{Q}g)(t)| \leq \|g\|_\infty + (1-t) \int_0^t \frac{\|g\|_\infty}{(1-u)^2} du = (1+t)\|g\|_\infty \leq 2\|g\|_\infty.$$

**Definición 5.1** Llamamos proceso empírico transformado<sup>2</sup> de una muestra aleatoria simple  $U_1, \dots, U_n$  de la distribución uniforme en  $[0, 1]$ , al resultado de aplicar la transformación  $\mathcal{Q}^{-1}$  del Lema 5.1 al proceso empírico ordinario  $b_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n b_{U_i}(u)$ .

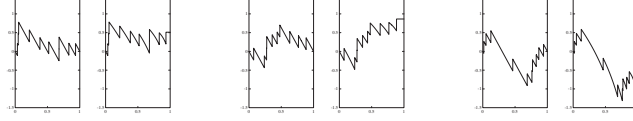
En particular,  $\mathcal{Q}^{-1}b_{U_i}(t) = w_U(t) = (\mathcal{Q}^{-1}b_U)(t) = b_U(t) + \int_0^t \frac{b_U(u)}{1-u} du = \mathbf{1}_{\{U \leq t\}} - t + \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{U \leq u\}} - u}{1-u} du = \mathbf{1}_{\{U \leq t\}} + \log(1 - t \wedge U)$ , y entonces, por linealidad,

$$w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\mathbf{1}_{\{U_{(i)} \leq t\}} + \log(1 - t \wedge U_{(i)}))$$

La figura 3 muestra el proceso empírico  $b_U(u)$  y su transformado  $w_U(u)$ , para un valor arbitrario de  $U$ . La figura 4 muestra procesos empíricos y sus correspondientes transformados, para muestras de tamaños 10 y 50, respectivamente.

<sup>2</sup>Los procesos empíricos transformados aparecen por primera vez en [3].

Tres muestras de tamaño 10:



Tres muestras de tamaño 50:

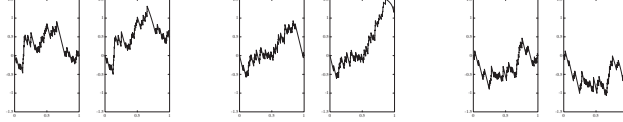


Figure 4: Proceso empírico y proceso empírico transformado para muestras uniformes de tamaños 10 y 50.

La función aleatoria  $w_n$  decrece en cada intervalo  $(U_{(i-1)}, U_{(i)})$  comprendido entre dos elementos sucesivos de la muestra, y salta hacia arriba en una magnitud  $1/\sqrt{n}$  en cada  $U_{(i)}$ .

El incremento entre  $U_{(i-1)}$  y  $U_{(i)}$  es

$$Z_i = w_n(U_{(i)}) - w_n(U_{(i-1)}) = \frac{(n-i+1) \log \frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} + 1}{\sqrt{n}}. \quad (12)$$

Los cocientes  $\frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}}$  son independientes, con distribución  $\mathbf{P}\{\frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} < s\} = s^{n-i+1}$ , de modo que para cada  $c > 0$ ,  $\mathbf{P}\{-(n-i+1) \log \frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} > c\} = \mathbf{P}\{\frac{1-U_{(i)}}{1-U_{(i-1)}} < e^{-c/(n-i+1)}\} = e^{-c}$ .

Como consecuencia de este cálculo, resulta que las variables  $Y_i = \sqrt{n}Z_i$  son i.i.d.  $\sim (1 - \text{Exp}(1))$ , y eso significa que  $w_n$  evaluado en los puntos de la muestra tiene la distribución de las sumas parciales tipificadas  $w_n(U_{(i)}) = \sum_{j=1}^i Z_j$  de las variables  $Y_i \sim (1 - \text{Exp}(1))$ , que son centradas y tienen variancia 1.

Repetimos la construcción de la sección anterior, para inscribir las sumas parciales de las variables  $Z_i$  en un proceso de Wiener  $w$ . La proximidad uniforme de  $U_{[nt]}$  con  $t$  y de  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} T_i$  permiten concluir el enunciado siguiente:

**Lema 5.2** Si  $U_{n,i}, i = 1, 2, \dots, n$  es un arreglo triangular de variables uniformes en  $[0, 1]$  independientes, hay una sucesión de copias  $w_n^*$  de los procesos empíricos transformados  $w_n(u)$  y un proceso de Wiener  $w$  tales que

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq u \leq 1} |w_n^*(u) - w(u)| = 0.$$

*Demostración de la convergencia de copias del proceso empírico al puente browniano.* Tomamos como copias de  $b_n$ , las imágenes  $b_n^* = Qw_n^*$  de los procesos empíricos transformados construidos en la demostración del Lema 5.2, y llamamos  $b = Qw$  al puente browniano imagen del proceso  $w$  del que se parte en la misma demostración. Por la continuidad de  $Q$ , deducimos

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sup_t |b_n^*(t) - b(t)| = 0.$$

## 6 Una aplicación estadística

La convergencia en distribución de  $b_n$  a  $b \circ F$  cuando  $b_n$  es el proceso empírico de una muestra aleatoria simple de  $F$ , tiene aplicación para probar la hipótesis de ajuste  $\mathcal{H}_0: "F = F_0"$ .

Para ello se utilizan funcionales de  $b_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))$  a modo de medidas del apartamiento entre  $F_n$  y  $F_0$ .

Por ejemplo, la prueba de Kolmogorov - Smirnov se basa en el estadístico  $\sup_t |b_n(t)|$ , la de Cramér - von Mises en  $\int b_n^2(t) dF_0(t)$ . Ambas funcionales son continuas en la norma del supremo, y por consiguiente sus distribuciones asintóticas son respectivamente las de  $\sup_{0 \leq u \leq 1} |b(u)|$  y  $\int_0^1 b^2(u) du$ .

## Referencias

- [1] Billingsley, Patrick, (1968) *Convergence of Probability Measures*, New York, Wiley.
- [2] Breiman, Leo, (1968) *Probability*. Reading, Mass., USA, Addison Wesley.
- [3] Cabaña, A. (1996), *Transformations of the empirical process and Kolmogorov-Smirnov tests*. Ann. Statist. **24** 2020-2035.
- [4] Donsker, M. D.(1952)*Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems.*, Ann. Math. Statist. 23 277.
- [5] Doob, J.L. (1949) *Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems*, Ann. Math. Statist. **20** 393-403.
- [6] Dudley, Richard M. (1989), *Real Analysis and Probability*. Pacific Grove, California, USA, Wadsworth & Brooks/Cole.
- [7] Feller, William, *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. II. 2da. ed.(1989), Ciudad de México, México, Limusa.

- [8] Karatzas, I. and Shreve, S. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. (2nd Edition), Springer-Verlag, New York.
- [9] Karlin, Samuel & Taylor, Howard M. (1975), *A first course in stochastic processes*. 2nd. ed., San Diego, USA, Academic Press.
- [10] León, J.R. & Ortega, J. (1989), *Paseo al Azar y Movimiento Browniano*. Segunda Escuela Venezolana de Matemáticas, Centro de Estudios Avanzados, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas, Venezuela.

E. M. CABAÑA  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN  
Y FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
MONTEVIDEO, URUGUAY