LIBROS

The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers
Benjamin H. Yandell, A K Peters Ltd., 2002. ISBN: 1-56881-141-1

La Clase de Honores: Los Problemas de Hilbert y Quienes los Resolvieron, por Benjamin H. Yandell

Reseñado por Argimiro Arratia

En el año 1900, David Hilbert dio una charla invitada en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Paris, titulada "Problemas Matemáticos". En su charla, Hilbert presentó una lista de problemas extraidos de diversas ramas de la matemática que, según su parecer, sus soluciones significarían un gran avance para la ciencia. El reto de Hilbert fue tomado muy seriamente; los 23 problemas de su lista fueron objeto de culto a nivel internacional y marcaron el estilo de la investigación matemática durante todo el siglo XX.

Luego de más de cien años de aquella charla magistral de Hilbert, ¿qué pasó? Sabemos que de los 23 problemas, sólo tres aún no han sido resueltos, el más notorio de los no resueltos es la Hipótesis de Riemann; cuatro de los problemas eran programas de investigación que todavía siguen motivando mucha investigación pero que va más allá de lo originalmente exigido por Hilbert, y el resto de los problemas fueron resueltos de manera definitiva. ¿Cuáles fueron las respuestas? ¿Quienes los resolvieron? ¿Quienes se hicieron merecedores del calificativo que Hermann Weyl acuñó para aquel que lograse resolver uno de esos problemas, a saber, el ser miembro de *la clase de honores* de la comunidad matemática?

La obra de Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, contiene las respuestas a todas estas incógnitas. Yandell es un licenciado en matemáticas de Stanford, luego convertido a poeta, y creo que gracias a esta última cualidad del autor el libro se lee como una muy emocionante y amena novela. Una novela científica, muy al estilo de Julio Verne, donde entre aventura y aventura de quienes resolvieron parcial o totalmente los problemas de Hilbert, se intercalan largos pasajes que explican los tecnicismos matemáticos involucrados en sus soluciones. No es este libro un simple compendio de los problemas y quienes les dieron solución, sino es más bien la Historia de la Matemática del Siglo XX a través de los problemas de Hilbert, donde su autor va más alla de recopilar datos esparcidos en otros libros y revistas, a indagar en fuentes inéditas y entrevistar a los actores que aún viven o a familiares de los actores de este importante pedazo de historia. Es por todo esto que aprecio este libro como una importante contribución para la comprensión de la matemática moderna y recomiendo ampliamente su lectura.

En las siguientes páginas presento el contenido de los problemas de Hilbert, indico (en negritas) los nombres de quienes los resolvieron o quienes hicieron una contribución significativa a la solución e incluyo alguna anécdota relevante al problema. Todos los datos los extraje directamente del libro de Yandell, y espero de esta manera dar una mejor idea al lector de lo que va a aprender con la lectura de esta magnífica obra.

Los problemas y los miembros de la clase de honores

1. *Resolver la Hipótesis del Continuo de Cantor.* La Hipótesis del Continuo (HC) es la afirmación siguiente: no existe un conjunto de cardinalidad estrictamente mayor que la cardinalidad del conjunto numerable y estrictamente menor que la cardinalidad del continuo. En 1939 **Kurt Gödel** demostró que la negación de HC no se puede tener como consecuencia de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel (ZF). En 1963 **Paul Cohen** demostró que HC no se puede tener como consecuencia de ZF. En conclusión HC es *independiente* de ZF. Paul Cohen recibió la medalla Fields en su edición de 1966 por la técnica que desarrolló para demostrar la independencia de HC.

2. *Establecer la Consistencia de los Axiomas para la Aritmética* **utilizando métodos constructivos**[1]. Resuelto por **Kurt Gödel** en 1930: no es posible demostrar la consistencia de la Aritmética a partir de sus propios métodos (constructivos o finitistas) de deducción. Este resultado pasó a la historia con el título de *Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel*.

3. *Encontrar dos tetraedros con bases iguales y alturas iguales que no puedan dividirse en tetraedros congruentes y tampoco puedan combinarse con otros tetraedros congruentes para formar dos poliedros que a su vez puedan dividirse en tetraedros congruentes.*

Detrás de esta cuestión hay un problema de fundamentos de la geometría: Hilbert desea saber que axiomas son necesarios para la geometría, y en particular si el *Axioma Arquimedeano* (descrito por Yandell en la pág. 118 de forma muy clara y pedestre como "*the assertion that if I start walking in equal steps, however tiny, I will eventually reach my destination*") es necesario para demostrar el que dos tetraedros con bases iguales y alturas iguales tienen igual volumen. Si existen dos tetraedros como los especificados por Hilbert entonces la necesidad del Axioma Arquimedeano para la geometría quedaría comprobada.

[1]Negritas mias: Es importante resaltar esta exigencia de Hilbert que impone una fuerte restricción en el estilo de una posible prueba de consistencia. Sin esta restricción si es posible demostrar la consistencia de la Aritmética, tal como lo hizo Gerhard Gentzen en 1936 utilizando inducción transfinita. Este detalle no lo menciona Yandell y es una de las muy pocas quejas que tengo sobre su libro.

Resuelto positivamente por **Max Dehn** en 1900, inmediatamente después de publicarse la lista de problemas de Hilbert; en consecuencia es este el primer problema de Hilbert en resolverse. La solución de Dehn la explica Yandell con lujo de detalles y diagramas en el capítulo "*In the Original*".

4. El 4to. problema de Hilbert es esencialmente un programa de investigación sobre los fundamentos de la geometría. En particular Hilbert está interesado en "*geometrías donde la línea recta sigue siendo la distancia más corta entre dos puntos, pero los axiomas de congruencias no valen*" (Yandell pág. 138). En el fondo Hilbert desea que se investigue el concepto de distancia.

Según relata Yandell, los trabajos más relevantes a la solución de este problema fueron hechos por **Herbert Busemann** y **Aleksei Vasilevich Pogorelov**; aunque dada su naturaleza vaga, algunos investigadores entrevistados por el autor opinan que aún queda más por hacer. Sin embargo, el consenso general es que este problema, tal como lo planteó Hilbert, está resuelto y por los matemáticos mencionados.

5. *Estudiar el concepto de Lie de grupo continuo de transformaciones sin asumir la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo.* Este problema es relevante también a los fundamentos de la geometría. Escribe Hilbert (Yandell pág. 400): "Es bien sabido que Lie, con el auxilio del concepto de grupo continuo de transformaciones, ha establecido un sistema de axiomas para la geometría y [...] ha probado que este sistema es suficiente [...]. Pero como Lie asume [...] que las funciones que definen su grupo son diferenciables, queda aún por determinar si la suposición de la diferenciabilidad en conexión con [la suficiencia] de los axiomas de la geometría es inevitable [...]".

Yandell explica (pág. 144) muy apropiadamente la razón por la que, si tomamos literalmente los detalles técnicos que acompañan el enunciado de este problema, lo preguntado por Hilbert es falso; en consecuencia, por consenso general, lo que la comunidad matemática asumió como el problema 5to. de Hilbert es en términos simples y modernos la cuestión de *si todo grupo local euclídeo es un grupo de Lie.*

La respuesta positiva a este problema apareció en dos artículos publicados en el *Annals of Mathematics* de 1952; uno por **Andrew Gleason**, y otro por **Deane Montgomery** y **Leo Zippin**.

6. *Axiomatizar las ciencias físicas.* Más específicamente Hilbert pide investigar los fundamentos de "*aquellas ciencias físicas en las que la matemática juega un papel importante; en el primer nivel están la teoría de probabilidades y la mecánica*".

Este es realmente un programa de investigación, que aún no ha sido del todo resuelto y en el cual han participado muchos investigadores. El primer paso en este programa lo dio **Andrei Nikolaevich Kolmogorov** en 1933 cuando presentó sus axiomas para las probabilidades.

7. *Establecer la irracionalidad y trascendencia de ciertos números (e.g. $2^{\sqrt{2}}$ y e^{π}).* Resuelto por: **A. O. Gelfond**, **Theodor Schneider** y **Carl Ludwig Siegel**. En el capítulo sobre este problema, Yandell da una magnífica explicación de la transcendencia de números de Liouville como

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{10}} + \frac{1}{10^{10^{10}}} + \frac{1}{10^{10^{10^{10}}}}$$

que puede ser comprendida por estudiantes del último año de bachillerato.

8. *Resolver ciertos problemas sobre los números primos: la Hipótesis de Riemann sobre los ceros de la función zeta y la Conjetura de Goldbach.* Ambos problemas siguen sin resolverse.

9. *Demostrar la Ley Más General de Reciprocidad en cualquier Cuerpo Numérico.* Este problema fue resuelto por **Emil Artin** en 1927, quien ya en 1923 habia conjeturado una ley general de reciprocidad y probado unos casos particulares, inspirado en el importante trabajo de clasificación de cuerpos del japonés **Takagi**. Ese mismo año 1927, Artin (con 29 años de edad), publicó también su solución al problema 17 de Hilbert, lo cual lo consagra como el único miembro de esta clase de honores en resolver dos problemas de Hilbert en su totalidad.

10. *Determinar si cualquier ecuación diofántica puede resolverse de manera algorítmica.* Resuelto por **Yuri Matiyasevich** en 1970 basado en trabajos relacionados con este problema por **Julia Robinson** y **Martin Davis**, y en menor medida por **Hilary Putnam**. La respuesta es que no todas las ecuaciones diofánticas son solubles algorítmicamente.

11. En palabras de Kaplansky (Yandell pág. 247) "*el undécimo problema de Hilbert es sencillamente esto: clasificar formas cuadráticas sobre cuerpos numéricos algebraicos*". Aparentemente Hilbert deseaba extender el trabajo de Minkowski sobre formas cuadráticas con coeficientes racionales a cualquier cuerpo algebraico, y esto lo logró **Helmut Hasse** en 1923.

12. Yandell (pág. 256) nos resume el problema 12 de Hilbert asi: "*Hallar funciones analíticas que generen todas las extensiones finitas abelianas de cualquier cuerpo numérico algebraico*". Tenemos entonces aqui otro programa de investigación (y no un único problema) ya que la solución depende del cuerpo algebraico particular con que se arranque. En este caso no encontramos en el libro un nombre o algunos nombres a quien atribuir la respuesta a esta propuesta de Hilbert, sino más bien el nombre de una teoría, producto de un colectivo y aún fructífera en resultados, donde se enmarca esta: la Teoría de los Cuerpos de Clases.

13. Otra vez prefiero la presentación concisa de Yandell a la original del problema 13, y es ésta (pág. 354): *Establecer la existencia de funciones continuas* *que son inherentemente de tres variables y que no pueden ser representadas como superposiciones de funciones continuas de dos variables.*

Yandell dedica unas 30 páginas de su libro para contarnos la historia del principal autor de la solución de este problema, y aqui nos encontramos con una de las biografías más emocionantes e intelectualmente increibles de los miembros de la "clase de honores"; se trata de la vida de **Kolmogorov**.

En 1956, Kolmogorov, ya un matemático de 53 años con una gran reputación, demostró que cualquier función continua en cualquier número de variables puede construirse utilizando funciones continuas de tres variables y mediante un número finito de sustituciones. Entonces, en 1957, **Vladimir Igorevich Arnold**, estudiante de Kolmogorov y con 19 años de edad, demostró que dos variables son suficientes completando así la solución al problema 13. Pero ese mismo año de 1957, Kolmogorov volvió sobre sus pasos y demostró una versión más fuerte de la solución conocida.

14. *Establecer la finitud de ciertos sistemas completos de funciones.* Específicamente, Hilbert está interesado en las funciones racionales, las cuales forman un anillo, y lo que desea saber es si este anillo tiene una base finita.

Resuelto por **Masayoshi Nagata** en 1959 en forma negativa produciendo un contraejemplo.

15. El título del problema 15 de Hilbert es: "*Fundamentar Rigurosamente el Cálculo Enumerativo de Schubert*". Hermann Schubert (1848–1911) había diseñado un método simbólico para manipular curvas y superficies algebraicas que le permitía responder preguntas numéricas del siguiente estilo: ¿Cuántas rectas intersectan cuatro rectas dadas en el espacio tridimensional? Hilbert deseaba una axiomatización de este Cálculo Enumerativo de Schubert y una demostración formal de su correctitud, por lo que, en un sentido amplio, es éste otro problema fundacional. Los primeros grandes pasos hacia una fundamentación rigurosa del cálculo de Schubert fueron dados por **Bartel Leendert van der Waerden** en 1930. Le sigue **André Weil** en 1946 con la publicación de su *Fundamentos de la Geometría Algebraica* y luego una larga lista de investigadores que con sus trabajos contribuyeron con una respuesta considerada definitiva en 1960.

16. En el problema 16 Hilbert pide *una descripción cualitativa (pero rigurosa) de las posibles formas que pueden tener las curvas y superficies correspondientes a ecuaciones algebraicas considerando como soluciones sólo números reales* (Yandell pág. 275).

Este es uno de los tres problemas considerados aún no resueltos completamente (los otros dos son el 6 y el 8), a pesar de la larga lista de matemáticos que intentaron resolverlo comenzando con el mismo Hilbert.[2]

[2]Recientemente apareció un artículo en el *Bull. of the AMS, vol. 39, April 2002* por Y. Ilyashenko, titulado "Centennial History of Hilbert 16th Problem", que tal vez constituye el

17. En el problema 17, Hilbert pide, esencialmente, *demostrar que toda forma definida se puede expresar como una suma de cuadrados perfectos de funciones racionales.* (Un polinomio con coeficientes reales tal que nunca adquiere valores negativos para cualquier evaluación real de sus variables es una forma definida). Como ya indiqué antes, este problema fue resuelto positivamente por **Emil Artin** en 1927. Es importante notar que la demostración de Artin es existencial: dada una forma definida, demuestra que existe alguna suma de cuadrados de funciones racionales que la expresa, pero no dice cómo construir esa suma. En 1957 **Georg Kreisel** exhibió un método para construir la deseada suma de funciones racionales utilizando el Análisis No-estandar de Abraham Robinson. Artin tuvo conocimiento de esta demostración no-estandar del problema 17 y comentó al respecto (Yandell pág. 266): "*prefiero una prueba clara de existencia a una construcción con $2^{2^{100}}$ pasos*".[3]

18. El problema 18 consta de tres partes, las cuales resume muy bien Yandell en su libro de la siguiente manera:

(i) Determinar si el número de grupos cristalográficos en los espacios euclídeos de grandes dimensiones es finito.

(ii) Determinar si se puede llenar el espacio con regiones fundamentales idénticas que no estén asociadas con un grupo cristalográfico.

(iii) Determinar la manera más eficiente de llenar el espacio con varios sólidos regulares.

La primera parte fue resuelta por **Ludwig Bieberbach** en 1910. La segunda parte fue respondida afirmativamente por **K. Reinhardt** en 1928, quien presentó un ejemplo en tres dimensiones. La última parte tiene una respuesta reciente elaborada por **Thomas Hale**, que aún parece estar en revisión dada su longitud: un artículo de 250 páginas. Un resumen de este trabajo, escrito por el mismo Hale, apareció en el *Notices* de la AMS en 2000.

19. En el problema 19 Hilbert pregunta: "*¿Son las soluciones de problemas regulares en el cálculo de variaciones necesariamente analíticas*". Yandell explica (págs. 373-8) que dada la generalidad de la terminología utilizada por Hilbert, este problema se presta para varias interpretaciones. Sin embargo, la interpretación que prevaleció fue: *¿Son las soluciones que admiten las ecuaciones diferenciales parciales elípticas únicamente analíticas?* Aún asi, existen diversas variaciones de este problema dependiendo, por ejemplo, del número de ecuaciones o de variables involucradas; por lo tanto la lista de quienes contribuyeron en la solución es numerosa. Los primeros pasos hacia la solución se

documento más actualizado hasta este momento sobre el *status* de este problema.

[3]En defensa del Análisis No-estandar he de indicar que la demostración a la Robinson-Kreisel del problema 17 ha sido preferida en textos como el *Modern Algebra* de Jacobson.

le atribuyen al ruso **Sergey Natanovich Bernstein** con una tesis presentada en 1904 en la Sorbona. Le siguen **L. Lichtenstein** en 1912, **E. Hopf** en 1929, **Leray-Schauder** (1934), **Petrovsky** (1939), **Caccioppoli** (1934, y más tarde en 1950-51), **Morrey** (1958), **Ennio De Giorgi** y **John Nash** con resultados similares pero independientes en 1958.

20. Muy vinculado al problema anterior es el problema 20 donde Hilbert pregunta: "*¿Tiene solución cualquier problema regular del cáculo de variaciones?*". Y al igual que el problema 19, la generalidad de este problema lo convierte en un programa de investigación en el que participaron incontables investigadores, siendo **S. Bernstein** otra vez quien dio los primeros pasos fundamentales.

21. El problema 21 fue originalmente planteado por Riemann de manera implícita en uno de sus escritos y Hilbert, partiendo de esos trabajos de Riemann, pide esencialmente resolver lo siguiente: *Demostrar que siempre existe un sistema de ecuaciones diferenciales de la clase de Fuchs, con un conjunto de puntos singulares y grupo monodrómico preestablecidos.* La historia de la solución de este problema es un ilustre ejemplo de lo humano que es errar. En 1908 **Josip Plemelj** presentó una respuesta afirmativa que superó en simplicidad y generalidad a la respuesta parcial que el mismo Hilbert habia dado en 1905, valiéndole todos los honores posibles en su Slovenia natal y "*muriendo en 1967 convencido de haber resuelto el problema*". Con esta frase, que bien construye el suspenso en el lector, Yandell (pág. 367) nos anuncia un inminente desastre. En 1989 el ruso **Andrei Bolibruch**, luego de varios años trabajando en una generalización más moderna y más completa de los resultados de Plemelj (ya se habian reconocido algunos "huecos" en la prueba de Plemelj) encontró un contraejemplo. No sólo la respuesta de Plemelj estaba incompleta sino también era falsa, y esta falsa respuesta pasó desapercibida 81 años. A manera de epílogo de este capítulo Yandell presenta una comunicación personal que recibiera de Bolibruch, donde el matemático se pregunta cuántos resultados importantes se habrán demostrado basándose en la falsa respuesta al problema 21 de Hilbert (y que por lo tanto quedan actualmente invalidados). Bolibruch cita uno en detalle.

22. Hilbert titula su Problema 22 así: *Uniformización de Relaciones Analíticas Mediante Funciones Automórficas* (pág. 417). Yandell nos explica (pág. 324): "Hilbert desea demostrar que existe una parametrización que usa funciones automórficas de cualquier superficie definida por *cualquier relación analítica y no algebraica*. En particular, él desea asegurarse que *todos los puntos regulares de un cuerpo analítico son alcanzables y representables*."

Este problema es planteado por Hilbert como una petición a extender los trabajos de **Jules Henri Poincaré** concernientes a casos particulares de este tipo de representaciones. Y es precisamente **Poincaré** quien en 1907, a la edad de 53 años, resuelve esta cuestión en toda su generalidad, "utilizando un proceso exhaustivo y un espacio de cubrimiento universal (proveniente de la topología algebraica)" (pág. 324).

El problema fue resuelto también, independientemente y en el mismo año, por **Paul Koebe** de la Universidad de Göttingen. Sobre **Koebe**, Yandell nos presenta una corta y más bien oscura biografía, donde encontramos que Koebe "... tenía reputación de ladrón de ideas de matemáticos más jóvenes" (pág. 298); y más adelante se nos revela que el joven Courant fue uno de los robados.

23. El último problema de la lista es otro programa de investigación con un enunciado un poco vago. Hilbert comienza así: *Extender el Desarrollo de los Métodos del Cálculo de Variaciones* , y luego continúa con un largo ensayo donde justifica la necesidad de desarrollar las técnicas que se conocían entonces para resolver ciertas ecuaciones. Yandell opina (pág. 381): "No tiene sentido hablar de este problema como resuelto, mucho menos hablar de alguien en específico que lo haya resuelto." Esencialmente Hilbert pide trabajar en el Cálculo de Variaciones y lo importante es que la comunidad matemática respondió afirmativamente a esta sugerencia.

ARGIMIRO ARRATIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
VENEZUELA