

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

**Boletín
de la
Asociación
Matemática
Venezolana**

Vol. X • No. 1 • Año 2003

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen X, Número 1, Año 2003
I.S.S.N. 1315-4125

Editor
Argimiro Arratia

Comité Editorial
Oswaldo Araujo Eduardo Lima de Sá
Alejandra Cabaña Gerardo Mendoza Joaquín Ortega

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

Presidente
Wilfredo Urbina

Capítulos Regionales

CAPITAL

Wilfredo Urbina, Matemáticas, UCV
wurbina@euler.ciens.ucv.ve

LOS ANDES

Oswaldo Araujo, Matemáticas, ULA
araujo@ciens.ula.ve

ZULIA-FALCON

Fernando Sánchez, Matemáticas, LUZ
fsanchez@luz.ve

CENTRO-OCCIDENTAL

Neptalí Romero
nromero@uicm.ucla.edu.ve
Matemáticas, UCLA

ORIENTE

Jacques Laforgue
laforgue@sucre.udo.edu.ve
Matemáticas, UDO

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
amv@usb.ve <http://amv.ivic.ve/>

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen X, Número 1, Año 2003

PRESENTACION	3
ARTICULOS	
On the Approximation Properties of Bernstein Polynomials via Probabilistic Tools Henryk Gzyl and José Luis Palacios	5
Funções de Classe C^k Carlos Humberto Soares Júnior	15
Quelques Remarques sur les d-webs des Surfaces Complexes et un Problème Proposé par D. Cerveau Ivan Pan	21
On the Directional Differentiability Properties of the max-min Function Erdal Ekici	35
Los Números de (Euler)-Catalan Mercedes H. Rosas	43
Comentarios sobre la Definición de Autómata Celular Neptalí Romero	59
HISTORIA	
Władysław Orlicz (1903 - 1990) – Matemático Polaco – Lech Maligranda	79
MATEMÁTICAS RECREATIVAS	
Sumando la Derivada de la Serie Geométrica Lyonell Boulton y Mercedes H. Rosas	89
INFORMACION NACIONAL	
Lázaro Recht, Premio Lorenzo Mendoza Fleury 2003 otorgado por la Fundación Polar Eduardo Lima de Sá	99
INFORMACION INTERNACIONAL	
La Esquina Olímpica Rafael Sánchez Lamonedá	105
LIBROS	
<i>A New Kind of Science</i>, por Stephen Wolfram Reseñado por Alfredo Octavio	109

Presentación

El Boletín arriva a su décimo volúmen y tenemos muchos motivos para celebrarlo.

Celebramos que el número de contribuciones recibidas este año, para ser consideradas a publicar en el Boletín, superó a las de cualquier otro año. Luego de un riguroso proceso de evaluación hemos aceptado los seis artículos que aquí presentamos.

Celebramos el premio Polar que le ha sido otorgado este año a nuestro estimado colega y miembro muy activo de nuestra AMV, Lázaro Recht. Sobre este premio escribe Eduardo Lima de Sá, quien diese el discurso de presentación de Lázaro en la entrega del premio en la Fundación Polar.

Celebramos junto a Lech Maligranda, miembro extranjero de nuestra Asociación, el centenario del nacimiento del matemático polaco Władysław Orlicz, y con su artículo iniciamos una nueva sección en el Boletín: Historia de la Matemática, para la cual están todos invitados a contribuir.

Y celebramos los triunfos de los jóvenes matemáticos venezolanos en la más reciente Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria, evento que reseña Rafael Sánchez en su habitual columna *La Esquina Olímpica*.

En la sección *Matemáticas Recreativas*, L. Boulton y M. Rosas nos enseñan como sumar las derivadas de la serie geométrica con herramientas “pre-Cálculo”. Y en la sección *Libros*, A. Octavio escribe sus impresiones sobre el más reciente libro de Stephen Wolfram.

ARGIMIRO ARRATIA

On the Approximation Properties of Bernstein Polynomials via Probabilistic Tools

Henryk Gzyl and José Luis Palacios

Abstract

We study two loosely related problems concerning approximation properties of Bernstein polynomials $B_n f(x)$ of some function f on $[0, 1]$: the absence of Gibbs phenomenon at points at which f has jumps, and the convergence of $(B_n f)'(x)$ towards $f'(x)$. Both results are obtained using classical probabilistic tools. In particular the proof of the second statement relies on the representation of the derivative $(B_n f)'(x)$ as the expectation of the functional of a random variable.

1 Introduction.

Let f be a real function defined on the interval $[0, 1]$. Let $S_{n,x}$ be a Binomial random variable with parameters n and x , and let $E[X]$ denote the expected value of the random variable X . In our previous paper [3], we showed how to use the theory of large deviations to derive rates of convergence of the Bernstein polynomials, defined as:

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) = E f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \quad (1)$$

to the limit function f , when the f being approximated is Lipschitz continuous. The rate $O(n^{-1/3})$ obtained with Bernstein's classic probabilistic proof, where all that is used is Chebyshev's inequality, was improved to $O((\ln n/n)^{1/2})$.

M. K. Khan ([4]) brought to our attention the fact that the optimal rate among Lipschitz functions is indeed $n^{-1/2}$. Moreover, P. Mathé, in a nice historical framework, showed in [5] that if the function is Hölder continuous with exponent α for some $0 < \alpha \leq 1$, the rate of convergence is $n^{-\alpha/2}$.

Some obvious questions come up when we compare the approximation of f given by (1) with approximations by, say, Fourier series or other orthogonal expansions. For starters: how does $B_n f(x_0)$ behave when f has a jump discontinuity at x_0 ? And more important, does the Gibbs-Wilbraham phenomenon (see [Hewitt-Hewitt]) take place as well?

In this paper we continue using probabilistic tools to further study approximation properties of $B_n f(x)$ when f is not continuous. In fact, we show that the Gibbs phenomenon does not occur for the approximation of monotone, piecewise smooth functions, having both left and right derivatives at every point, by Bernstein polynomials, contrary to what happens with the Fourier series of such a function. Specifically, we consider a simple jump function (see (2) below) and prove that $B_n f(x_0) \rightarrow \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$ as $n \rightarrow \infty$, and also that the convergence is monotone on both sides of the discontinuity, as a consequence of which the characteristic overshoot of the Gibbs phenomenon does not occur. We also provide estimates of the size of the approximation error and the rate of convergence at the discontinuity point. Later on we prove that for a bounded function f , $(B_n f)'(x)$ converges to $f'(x)$ at all x at which $f'(x)$ exists.

Let f_n be a sequence of approximants to a piecewise smooth f that has right and left derivatives at every point, say a partial sum of a trigonometric series, Bessel functions or Gegenbauer polynomials. In general, the Gibbs phenomenon can be described by the following behavior:

- (i) If x_0 is a discontinuity point of f , then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

- (ii) On any subinterval $[x_1, x_2]$ for which the function is continuous, we have uniform convergence:

$$\lim_{n \uparrow \infty} \max_{x_1 \leq x \leq x_2} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

- (iii) On any subinterval containing a single discontinuity x_0 of the function, we have Gibbs phenomenon: for small $\delta > 0$

$$\lim_{n \uparrow \infty} \left(\max_{|x_0 - x| \leq \delta} f_n(x) - \min_{|x_0 - x| \leq \delta} f_n(x) \right) = C |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|.$$

where

$$C = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx \approx 1.18.$$

See the work by Bachman-Narici-Beckensterin, Dym-Mc Kean or Gray-Pinsky for precise statements and examples in which the Gibbs phenomenon occurs. Gibbs phenomenon arises when approximating discontinuities using smooth approximants. In addition to the more recent paper by Gray and Pinky, Hewitt-Hewitt provide us with an excellent survey with many historical details. In [12], Gottlieb and Shiu provide a short complementary historical review, among other interesting results which we mention below.

In the next section we shall show that the Bernstein polynomial approximant satisfies (i) and (ii) above, and that it does not overshoot at a point of discontinuity, in other words, that (iii) holds with $C = 1$ whenever f is a finite sum of jump functions, that is functions that change only at jump points. We extend these results to a monotone f with a finite number of jumps with a minor modification on (iii). In the last section we show how to write $(B_n f)'(x)$ as an expectation of a functional of a binomial variable, and study the convergence of this expectation to $f'(x)$.

2 No Gibbs phenomenon for Bernstein polynomials.

Let us consider a simple jump function

$$f(x) = \begin{cases} a & x < x_0 \\ b(> a) & x \geq x_0 \end{cases} . \quad (2)$$

The Bernstein polynomial for this function is

$$B_n f(x) = aP\left(\frac{S_{n,x}}{n} < x_0\right) + bP\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) = a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right),$$

for which the following bounds obviously hold:

$$a = B_n f(0) \leq B_n f(x) \leq B_n f(1) = b. \quad (3)$$

It can also be proved that $B_n f$ is an increasing function on account of the fact that if $x \leq y$ then for $0 \leq k \leq n$ one has

$$P(S_{n,x} \geq k) = \sum_{i \geq k} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \leq \sum_{i \geq k} \binom{n}{i} y^i (1-y)^{n-i} = P(S_{n,y} \geq k). \quad (4)$$

Both sides of (4) are equal to 1 when $k = 0$. For other values of k , one subtracts from each side the appropriate terms that preserve the inequality.

A more elegant way to prove (4) is to consider n independent copies of the bivariate 0-1-valued variables (X_i, Y_i) , $1 \leq i \leq n$, with joint distribution dictated by the probabilities $P(X_i = Y_i = 1) = x$, $P(X_i = 1, Y_i = 0) = 0$ and $P(X_i = Y_i = 0) = 1 - y$. If we define $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ and $W = \sum_{i=1}^n Y_i$, then the distributions of Z and W are those of, respectively, $S_{n,x}$ and $S_{n,y}$, and by construction $\{Z \geq k\} \subset \{W \geq k\}$, so that $P(S_{n,x} \geq k) = P(Z \geq k) \leq P(W \geq k) = P(S_{n,y} \geq k)$.

We will deal now with uniform convergence on an interval $[x_1, x_2] \subset [0, 1] - \{x_0\}$. Consider first $x_2 < x_0$. By Chebyshev's inequality

$$P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \leq P\left(\left|\frac{S_{n,x}}{n} - x\right| \geq x_0 - x\right)$$

$$\leq \frac{x(1-x)}{n(x_0-x)^2} \leq \frac{1}{4n(x_0-x_2)^2}, \quad (5)$$

and therefore

$$B_n f(x) \rightarrow a = f(x)$$

uniformly in the interval $[x_1, x_2]$. A similar argument holds for $x \in [x_1, x_2]$ such that $x_0 < x_1$.

On the other hand, if $x = x_0$ we have

$$B_n f(x_0) = a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right).$$

Now, if we consider $X_i, 1 \leq i \leq n$, to be independent Bernoulli variables with parameter x_0 we can write

$$P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right) = P\left(\sum_{i=1}^n (X_i - x_0) \geq 0\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - x_0)}{\sqrt{nx_0(1-x_0)}} \geq 0\right) \rightarrow \frac{1}{2},$$

as $n \rightarrow \infty$ by the central limit theorem (CLT), and

$$\left|B_n f(x_0) - \frac{a+b}{2}\right| = |a-b| \left|P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right) - \frac{1}{2}\right| \rightarrow 0,$$

as $n \rightarrow \infty$, that is, $B_n f(x_0)$ converges to the average of the right and left limits of f at x_0 .

These calculations take care of properties (i) and (ii) for a jump function as described in (2).

To verify that condition (iii) holds with $C=1$, i. e., that the approximation by Bernstein polynomials fits well, note that on account of $B_n f$ being increasing we have

$$\max_{|x_0-x| \leq \delta} B_n f(x) - \min_{|x_0-x| \leq \delta} B_n f(x) = B_n f(x_0 + \delta) - B_n f(x_0 - \delta),$$

and letting n tend to infinity and using property (ii) on $x_0 + \delta$ and $x_0 - \delta$ we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{n \uparrow \infty} \left(\max_{|x_0-x| \leq \delta} B_n f(x) - \min_{|x_0-x| \leq \delta} B_n f(x) \right) &= |f(x_0 + \delta) - f(x_0 - \delta)| \\ &= |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|. \end{aligned}$$

Comments These results can be extended obviously to a finite sum of simple jump functions. The extension to any monotone function with finitely many jumps in $[0, 1]$ -which can be written as a sum of a continuous monotone function plus a finite sum of simple jump functions- is now straightforward. Notice that

when dealing with approximations by Bernstein polynomials, items (i) and (ii) mentioned in the introduction, remain valid, But item (iii) has to be replaced by

(iii)' If x_0 is a discontinuity of f then

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{|x_0 - x| \leq \delta} B_n f(x) - \min_{|x_0 - x| \leq \delta} B_n f(x) \right) = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|.$$

which can be rephrased as saying that there is no Gibbs phenomenon for approximation by Bernstein polynomials.

This connects with the following general problem, for which there seems to be no general answer: Suppose we want to approximate a jump by a sequence of approximants. Which properties of the approximating sequence cause the overshoot phenomenon? Typically, as in approximation by trigonometric polynomials, the approximating sequence consists of partial sums of an orthogonal series. Is it orthogonality which causes the overshooting? If so, then one should not wonder that Bernstein polynomials do not show it. Is it smoothness? There seems to be no general theorem in this direction, but seemingly Gibbs phenomenon arises from approximating a jump by a system which is designed to allow approximations of arbitrary order. The latter statement is supported by results of V. L. Velikin [7], who showed that spline approximation yields the same phenomenon, if the smoothness of the splines tends to ∞ . Bernstein polynomials, although smooth, allow approximation only up to order n^{-1} , no matter how smooth the function is, see for example the results in section 1.6 of the book by G. G. Lorentz. In section 4.16 of [10] it is shown how approximating by Cesaro sums, kills the overshooting. And this issue is explored further in section 3 of [12] as part of the problem of devising rapidly convergent methods for reconstructing local behavior (value of a function at a point) from global data (Fourier coefficients).

In what we did above, we did not pay attention to issues related to speed of convergence. As we did in [2], we can make some precise statements invoking the following large deviations result found for instance in [9]

Lemma. For a binomial random variable $S_{n,x}$ and $a > 0$ arbitrary

$$P(|S_{n,x} - nx| > a) \leq 2e^{-\frac{2a^2}{n}}. \quad (6)$$

Then, for example, the bound $O(\frac{1}{n})$ of the uniform convergence in (ii) obtained with Chebyshev inequality in (5) may be improved to the exponential bound $2e^{-2n(x_0-x)^2}$. Likewise, when verifying that condition (iii) above holds with $C=1$, we can argue that the speed of convergence to the limit is exponential. The lemma will also be used in the proof of proposition 2 below.

3 Convergence of $(B_n f)(x)'$ towards $f'(x)$

In the previous section we showed that $B_n f$ is increasing when f is an increasing jump function by direct computations with the binomial distribution. We can show in general that when $f(x)$ is increasing (resp. decreasing), then the derivative $(B_n f)'(x)$ of $B_n f(x)$ is positive (resp. negative), and therefore $B_n f$ is also increasing (resp. decreasing). In fact, we can provide the following

Proposition 1. The derivative of the Bernstein polynomial $B_n f$ can be expressed as

$$(B_n f)'(x) = E \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 D(n, f)(x) \right], \quad (7)$$

where

$$D(n, f)(x) = \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\frac{S_{n,x}}{n} - x}.$$

Proof. Deriving (1) with respect to x we obtain

$$\begin{aligned} (B_n f)'(x) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i f\left(\frac{i}{n}\right) x^{i-1} (1-x)^{n-i} \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-i) f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i-1} \\ &= \frac{1}{x} E S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - \frac{1}{1-x} E (n - S_{n,x}) f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \\ &= \frac{1}{x(1-x)} E \left[(S_{n,x} - nx) f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{x(1-x)} E \left[(S_{n,x} - nx) \left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x) + f(x) \right) \right] \\ &= \frac{1}{x(1-x)} E \left[(S_{n,x} - nx) \left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x) \right) \right] \\ &= E \left[\frac{(S_{n,x} - nx)^2}{nx(1-x)} \left(\frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\frac{S_{n,x}}{n} - x} \right) \right] \\ &= E \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 D(n, f)(x) \right], \end{aligned}$$

as claimed •

From this is clear that $(B_n f)'(x)$ is positive (resp. negative) in case $D(n, f)(x)$ is positive (negative), and this occurs whenever f is increasing (resp. decreasing). Furthermore, if x is a point where the derivative exists, $D(n, f)(x) \rightarrow f'(x)$ as $n \rightarrow \infty$, and the squared term in the integral in (7), by the CLT, converges to the square of a standard normal variable, so we should have $(B_n f)'(x) \approx f'(x)$ when n is large. This can be made rigorous via a probabilistic proof which in fact does not use the CLT, as follows:

Proposition 2. Assume $\sup_{x \in [0,1]} f(x) = M < \infty$. Then for any x such that $f'(x)$ exists we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n f)'(x) = f'(x).$$

Proof. Define $A(n, f)(x) = D(n, f)(x) - f'(x)$. Then we can write

$$\begin{aligned} (B_n f)'(x) &= E \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 D(n, f)(x) \right] \\ &= f'(x) + E \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 A(n, f)(x) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

since $E \left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 = 1$.

Now, since $f'(x)$ exists, given $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if $\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| < \delta$ then $|A(n, f)(x)| < \epsilon$. We prove that the absolute value of the second summand in (8) goes to zero by splitting and bounding it by

$$\begin{aligned} &E \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| 1_{\{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| < \delta\}} \right] \\ &+ E \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| 1_{\{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta\}} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

where 1_A stands for the indicator function of the set A . The first summand in (9) can be bound by

$$\epsilon E \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 1_{\{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| < \delta\}} \right] \leq \epsilon, \quad (10)$$

whereas the second summand in (9) can be bound by

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2M}{\delta} + f'(x) \right) \frac{n}{4} E \left[\left(\frac{S_{n,x}}{n} - x \right)^2 \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta \right\}} \right] \\ & \leq \left(\frac{2M}{\delta} + f'(x) \right) \frac{n}{4} P \left(\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta \right), \end{aligned} \quad (11)$$

where the last inequality uses the fact that the square of the distance of the points $\frac{S_{n,x}}{n}$ and x in the interval $[0, 1]$ is less than 1. Now (11) can be bound, using (6) by

$$\left(\frac{2M}{\delta} + f'(x) \right) \frac{n}{2} e^{-2n\delta^2},$$

which goes to zero as $n \rightarrow \infty$, finishing the proof •

We should mention that a similar result is stated in as a problem 2 of chapter VII of Feller's classic [13]. What is not clear is whether a representation like (7), from which our proof follows, was known to him.

Acknowledgements It is a pleasure to thank the referees for their comments. They helped us improve our presentation.

References

- [1] E. Parzen, *Modern Probability Theory and its Applications*, New York, Wiley, 1960.
- [2] H. Gzyl and J. L. Palacios, The Weierstrass approximation theorem and large deviations, *American Mathematical Monthly*, 104 (1997).
- [3] M. K. Kahn, On the Weierstrass approximation theorem and large deviations, unpublished manuscript (1997).
- [4] P. Mathé, Approximations of Hölder continuous functions by Bernstein polynomials, *American Mathematical Monthly*, 106 (1999).
- [5] A. Gray and M. A. Pinsky, Gibbs phenomenon for Fourier-Bessel series, *Exposition. Math.*, 11 (1993) 123-135.
- [6] E. Hewitt and R.E. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 21:2 (1979/80) 129-160.
- [7] V.L. Velikin, A limit relation for different methods of approximating periodic functions by splines and trigonometric polynomials, *Ann. Math.*, 13:1 (1987) 45-74.

- [8] G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Vol. 8 of *Math. Expos.*, Univ. of Toronto Press, Toronto 1953.
- [9] N. Alon and J. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley, New York, 1992.
- [10] G. Bachman, L. Narici and E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [11] H. Dym and H. Mc Kean, *Fourier Series and Integrals*, Acad. Press, New York, 1972
- [12] D. Gottlieb and C. Shiu, On the Gibbs phenomenon and its resolution, *SIAM Rev.*, 39:4, 1997, 644-468.
- [13] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II, Wiley, New York, 1971.

HENRYK GZYL AND JOSÉ LUIS PALACIOS
DEPTO. DE CÓMPUTO Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
CARACAS, VENEZUELA
hgzyl@reacciun.ve; jopala@cesma.usb.ve

Funções de classe C^k

Carlos Humberto Soares Júnior

Abstract

When we study the functions of class C^k in the graduate courses, in general are not presented for us many examples. The objective here is to show a result of Ruas and Saia [2] that permit us to give infinite examples of functions of class C^k of the type $\frac{p}{q}$.

Resumo

Quando estudamos as funções de classe C^k nos cursos de graduação, em geral não nos são apresentados muitos exemplos. O objetivo aqui é expormos didaticamente um resultado de Ruas e Saia [2] que nos permite obter infinitos exemplos de funções de classe C^k do tipo $\frac{p}{q}$.

1 Introdução

Quando estudamos na graduação funções de classe C^k geralmente os exemplos dados, quando dados, não são muito satisfatórios. Em geral, os únicos bons exemplos dados são $x^{2k+1}\text{sen}(\frac{1}{x})$ que é de classe C^k e não é de classe C^{k+1} , $x^{2k+2}\text{sen}(\frac{1}{x})$ que é de classe C^k , possui derivada de ordem $k+1$, mas esta não é contínua na origem. Um outro exemplo também é o da função $x^k\|x\|$ que é de classe C^k e não é de classe C^{k+1} .

Aqui exporemos uma demonstração simples e elegante de um Teorema de Ruas e Saia [2] que nos dá a classe de diferenciabilidade de um quociente do tipo $\frac{p}{q}$ onde p e q satisfazem certas condições.

Gostaria de agradecer ao *referee* pelas sugestões apresentadas, as quais tornaram a leitura deste artigo incomparavelmente mais didática.

2 Teorema e exemplos

Sejam (w_1, \dots, w_n) uma n -upla de números inteiros positivos e d um número inteiro positivo.

Definição 2.1 Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é quase-homogênea do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$ se $f(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \lambda \geq 0$, onde $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas do \mathbb{R}^n .

Definição 2.2 Fixemos $(w_1, \dots, w_n; 2d)$ uma $(n+1)$ -upla de inteiros positivos. Definimos a função controle associada a (w_1, \dots, w_n) por $q_d(x) = x_1^{2a_1} + x_2^{2a_2} + \dots + x_n^{2a_n}$, onde os $a_{i,s}$ são tais que a função q_d é quase-homogênea do tipo $(w_1, \dots, w_n; 2d)$. Observe que $a_1w_1 = \dots = a_nw_n = d$.

Exemplo: Fixemos $(2, 3; 12)$. Então $q_6(x, y) = x^6 + y^4$ é a função controle associada a $(2, 3)$ e é quase-homogênea do tipo $(2, 3; 12)$.

Lema 2.3 Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quase-homogênea do tipo $(w_1, \dots, w_n; 2d)$. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|h(x)\| \leq c \cdot q_d(x)$.

Prova: Seja $S = \{y \in \mathbb{R}^n / q_d(y) = 1\}$. Observemos que para cada $x \neq 0$ fixado, existe $y \in S$, e um número real $\lambda \neq 0$, tal que $x = (\lambda^{w_1}y_1, \dots, \lambda^{w_n}y_n)$ (isso segue do fato da aplicação $\varphi : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(y, \lambda) = (\lambda^{w_1}y_1, \dots, \lambda^{w_n}y_n)$, ser sobrejetora).

Agora, seja $c = \sup\{\|h(y)\| / y \in S\}$. Então,

$$\|h(x)\| = \|h(\lambda y)\| = \lambda^{2d} \|h(y)\| \leq \lambda^{2d} c = \lambda^{2d} c q_d(y) = c q_d(x).$$

■

Definição 2.4 Sejam $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$ uma n -upla de números inteiros positivos e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica dada por

$$h(x) = \sum_{\alpha} b_{\alpha} x^{\alpha},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Definimos a filtração de h , relativa a \vec{w} , por

$$fil(h, \vec{w}) := \min\{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n / b_{\alpha} \neq 0\}.$$

No que se segue denotaremos a filtração de h , relativa a $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$, simplesmente por $fil(h)$.

Abaixo citamos algumas propriedades da filtração.

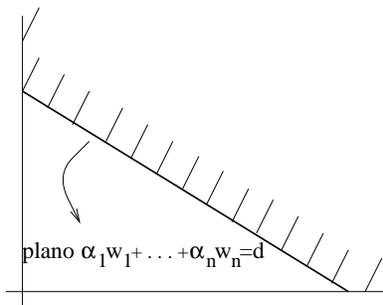
Propriedades 2.5 Fixemos a n -upla (w_1, \dots, w_n) com $w_1 \leq \dots \leq w_n$. Então:

1. $fil(fg) \geq fil(f) + fil(g)$;
2. $fil(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \geq fil(f) - w_n$.

Podemos interpretar geometricamente a filtração da seguinte forma:

Fixemos uma $n + 1$ -upla $(w_1, \dots, w_n; d)$. Podemos identificar o conjunto das funções monomiais $\{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / \text{fil}(x^\alpha) = d\}$ com o conjunto $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) / w_1\alpha_1 + \cdots + w_n\alpha_n = d\}$. Observe que este último consiste do conjunto dos pontos do plano $w_1\alpha_1 + \cdots + w_n\alpha_n = d$ normal a (w_1, \dots, w_n) .

Assim, se $h(x) = \sum b_\alpha x^\alpha$ é uma função analítica com $\text{fil}(h) \geq d$, geometricamente podemos dizer que os monômios x^α de h ($b_\alpha \neq 0$) estão na região achurada, conforme a figura abaixo.



Lema 2.6 *Sejam $q(x)$ uma função controle associada a $(w_1, \dots, w_n; 2d)$ com $w_1 \leq \cdots \leq w_n$ e $p(x)$ uma função analítica tal que:*

$$\text{fil}(p) \geq 2d + w_n + 1.$$

Então, a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ é diferenciável de classe C^1 .

Prova: O gradiente de f é

$$\nabla f(x) = \frac{q(x) \cdot \nabla p(x) - p(x) \cdot \nabla q(x)}{q(x)^2}, \text{ com } \inf_i \left\{ \text{fil} \left(\frac{\partial q}{\partial x_i}(x) \right) \right\} \geq 2d - w_n$$

e $\text{fil}(p(x)) \geq 2d + w_n + 1$, então $\text{fil}(q(x) \cdot \nabla p(x)) \geq 4d + 1$ e $\text{fil}(p(x) \cdot \nabla q(x)) \geq 4d + 1$.

Cada termo de $\nabla f(x)$ é da forma $g(x) \cdot \frac{h(x)}{q(x)}$, onde $h(x)$ é quase-homogênea do tipo $(w_1, \dots, w_n; 2d)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Daí segue-se do Lema 2.3 que $\frac{h(x)}{q(x)}$ é limitada, e portanto $\nabla f(x)$ é contínua. ■

Esse Lema é o primeiro passo para induzirmos o seguinte Teorema:

Teorema 2.7 (Ruas e Saia, [2]) *Sejam $q(x)$ uma função controle associada a $(w_1, \dots, w_n; 2d)$ com $w_1 \leq \cdots \leq w_n$ e $p(x)$ uma função analítica tal que:*

$$\text{fil}(p) \geq 2d + kw_n + 1, \quad k \geq 1.$$

Então, a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ é diferenciável de classe C^k .

Prova: Faremos indução na classe de diferenciabilidade k .

Primeiramente observemos que o caso $k = 1$ foi resolvido no Lema 2.6.

Assumamos agora, como hipótese de indução, que para toda função do tipo $F = \frac{H}{q}$ com $fil(H) \geq 2d + (k-1)w_n + 1$, F é de classe C^{k-1} .

Seja $f = \frac{h(x)}{q(x)}$ com $fil(h(x)) \geq 2d + kw_n + 1$. Então $\nabla f(x) = \frac{H(x)}{q(x)}$, com $fil(H) \geq 2d + (k-1)w_n + 1$, é de classe C^{k-1} , e portanto f é de classe C^k . ■

Exemplo 1: Seja

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Fixemos $(1, 1; 2)$. Observemos que $h(x, y) = x^4 + y^4$ e $q(x, y) = x^2 + y^2$ e portanto, como $fil(h) = 4 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1$, temos que f é de classe C^1 .

Não é difícil verificarmos que f não possui segunda derivada na origem, portanto não é de classe C^2 .

Esse exemplo mostra que o Teorema acima é o melhor possível.

Exemplo 2: Seja

$$f(x, y) = \frac{h(x, y)}{q(x, y)} = \frac{x^{11} + y^6 + x^5 y^3}{x^4 + y^2}.$$

Então, fixado $(1, 2; 4)$ e como $fil(h) = 11 = 4 + 3 \cdot 2 + 1$, temos que f é de classe C^3 .

Exemplo 3: Seja f a função

$$f(x, y, z) = \frac{h(x, y, z)}{q(x, y, z)} = \frac{x^a y^b z^c}{x^{4n} + y^{3n} + z^{2n}}$$

onde n é um número inteiro positivo. Suponhamos que $3a + 4b + 6c \geq 12n + 6k + 1$, onde k é um número inteiro positivo dado. Então, como q é quase-homogênea do tipo $(3, 4, 6; 12n)$ e $fil(h) = 3a + 4b + 6c \geq 12n + 6k + 1$, temos que f é de classe C^k .

Exemplo 4: Seja

$$f(x, y) = \frac{y^5 \operatorname{sen}(x)}{x^7 + xy^4}.$$

Podemos reescrever f como

$$f(x, y) = \frac{h(x, y)}{q(x, y)} = \frac{\frac{y^5 \operatorname{sen}(x)}{x}}{x^6 + y^4}.$$

Como q é quase-homogênea do tipo $(2, 3; 12)$ e $fil(h) = 19 = 12 + 2 \cdot 3 + 1$ temos que f é de classe C^2 .

Referências

- [1] E. L. Lima. *Análise no Espaço \mathbb{R}^n* , Editora da Universidade de Brasília.
- [2] M. A. Ruas & M. J. Saia. *C^ℓ -determinacy of Weighted Homogeneous Germs*, Hokkaido Math. J., vol. 26 (1997), pp 89-99.

UNIVERSIDADE REGIONAL DO CARIRÍ - URCA
CURSO DE MATEMÁTICA
CEP 63.050-480 - JUAZEIRO DO NORTE - CE - BRASIL
humberto@icmc.usp.br

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO
CX. POSTAL 668, CEP 13560-970 - SÃO CARLOS - SP - BRASIL
humberto@icmc.usp.br

Quelques remarques sur les d -webs des surfaces complexes et un problème proposé par D. Cerveau

Ivan Pan

Résumé

On introduit une notion d'intégrale première méromorphe pour les d -webs de surfaces complexes et on démontre une version du théorème de Jouanolou sur l'existence d'intégrale première pour ceux-ci. Comme application on démontre qu'un d -web sur le plan projectif dont toutes les feuilles sont algébriques est donné par une famille de courbes algébriques planes de degré d , ce qui a été conjecturé par D. Cerveau.

1 Introduction

Dans l'étude des équations différentielles complexes analytiques il semble être assez naturel de considérer *l'équation différentielle algébrique*

$$F(x, y, y') = 0,$$

où

$$F(x, y, z) := \sum_{i=0}^d c_i(x, y) z^{d-i} \in \mathbb{C}[x, y, z]$$

est un polynôme irréductible avec $d > 0$. L'étude des équations différentielles algébriques a été assez développée au début du vingtième siècle par des mathématiciens comme Fuchs, Poincaré, Malmquist, Painlevé et d'autres : voir par exemple [7], où on clarifie certains des travaux classiques et on fait un premier exposé assez complet sur le sujet.

Dès les premiers exemples on s'aperçoit qu'en général on ne pourra pas se restreindre à considérer des solutions *explicites* $y = y(x)$, à cause des ramifications ; en fait, pour l'équation différentielle

$$2y'y - 1 = 0, \tag{1}$$

qui n'a que degré 1 en y' (c'est-à-dire, le cas plus facile), on aimerait pouvoir dire que $y = \sqrt{x}$ est une solution de (1) au voisinage de 0, qui est un point de

ramification de la fonction “multiforme” associée à l’équation algébrique $y^2 = x$. Il semble plus raisonnable donc de travailler avec des solutions paramétrées

$$x = x(t), y = y(t)$$

à reparamétrisation près; dans le cas de l’équation (1) on peut, par exemple, prendre

$$x(t) = t^2, y(t) = t$$

pour décrire la solution dont on y fait référence. Dans cet exemple la ramification apparaît à cause du fait qu’on a pente infinie en 0; dans le cas plus général, où on a degré en y' plus grand que 1, la dérivée y' est déjà ramifiée par rapport aux autres variables (pour plus de détails voir [7], [8]).

Dans ce sens il est alors naturel d’étudier l’équation différentielle

$$c_0(x, y)dy^d + c_1(x, y)dx dy^{d-1} + \dots + c_d(x, y)dx^d = 0. \quad (2)$$

Pour un point générique de $p \in \mathbb{C}^2$ il existe d solutions de l’équation (2) dont leurs images sont des courbes analytiques transverses deux à deux en p . De la même façon que, lorsque $d = 1$, cette équation nous amène à la notion de feuilletage, dans le cas général on est conduit à considérer un concept nouveau que, suivant [3], on appellera *web de degré d* ou *d -web*.

Dominique Cerveau introduit dans [3] la notion de d -web sur une surface complexe arbitraire et propose comme problème (entre autres) de démontrer que tout d -web sur \mathbb{P}^2 dont toutes les feuilles sont algébriques est donné par une famille de courbes

$$a_0(x, y)u^d + a_1(x, y)tu^{d-1} + \dots + a_d(x, y)t^d = 0, [t, u] \in \mathbb{P}^1.$$

Le but principal de ce travail est d’introduire une notion d’intégrale première méromorphe pour un d -web sur une surface complexe compacte arbitraire et de démontrer une version pour les webs du théorème de Jouanolou sur l’existence d’intégrale première (théorème 4.1); comme corollaire on résout le problème ci-dessus (corollaire 4.1).

Notre approche repose sur les idées développées dans [8, chap. II] pour les équations différentielles polynomiales sur \mathbb{C}^2 . Plus précisément, on se donne un d -web \mathcal{W} sur une surface complexe connexe X . On lui associe de manière canonique une surface analytique (pas forcément lisse) $S_{\mathcal{W}}$, contenu dans l’espace total du fibré projectif $p : \mathbb{P} \rightarrow X$ associé au fibré tangent de X , en sorte que $\pi := p|_{S_{\mathcal{W}}} : S_{\mathcal{W}} \rightarrow X$ soit propre surjective de degré d ; on caractérise les surfaces qui proviennent de cette construction. Puis on associe sur toute désingularisation de $S_{\mathcal{W}}$ un feuilletage \mathcal{F} dont les feuilles “génériques” correspondent aux feuilles “génériques” de \mathcal{W} . Finalement on introduit une notion d’intégrale première méromorphe pour \mathcal{W} qui correspond avec la notion analogue pour \mathcal{F} .

J’aimerais remercier Marcos Sebastiani par les nombreuses discussions et ses précieuses suggestions.

2 Généralités

Si Z est un espace analytique, on désigne par \mathcal{O}_Z le faisceau des fonctions holomorphes sur Z . On appelle *surface analytique* un espace analytique de dimension pure 2. Une *variété complexe* (en particulier une surface) est un espace analytique lisse.

Soit X une surface complexe connexe avec fibré tangent T_X ; notons T^d la puissance symétrique d -ième du fibré cotangent $T_X^\vee := \text{Hom}(T_X, \mathbb{C})$ et $\mathcal{D}is \subset T^d$ l'hypersurface discriminante, c'est-à-dire, l'ensemble des points des fibres $\text{Sym}^d(T_{X,x}^\vee)$ ($x \in X$) constitué des polynômes (homogènes) avec solutions multiples.

Définition 2.1 *Un d -web \mathcal{W} sur X est la donnée d'un recouvrement $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ par des ouverts munis de sections $\omega_i \in H^0(U_i, T^d)$ avec de zéros isolés, telle que :*

- a) *l'image de w_i n'est pas contenue dans $\mathcal{D}is$*
- b) *$w_i|_{U_i \cap U_j} = g_{ij} w_j|_{U_i \cap U_j}$, où $g_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$. L'ensemble singulier $\text{Sing } \mathcal{W}$ et l'ensemble de zéros $\text{Zero } \mathcal{W}$ de \mathcal{W} sont les ensembles analytiques définis respectivement par*

$$U_i \cap \text{Sing } \mathcal{W} = w_i^{-1}(\mathcal{D}is), U_i \cap \text{Zero } \mathcal{W} = \{w_i = 0\}.$$

Si $\text{Sing } \mathcal{W} = \emptyset$ on dit que le web \mathcal{W} est régulier.

Observons que $\text{Sing } \mathcal{W}$ est un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 1 tandis que $\text{Zero } \mathcal{W}$ est un sous-ensemble discret de $\text{Sing } \mathcal{W}$.

Remarque 2.1 *Comme dans [3, Def. 4] on peut définir un web sans la restriction de considérer des sections $\omega_i \in H^0(U_i, T^d)$ avec des zéros isolés. Puisque l'ensemble $Z_i := \{w_i = 0\}$ est analytique, quitte à retrécir les U_i on peut supposer qu'au voisinage d'un point où Z_i a codimension 1, il est défini par une équation analytique $f_i = 0$; alors il existe $l \geq 1$ tel que $(1/f_i^l)w_i$ est encore une section locale de T^d qui n'a que des zéros isolés dans le voisinage considéré.*

Une *feuille locale* d'un web \mathcal{W} comme dans la définition 2.1 est l'image d'une application holomorphe

$$\epsilon : D \rightarrow X - \text{Sing } \mathcal{W}$$

où $D \subset \mathbb{C}$ est un disque ouvert telle que

$$w_i(d\epsilon(t)) = 0, \forall t \in \epsilon^{-1}(U_i), \forall i \in I.$$

Une *feuille globale* d'un web est définie comme la réunion maximale de feuilles locales obtenue par continuation analytique.

Exemple 2.1 Soit w une section méromorphe globale de T^d . Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement (par des ouverts) convenable de X , il existe des fonctions méromorphes $f_i : U_i \dashrightarrow \mathbb{C}$ dans U_i telles que les sections locales

$$w_i := f_i w$$

sont holomorphes, i.e. $w_i \in H^0(U_i, T^d)$, et possèdent des zéros isolés. Ceci définit donc un d -web sur X : c'est le d -web associé à w .

Exemple 2.2 Les 1-webs sur une surface X sont les feuilletages à singularités isolées sur X .

La famille de fonctions $\{g_{ij}\}$ de la définition 2.1 définit un 1-cocycle du recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$; se donner un d -web revient donc à se donner un homomorphisme de fibrés

$$\varphi : L \longrightarrow T^d$$

dont l'image n'est pas contenue dans $\mathcal{D}is$, avec L le fibré en droites associé au 1-cocycle. Il est donc clair qu'un autre homomorphisme $\varphi' : L \rightarrow T^d$ définit le même d -web (c'est-à-dire la même structure de feuilles) s'il existe $g : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe telle que

$$\varphi|_{L_x} = g(x)\varphi'|_{L_x}, \forall x \in X;$$

en particulier, si X est compacte g est constante. On notera aussi $\mathcal{W} = (L, \varphi)$.

Notons $p : \mathbb{P}(T_X) \rightarrow X$ le fibré en droites projectives sur X associé au fibré tangent de X . On va maintenant associer, à tout web \mathcal{W} , une surface analytique (en général ni lisse ni irréductible) $S_{\mathcal{W}} \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(T_X)$ et on va construire un morphisme (en fait injectif) de fibrés sur \mathbb{P}

$$\mu : N \longrightarrow T_{\mathbb{P}}^{\vee}, \quad (3)$$

avec N de rang 1, en sorte que :

- (i) au-dessus de $X - \text{Sing } \mathcal{W}$, la restriction π de p à $S := S_{\mathcal{W}}$ est un revêtement (non-ramifié) d'ordre d ;
- (ii) comme on verra dans le lemme 2.1, μ se restreint sur S pour définir un feuilletage \mathcal{F} sur (la partie non-singulier de) S ;
- (iii) π envoie les feuilles de \mathcal{F} dans des feuilles de \mathcal{W} .

Pour définir la surface S prenons des sections locales $\lambda_i \in H^0(U_i, L)$. On observe qu'en-dehors de $\text{Zero } \mathcal{W} \cap U_i$ le vecteur $\varphi(\lambda_i(x)) \in \text{Sym}^d(T_{X,x}^{\vee})$ est un polynôme homogène en deux variables qui sont des générateurs de $T_{X,x}^{\vee}$; il définit donc un idéal homogène dans l'algèbre symétrique $\text{Sym}(T_{X,x}^{\vee})$ qui varie de manière holomorphe avec x ; l'ensemble des zéros d'un tel polynôme est constitué des droites par l'origine dans $T_{X,x}$. Considerons les surfaces (locales) $S_i \subset p^{-1}(U_i) \subset \mathbb{P}$ définies comme l'adhérence de l'ensemble analytique défini

par la restriction de $\varphi(\lambda_i)$ à $U_i - \text{Zero } \mathcal{W}$, pour chaque $i \in I$. Puisque les sections qui définissent S_i et S_j diffèrent, lorsque $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, par le cocycle g_{ij} , ces (germes de) surfaces se recollent pour donner la surface analytique cherchée.

De manière plus explicite on peut réaliser $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbb{T}_X)$ en recollant, pour tout $i, j \in I$, les pièces locales $U_i \times \mathbb{P}_i^1$ et $U_j \times \mathbb{P}_j^1$ par les isomorphismes

$$\psi_{ij} \times A_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}_i^1 \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}_j^1, \quad (4)$$

où ψ_{ij} est l'homéomorphisme holomorphe du changement de variables sur $U_i \cap U_j$ et A_{ij} est la matrice jacobienne de ψ_{ij} , qui opère sur \mathbb{P}_i^1 comme l'application

$$[t_i, u_i] \mapsto [A_{ij}(t_i, u_i)].$$

Plus précisément, notons x_i, y_i des coordonnées locales sur U_i pour $i \in I$; on a

$$dx_i = a_{ij}dx_j + b_{ij}dy_j, \quad dy_i = c_{ij}dx_j + e_{ij}dy_j.$$

La matrice A_{ij} est l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & e_{ij} \end{pmatrix}.$$

Si on écrit

$$\varphi(\lambda_i(x_i, y_i)) = \sum_{i=0}^d a_i(x_i, y_i) dx^i dy^{d-i},$$

la surface S_i est définie dans $U_i \times \mathbb{P}_i^1$ par l'équation

$$\left\{ \sum_{i=0}^d a_i(x_i, y_i) t^i u^{d-i} = 0 \right\}.$$

Pour définir le morphisme μ on procède en deux étapes :

(a) Considérons les 1-formes locales sur $U_i \times \mathbb{C}_i^2$

$$\eta_i := t_i dy_i - u_i dx_i, \quad i \in I.$$

Lors de l'identification par les isomorphismes de l'équation (4), on obtient

$$\eta_i = \det(A_{ij}^{-1}) \eta_j,$$

ce qui définit un homomorphisme

$$r^* \mathbb{T}_X \longrightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{T}_X}^{\vee},$$

où $r : \mathbb{T}_X \rightarrow X$ est l'application du fibré.

(b) Considérons les 1-formes

$$\nu_i := \frac{1}{t_i} \eta_i, \quad \nu'_i := \frac{1}{u_i} \eta_i$$

sur les ouverts de $U_i \times \mathbb{P}_i^1$ définis respectivement par $t_i \neq 0$ et $u_i \neq 0$. On a

$$\nu_i = \frac{u_i}{t_i} \nu'_i;$$

cela définit un homomorphisme

$$q_i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow T_{U_i \times \mathbb{P}_i^1}^\vee$$

où $q : U_i \times \mathbb{P}_i^1 \longrightarrow \mathbb{P}_i^1$ désigne la projection canonique.

Si on rappelle que $q_i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) = \mathcal{O}_{U_i \times \mathbb{P}_i^1}(-1)$, en mettant ensemble les renseignements de a) et b) on en déduit l'homomorphisme voulu; puisque toutes les 1-formes ν_i, ν'_i sont jamais nulles, μ est injectif.

Remarque 2.2 *Si \mathcal{W} est régulier $S_{\mathcal{W}}$ est lisse et $\pi : S_{\mathcal{W}} \rightarrow X$ est un revêtement d'ordre d .*

Soit V une surface projective avec ensemble singulier Σ . Une *désingularisation* de V est un morphisme birationnel (propre) $\pi : W \rightarrow V$, où W est lisse, qui induit un isomorphisme par restriction

$$W \setminus \pi^{-1}(\Sigma) \xrightarrow{\pi|} V \setminus \Sigma.$$

Un théorème célèbre dû à H. Hironaka montre qu'il existe toujours une désingularisation, même pour le cas de dimension plus grande que 2. Pour une démonstration plus ou moins élémentaire, mais valable uniquement dans le cas de surfaces, on peut regarder [1, chap. III, §6], où on trouvera aussi une bonne bibliographie sur ce sujet.

Proposition 2.1 *Soit \mathcal{W} un d -web sur X avec surface associée S . Désignons par $\sigma : Y \rightarrow S$ une désingularisation de S . Alors, il existe un morphisme propre $\pi_Y : Y \rightarrow X$ génériquement fini de degré d , un feuilletage \mathcal{F} sur X et un ouvert $U \subset X$ tels que*

- a) $\text{Sing } \mathcal{W} \cap U = \text{Sing } \mathcal{F} \cap \pi_Y^{-1}(U) = \emptyset$;
- b) $\pi_Y : \pi_Y^{-1}(U) \rightarrow U$ est un revêtement (non-ramifié) de degré d ;
- c) π_Y envoie les feuilles de $\mathcal{F}|_{\pi_Y(U)}$ dans des feuilles de $\mathcal{W}|_U$.

Démonstration: L'homomorphisme de (3) est défini par spécification d'un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de X , une famille de sections $\xi_i \in H^0(U_i, T_{\mathbb{P}}^\vee)$ pour chaque $i \in I$ et un cocycle $\{h_{ij}\}_{i,j \in I}$ définissant le fibré en droites N , tels que

$$\xi_i = h_{ij} \xi_j.$$

Donc

$$\sigma_Y^*(\xi_i) = (h_{ij} \circ \pi_Y) \sigma_Y^*(\xi_j);$$

ceci définit un homomorphisme $N_Y \rightarrow T_Y^\vee$ qui correspond à un feuilletage sur Y .

L'assertion en suit aussitôt : on choisit $U := X - \pi_Y^{-1}(\text{Sing } \mathcal{W})$ et on utilise la remarque 2.2. \square

Remarque 2.3 *Dans $\text{Sing } \mathcal{W}$ on trouve trois types de points : les points de $\text{Zero } \mathcal{W}$ au-dessus desquels S contient une fibre de \mathbb{P} , les points au-dessus desquels S est singulière et les points au-dessus desquels S n'est pas singulier mais π ramifie, le premier ensemble pouvant intersecter le deuxième ; en particulier, si $d > 1$ l'ensemble $\text{Sing } \mathcal{W}$ est ou bien vide ou bien il est un sous-ensemble analytique réduit de dimension pure 1. Observons que ces trois ensembles sont analytiques et stratifient donc $\text{Sing } \mathcal{W}$.*

Soit $\mathcal{W} = (L, \varphi)$ un web sur X . Si X est projective, L possède une section méromorphe globale qui, via φ , définit une section méromorphe w de T^d sur $X - \text{Zero } \mathcal{W}$. Puisque $\text{Zero } \mathcal{W}$ est discret w se prolonge à X tout entier (voir [5, K, thm. 7]); comme dans l'exemple 2.1, cette section définit aussi \mathcal{W} . On en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Soit \mathcal{W} un d -web sur une surface complexe projective X . Il existe une section globale méromorphe de T^d qui définit \mathcal{W} . En particulier si $X = \mathbb{P}^2$ le web est polynomiale, autrement dit, il est défini (sur \mathbb{C}^2) par une équation différentielle polynomiale $F(x, y, y') = 0$ avec $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$.*

Démonstration: Pour le cas où $X = \mathbb{P}^2$ il suffit de rappeler que toute fonction méromorphe est rationnelle. \square

Exemple 2.3 *Tout web sur \mathbb{P}^2 est polynomiale mais pas à feuilles algébriques : le 2-web défini par*

$$x^4 dy^2 + (y^2 - 1) dx^2 = 0,$$

possède la feuille obtenue comme l'image de $t \mapsto (t, \sin(1/t))$.

3 Les d -webs produit

Considérons une famille de webs $\{(L_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ sur X . Si (L_i, φ_i) est un d_i -web, l'application naturelle

$$L_1 \otimes \cdots \otimes L_r \longrightarrow T^{d_1 + \cdots + d_r},$$

donnée par

$$\varphi : \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r \mapsto \varphi_1(\lambda_1) \cdots \varphi_r(\lambda_r),$$

définit un $(d_1 + \cdots + d_r)$ -web sur X si et seulement si $\text{im } \varphi \not\subset \text{Dis}$: c'est le web produit de cette famille ; on note aussi $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_r$.

Définition 3.1 Soit $\mathcal{W} = (L, \varphi)$ un d -web sur X . On dit que \mathcal{W} est un web produit s'il existe une famille de webs $\{(L_i, \varphi_i)\}_{1 \leq i \leq r}$ telle que \mathcal{W} est le web produit de cette famille; autrement dit, s'il existe un isomorphisme $\psi : \bigotimes_{i=1}^r L_i \rightarrow L$ tel que $\varphi \circ \psi = \varphi_1 \cdots \varphi_r$. On dit aussi que $\mathcal{W}_i := (L_i, \varphi_i)$ est un facteur de \mathcal{W} de degré d_i et on écrit $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \cdots \mathcal{W}_r$.

Si $g : Z \dashrightarrow Y$ est une application méromorphe dominante entre espaces analytiques de même dimension avec Y irréductible, on note $\deg g$ le cardinal d'une fibre générique.

Si V est un espace analytique irréductible, $\mathbb{C}[V]$ et $\mathbb{C}(V)$ dénotent respectivement, l'anneau des fonctions holomorphes et le corps des fonctions méromorphes sur V .

Lemme 3.1 Soit $S \subset \mathbb{P}(\mathbb{T}_X)$ une surface irréductible. Alors S est la surface associée à un d -web sur X si et seulement si $p|_S : S \rightarrow X$ est propre surjective de degré d . En particulier les feuilletages réguliers sur X correspondent aux sections de $\mathbb{P}(\mathbb{T}_X)$.

Démonstration: L'assertion directe suit de la construction de $S_{\mathcal{W}}$ faite au paragraphe précédent. Pour démontrer l'assertion réciproque supposons d'abord $\mathbb{P}(\mathbb{T}_X) = X \times \mathbb{P}^1$.

Soit $q \in S$ tel que $p^{-1}(p(q)) \not\subset S$. Par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un voisinage ouvert V_q de q dans $X \times \mathbb{P}^1$ et un polynôme irréductible dans $\mathbb{C}[V_q]$ de la forme

$$G_q(x, y, t, u) = \sum_i a_i(x, y) t^i u^{d-i},$$

tels que

$$S \cap V_q = \{G(x, y, t, u) = 0\},$$

où x, y sont des coordonnées sur l'ouvert $U_q := p(V_q)$. On définit des sections locales $w_q \in H^0(U_q, T^d)$ par

$$w_q = \sum_i a_i(x, y) dx^i dy^{d-i}.$$

Cette section définit bien un d -web sur U_q car $\{w_q = 0\}$ est discret : en effet, autrement S contiendrait une composante qui serait collapsée par p .

Supposons qu'on ait

$$S \cap V_{q'} = \{G'(x', y', t, u) = 0\}$$

pour un autre ouvert $V_{q'}$ avec $V_q \cap V_{q'} \neq \emptyset$ où x', y' sont des coordonnées sur $U_{q'} := p(V_{q'})$. Puisque G_q est irréductible, de la Nullstellensatz suit que

$$G_{q'}(x'(x, y), y'(x, y), t, u) = \alpha_{qq'}(x, y, t, u) G_q(x, y, t, u),$$

avec $\alpha_{qq'}$ ne s'annulant pas sur $V_q \cap V_{q'} \neq \emptyset$; on observe que $\alpha_{qq'}$ est défini dans $p^{-1}(U_q \cap U_{q'})$ car G_q et $G'_{q'}$ le sont. Puisque les fibres de p sont compactes,

$$\alpha_{qq'}(x, y, t, u) = \bar{\alpha}_{qq'}(x, y),$$

avec $\bar{\alpha}_{qq'} \in \mathcal{O}_X(p^{-1}(U_q \cap U_{q'}))^*$. On en déduit un d -web (L, φ) défini sur le complémentaire $U \subset X$ de l'ensemble

$$\{x \in X : p^{-1}(x) \subset S\}.$$

Comme cet ensemble est discret, par le théorème d'extension de Levi ([1, chap. I, thm. (8.6)] ou [4, thm. II, pag. 396]) ce web se prolonge à X tout entier et le résultat est démontré dans ce cas.

Dans le cas général, on regarde $\mathbb{P}(\mathbb{T}_X)$ comme recollement des $U_i \times \mathbb{P}_i^1$. Sur chaque $U_i \times \mathbb{P}_i^1$ on sait construire un d -web. Avec des techniques pareilles on montre que ces d -webs "locaux" se recollent pour donner le d -web cherché. \square

Proposition 3.1 *Soit $\mathcal{W} = (L, \varphi)$ un d -web sur X ; notons $S_{\mathcal{W}}$ la surface analytique associée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $S_{\mathcal{W}}$ possède une décomposition en composantes irréductibles

$$S_{\mathcal{W}} = S^1 \cup \dots \cup S^r$$

avec $d_i := \deg \pi|_{S^i}$;

b) \mathcal{W} est un d -web produit de r d_i -webs \mathcal{W}_i ($i = 1, \dots, r$) tels que $d = \sum_i d_i$ et $S^i := S_{\mathcal{W}_i}$ irréductible pour $i = 1, \dots, r$.

Démonstration: Par le lemme 3.1 il suffit de démontrer que b) implique a).

Chaque \mathcal{W}_i définit une surface $S_{\mathcal{W}_i} \subset \mathbb{P}(\mathbb{T}_X)$ et par construction $S_{\mathcal{W}} = \cup S_{\mathcal{W}_i}$. Puisque $im(\varphi_1 \cdots \varphi_r) \not\subset \mathcal{D}is$, la réunion des $S_{\mathcal{W}_i}$ est irrédondante, d'où l'assertion. \square

Les idées développées dans ce paragraphe motivent la définition suivante.

Définition 3.2 *Un d -web est irréductible s'il ne possède pas un facteur de degré plus petit que d .*

4 Intégrales premières méromorphes

Par la suite X est une surface complexe connexe et compacte; en particulier la surface analytique associée S est aussi compacte, car $\pi = p|_S$ est propre.

Soit $\pi : Z \rightarrow X$ un morphisme holomorphe propre et surjectif entre surfaces analytiques connexes et compactes. Si $\theta \in \mathbb{C}(Z)$ on note $\deg \theta$ le degré de θ sur $\mathbb{C}(X)$.

Lemme 4.1 Soient $\pi : Y \rightarrow X$ un morphisme propre surjectif entre surfaces analytiques irréductibles avec X lisse et $\theta \in \mathbb{C}(Y)$ une fonction méromorphe non-constante sur Y ; notons l le degré de θ sur $\mathbb{C}(X)$. Alors, il existe un l -web \mathcal{W}_θ sur X et une application méromorphe $f : Y \dashrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ tels que

a) le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Y & \dashrightarrow & X \times \mathbb{P}^1 \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & X & \end{array}$$

est commutatif, où pr_1 est la projection sur le premier facteur ; en particulier $\deg \pi = l \deg(f : Y \dashrightarrow f(Y))$.

c) si $pr_2 : X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ est la projection canonique, alors il existe un sous-ensemble analytique strict $\Delta \subset X$ tel que la famille des feuilles de \mathcal{W}_θ dans $X - \Delta$ est précisément celle des composantes connexes des éléments de la famille

$$\{pr_1(pr_2^{-1}(z) \cap f(Y)) \cap (X - \Delta) : z \in \mathbb{P}^1\}.$$

Démonstration: Le morphisme π induit l'extension finie de corps

$$\mathbb{C}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}(Y),$$

où l'inclusion est définie par $\nu \mapsto \nu \circ \pi$.

On a une équation de dépendance entière minimale de la forme

$$\theta^l + \nu_1 \theta^{l-1} + \cdots + \nu_l = 0, \quad (5)$$

avec $\nu_i \in \mathbb{C}(X)$ pour tout i .

On définit l'application méromorphe $f : Y \dashrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ par

$$y \mapsto (\pi(y), \theta(y)).$$

Notons $U \subset X$ le complémentaire de la réunion des ensembles des pôles des ν_i . La surface analytique $S = f(Y) \subset X \times \mathbb{P}^1$ est l'adhérence de l'ensemble

$$\{(x, u) \in U \times \mathbb{C} : u^l + \nu_1(x)u^{l-1} + \cdots + \nu_l(x) = 0\} \subset X \times \mathbb{P}^1;$$

notons $\Delta \subset X$ le sous-ensemble analytique sur lequel la restriction à S de la projection canonique $X \times \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ n'est pas un revêtement non-ramifié.

Pour définir \mathcal{W}_θ on observe que pour tout point $x_0 \in X - \Delta$ l'équation

$$u^l + \nu_1(x)u^{l-1} + \cdots + \nu_l(x) = 0$$

définit l -courbes analytiques transverses deux à deux en x_0 et correspondent donc aux feuilles d'un l -web. \square

Remarque 4.1 Si $l = 1$ alors $\theta = \nu \circ \pi$ pour $\nu \in \mathbb{C}(X)$ et S est le graphe de θ : dans ce cas \mathcal{W}_θ est le feuilletage défini par $\nu = \text{cte}$.

Définition 4.1 Soit \mathcal{W} un web sur X . On dit que \mathcal{W} possède une intégrale première méromorphe si pour chaque facteur irréductible \mathcal{W}' de \mathcal{W} il existe un polynôme $P = P_{\mathcal{W}'} \in \mathbb{C}(X)[u]$ tel qu'en-déhors d'un sous-ensemble analytique $\Delta = \Delta_P \subset X$ toute composante connexe de la courbe analytique $\{P = u_0\}$ est une feuille de \mathcal{W}' pour u_0 générique dans \mathbb{C} . Le produit des polynômes $P_{\mathcal{W}'}$ avec \mathcal{W}' un facteur de \mathcal{W} , est appelé une intégrale première méromorphe pour \mathcal{W} .

On observe que dans la situation du lemme 4.1 le polynôme

$$P = u^l + \nu_1 u^{l-1} + \cdots + \nu_l$$

est une intégrale première méromorphe pour \mathcal{W}_θ .

Soit \mathcal{W} un web sur X et $\sigma : Y \rightarrow S_{\mathcal{W}}$ une désingularisation de $S_{\mathcal{W}}$. Comme dans la proposition 2.1 on peut associer à \mathcal{W} un feuilletage \mathcal{F} . On a

Lemme 4.2 Supposons que la restriction de \mathcal{F} à chaque composante connexe de Y possède une intégrale première méromorphe. Alors \mathcal{W} possède une intégrale première méromorphe.

Démonstration: Sans perte de généralité on peut supposer \mathcal{W} irréductible ; donc Y l'est aussi. Soit $\theta \in \mathbb{C}(Y)$ une intégrale première méromorphe pour \mathcal{F} .

Choisissons un ouvert $U \subset X$ tel que sur $\pi^{-1}(U)$ le morphisme π est un revêtement et l'application $f = \pi \times \theta$ (lemme 4.1b) est bien définie. Prenons une feuille C de $\mathcal{W}_\theta|_U$; il existe $z \in \mathbb{P}^1$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \cap f^{-1}(C \times \{z\}) & \xrightarrow{f} & C \times \{z\} \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & C \end{array}$$

commute.

On en déduit que C est une feuille de \mathcal{W} si et seulement si θ est constante sur chaque composante connexe de $\pi^{-1}(C)$ contenue dans $f^{-1}(C \times \{z\})$; l'assertion suit de la proposition 2.1 et le lemme 4.1c. \square

Théorème 4.1 Soit \mathcal{W} un d -web irréductible sur X qui possède un nombre infini de feuilles analytiques. Alors il possède une intégrale première méromorphe.

Démonstration: Soient $\pi = \pi_Y : Y \rightarrow X$, $U \subset X$ et \mathcal{F} comme dans la proposition 2.1. Par le lemme ci-dessus, il suffit de montrer que la restriction de \mathcal{F} à Y possède une intégrale première méromorphe.

Observons qu'une feuille de $\mathcal{W}|_U$ définit, par continuation analytique par rapport au revêtement $\pi|_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$, une feuille analytique de \mathcal{F} : en effet, si $C \subset X$ est une feuille de \mathcal{W} qui touche U , l'une des composantes de $\pi^{-1}(C)$ définit une feuille de \mathcal{F} . Donc \mathcal{F} possède un nombre infini de feuilles analytiques. Par un théorème de Jouanolou ([6], [2, chap. 6, thm. 1]) \mathcal{F} possède alors une intégrale première méromorphe, ce qui complète la preuve. \square

Corollaire 4.1 *Soit \mathcal{W} un d -web sur \mathbb{P}^2 dont toutes les feuilles sont algébriques. Alors \mathcal{W} est (polynomial et) donné par une famille de courbes paramétrée par $[t, u] \in \mathbb{P}^1$:*

$$a_0(x, y)u^d + a_1(x, y)tu^{d-1} + \cdots + a_d(x, y)t^d = 0.$$

Démonstration: Sans perte de généralité on peut supposer que \mathcal{W} est irréductible.

En tenant compte du lemme 4.1 il suit (de la proposition 2.2 et) du théorème 4.1 que \mathcal{W} possède une intégrale première méromorphe de la forme

$$P(x, y, u) = \sum_{k=0}^l a_k(x, y)u^{l-k},$$

avec $a_k \in \mathbb{C}[x, y]$ pour $k = 0, \dots, l$ où l divise d ; puisque la famille de courbes algébriques

$$P(x, y, u_0) = 0, \quad u_0 \in \mathbb{C}$$

définit un l -web, on en déduit $l = d$: en effet, le l -web défini par l'intégrale première ci-dessus factorise \mathcal{W} et l'assertion suit de l'irréductibilité de celui-ci. \square

Références

- [1] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer Verlag, 1984.
- [2] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliation*, First latin American Congress of Mathematicians, Impa, 2000.
- [3] D. Cerveau, *Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés*, Astérisque N. 222, p. 49-92, 1994.
- [4] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.
- [5] R.C Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, vol II* Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.

-
- [6] J.P. Jouanolou, *Hypersurfaces solution d'une équation de Pfaff analytique*, Math. Annal. 232 (1978) 239-245.
- [7] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, 1926.
- [8] I. Pan, M. Sebastiani, *Les équations différentielles algébriques et les singularités mobiles*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2001.

IVAN PAN
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UFRGS
AV. BENTO GONÇALVES 9500
91540-000 PORTO ALEGRE, RS, BRASIL
pan@mat.ufrgs.br

On the Directional Differentiability Properties of the max-min Function

Erdal Ekici

Abstract

In this paper, the directional lower and upper derivatives of the max-min function are investigated by using the directional lower and upper derivative sets of the max-min set valued map. Sufficient conditions ensuring the existence of the directional derivative of the max-min function are obtained.

Keywords: multivalued mapping, optimal control.

1 Introduction

It is well known that the max-min functions come into play in the control theory problems, the differential game theory problems and the parametric optimization problems (see, for example Danskin, 1966;1967). On the other hand the max-min functions are not usually differentiable. But in some problems it is necessary that the directional derivative or the directional lower and upper derivatives of the max-min functions should be calculated.

In this paper, by using the concepts of the directional upper and lower derivative sets of the max-min set valued map, the directional upper and lower derivatives of the max-min functions are given and sufficient conditions ensuring the existence of the directional derivative of the max-min function are obtained.

2 Derivative sets of the set valued map

Here and after, $cl(R^m)$ ($comp(R^m)$) denotes the set of all nonempty closed (compact) subsets in R^m . Let $a(\cdot) : R^n \rightarrow cl(R^m)$ be an upper semi-continuous set valued map. Let us consider the following sets. For $(x, y) \in R^n \times R^m$ and vector $f \in R^n$, we set

$$Da(x, y) | (f) = \{d \in \mathbb{R}^m : \liminf_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} dist(y + \delta d, a(x + \delta f)) = 0\},$$

$$D^*a(x, y) | (f) = \{v \in \mathbb{R}^m : \limsup_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} dist(y + \delta d, a(x + \delta f)) = 0\}.$$

Here for $x \in R^n$, $D \subset R^n$, $dist(x, D) = \inf_{d \in D} \|x - d\|$. $Da(x, y) | (f)$ ($D^*a(x, y) | (f)$) is called the upper (lower) derivative set of the set valued map $a(\cdot)$ at (x, y) in the direction f . Note that the directional upper (lower) derivative set of the set valued map $a(\cdot)$ is closed and there is a connection between the upper (lower) derivative set of the set valued map and the upper (lower) contingent cone which is used to investigate various problems in nonsmooth analysis (see, for example Aubin and Frankowska, 1990; Guseinov, et al., 1985; Clarke, et al., 1995). It is obvious that $D^*a(x, y) | (f) \subset Da(x, y) | (f)$.

$$A = gra(\cdot) = \{(x, y) \in R^n \times R^m : y \in a(x)\}$$

denotes the graph of the set valued map $a(\cdot)$. Since $a(\cdot)$ is upper semicontinuous, A is a closed set. It is possible to show that $Da(x, y) | (f) = D^*a(x, y) | (f) = \emptyset$ if $(x, y) \notin A$, $Da(x, y) | (f) = D^*a(x, y) | (f) = R^m$ if $(x, y) \in intA$ where $intA$ denotes the interior of A .

Suppose that the set valued map $a(\cdot)$ is given as

$$a(x) = \{y \in R^m : b(x, y) \leq 0\} \quad (2.1)$$

where $b(\cdot, \cdot) : R^n \times R^m \rightarrow R$ is a continuous function in $R^n \times R^m$ and locally Lipschitz in R^m . The lower and upper derivative of $b(\cdot, \cdot)$ at the point (x, y) in the direction (f, d) is denoted by $\frac{\partial^- b(x, y)}{\partial(f, d)}$ and $\frac{\partial^+ b(x, y)}{\partial(f, d)}$ respectively and defined by

$$\begin{aligned} \frac{\partial^- b(x, y)}{\partial(f, d)} &= \liminf_{\delta \rightarrow +0} [b(x + \delta f, y + \delta d) - b(x, y)] \delta^{-1}, \\ \frac{\partial^+ b(x, y)}{\partial(f, d)} &= \limsup_{\delta \rightarrow +0} [b(x + \delta f, y + \delta d) - b(x, y)] \delta^{-1} \end{aligned}$$

respectively. If

$$\frac{\partial b(x, y)}{\partial(f, d)} = \lim_{\delta \rightarrow +0} [b(x + \delta f, y + \delta d) - b(x, y)] \delta^{-1}$$

exists and is finite, then $b(\cdot, \cdot)$ is called differentiable at the point (x, y) in the direction (f, d) and $\frac{\partial b(x, y)}{\partial(f, d)}$ denotes the derivative of $b(\cdot, \cdot)$ at the point (x, y) in the direction (f, d) .

We introduce the sets

$$\begin{aligned} H^-(x, y) | (f) &= \{d \in R^m : \frac{\partial^- b(x, y)}{\partial(f, d)} < 0\}, \\ H(x, y) | (f) &= \{d \in R^m : \frac{\partial^- b(x, y)}{\partial(f, d)} \leq 0\}, \\ E^-(x, y) | (f) &= \{d \in R^m : \frac{\partial^+ b(x, y)}{\partial(f, d)} < 0\}, \\ E(x, y) | (f) &= \{d \in R^m : \frac{\partial^+ b(x, y)}{\partial(f, d)} \leq 0\} \end{aligned}$$

(Guseinov, Kucuk and Ekici, 2001).

Proposition 1 *Let the set valued map $a(\cdot)$ be in the form (2.1). Then for all $(x, y) \in \partial A$ and $f \in R^n$,*

$$\begin{aligned} clH^-(x, y) | (f) &\subset Da(x, y) | (f) \subset H(x, y) | (f), \\ clE^-(x, y) | (f) &\subset D^*a(x, y) | (f) \subset E(x, y) | (f) \end{aligned}$$

where ∂A denotes the boundary of A , clA denotes the closure of A .

By using the previous proposition, we obtain the following corollary.

Corollary 2 *Let $(x, y) \in \partial A$, $b(\cdot, \cdot)$ be differentiable at (x, y) and $\frac{\partial b(x, y)}{\partial y} \neq 0$. Then it is possible to show that*

$$\begin{aligned} Da(x, y) | (f) &= D^*a(x, y) | (f) \\ &= \{d \in R^m : \left\langle \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}, f \right\rangle + \left\langle \frac{\partial b(x, y)}{\partial y}, d \right\rangle \leq 0\} \end{aligned}$$

where the symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the inner product.

Remark 3 *Now suppose that the set valued map $a(\cdot)$ is given as*

$$a(x) = \{y \in R^m : \min_{i \in I} \max_{j \in J} b_{ij}(x, y) \leq 0\} \quad (2.2)$$

where I and J are finite sets and $b_{ij}(\cdot, \cdot)$ is a continuous differentiable functions for all $i \in I$ and for all $j \in J$. Then (see Demyanov and Vasilyev, 1981) $b(x, y) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} b_{ij}(x, y)$ is a directional derivable function and

$$\frac{\partial b(x, y)}{\partial(f, d)} = \min_{i \in I_*(x, y)} \max_{j \in J_*(x, y)} \left[\left\langle \frac{\partial b_{ij}(x, y)}{\partial x}, f \right\rangle + \left\langle \frac{\partial b_{ij}(x, y)}{\partial y}, d \right\rangle \right]$$

where

$$\begin{aligned} J_*(x, y) &= \{j_* \in J : b_{ij_*}(x, y) = \max_{j \in J} b_{ij}(x, y)\}, \\ I_*(x, y) &= \{i_* \in I : \min_{i \in I} \max_{j \in J} b_{ij}(x, y) = \max_{j \in J} b_{i_*j}(x, y)\}. \end{aligned}$$

In that case, it follows from here that

$$\begin{aligned} &E^-(x, y) \mid (f) \\ &= H^-(x, y) \mid (f) \\ &= \{d \in R^m : \min_{i \in I_*(x, y)} \max_{j \in J_*(x, y)} [\langle \frac{\partial b_{ij}(x, y)}{\partial x}, f \rangle + \langle \frac{\partial b_{ij}(x, y)}{\partial y}, d \rangle] < 0\}, \\ &E(x, y) \mid (f) \\ &= H(x, y) \mid (f) \\ &= \{d \in R^m : \min_{i \in I_*(x, y)} \max_{j \in J_*(x, y)} [\langle \frac{\partial b_{ij}(x, y)}{\partial x}, f \rangle + \langle \frac{\partial b_{ij}(x, y)}{\partial y}, d \rangle] \leq 0\}. \end{aligned}$$

Theorem 4 Let the set valued map $a(\cdot)$ be in the form (2.2), $(x, y) \in \partial A$, $f \in R^n$ and $H^-(x, y) \mid (f) \neq \emptyset$. Then

$$Da(x, y) \mid (f) = D^*a(x, y) \mid (f) = H(x, y) \mid (f).$$

Proof : It is obtained by using the previous proposition, the previous corollary and the previous remark. ■

Remark 5 Above theorem is not true when $H^-(x, y) \mid (f) = \emptyset$ for $(x, y) \in \partial A$ and for $f \in R^n$.

Example 6 We take the set valued map $a(\cdot) : [0, 1] \rightarrow cl(\mathbb{R}^2)$, $x \rightarrow a(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 0\}$. We know that $a(x) = \{(0, 0)\}$ for all $x \in [0, 1]$ and $b(\cdot, \cdot, \cdot) : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y_1, y_2) \rightarrow b(x, y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ is a differentiable function. Then we obtain $H(x, 0, 0) \mid (1) = \mathbb{R}^2$, $H^-(x, 0, 0) \mid (1) = \emptyset$ and $Da(x, 0, 0) \mid (1) = \{(0, 0)\}$ for $(x, 0, 0) \in \partial A$.

3 Directional differentiability of the max-min function

Let $a(\cdot) : R^n \rightarrow comp(R^m)$, $b(\cdot) : R^n \rightarrow comp(R^k)$ be set valued maps and $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot) : R^n \times R^m \times R^k \rightarrow R$ be a continuous function on $R^n \times R^m \times R^k$. The max-min function is denoted by $m(\cdot)$ and is defined by

$$m(x) = \max_{y \in a(x)} \min_{z \in b(x)} \sigma(x, y, z).$$

Here and after we will assume that $a(\cdot) : R^n \rightarrow comp(R^m)$, $b(\cdot) : R^n \rightarrow comp(R^k)$ are continuous set valued maps and $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot) : R^n \times R^m \times R^k \rightarrow R$ is

a continuous function on $R^n \times R^m \times R^k$ and locally Lipschitz on $R^m \times R^k$, i. e. for every bounded $D \subset R^n \times R^m \times R^k$, there exists $L(D) > 0$ such that

$$|\sigma(x, y_1, z_1) - \sigma(x, y_2, z_2)| \leq L(D) \cdot \|(y_1 - y_2, z_1 - z_2)\|$$

for any $(x, y_1, z_1), (x, y_2, z_2) \in D$. Under these conditions $m(\cdot)$ is a continuous function (see, for example Aubin and Frankowska, 1990). Let

$$Y_*(x) = \{(y_*, z_*) \in a(x) \times b(x) : m(x) = \max_{y \in a(x)} \min_{z \in b(x)} \sigma(x, y, z) = \sigma(x, y_*, z_*)\}.$$

$x \rightarrow Y_*(x)$ is an upper semicontinuous set valued map and it is called max-min set valued map. Now we give a characterization of the upper and lower directional derivatives of $m(\cdot)$.

Proposition 7 For all $x \in R^n$ and $f \in R^n$

$$\frac{\partial^- m(x)}{\partial f} \leq \inf_{(y,z) \in Y_*(x)} \inf_{(d,n) \in DY_*(x,y,z)|(f)} \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^+ m(x)}{\partial f} \leq \inf_{(y,z) \in Y_*(x)} \inf_{(d,n) \in D^* Y_*(x,y,z)|(f)} \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)}. \quad (3.2)$$

Proof : Let $(y, z) \in Y_*(x)$. Let $DY_*(x, y, z) | (f) = \emptyset$. Then

$$\inf_{(d,n) \in DY_*(x,y,z)|(f)} \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)} = +\infty$$

and the inequality (3.1) holds. Now let $(y, z) \in Y_*(x)$, $DY_*(x, y, z) | (f) \neq \emptyset$. Choose arbitrary $(d, n) \in DY_*(x, y, z) | (f)$. Then from the definition of $DY_*(x, y, z) | (f)$, there exists a sequence $(y_k, z_k) \in Y_*(x + \delta_k f)$, where $\delta_k \rightarrow +0$ as $k \rightarrow \infty$, such that

$$(y_k, z_k) = (y, z) + \delta_k(d, n) + (o_1(\delta_k), o_2(\delta_k))$$

where $\|(o_1(\delta_k), o_2(\delta_k))\| / \delta_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Since $(y, z) \in Y_*(x)$, it follows that $m(x) = \sigma(x, y, z)$ and $(y_k, z_k) \in Y_*(x + \delta_k f)$ ($k = 1, 2, \dots$) then it follows that $m(x + \delta_k f) = \sigma(x + \delta_k f, y_k, z_k)$. Consequently

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^- m(x)}{\partial f} \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow +0} [m(x + \delta f) - m(x)] \delta^{-1} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} [\sigma(x + \delta_k f, y_k, z_k) - \sigma(x, y, z)] \delta_k^{-1} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} [\sigma(x + \delta_k f, y + \delta_k d + o_1(\delta_k), z + \delta_k n + o_2(\delta_k)) - \sigma(x, y, z)] \delta_k^{-1} \\ &\leq \liminf_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta_k f, y + \delta_k d, z + \delta_k n) - \sigma(x, y, z)] \delta_k^{-1} \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y + \delta d, z + \delta n) - \sigma(x, y, z)] \delta^{-1} \\ &= \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)}. \end{aligned}$$

So we have $\frac{\partial^- m(x)}{\partial f} \leq \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)}$ for any $(d, n) \in DY_*(x, y, z) \mid (f)$ and consequently we obtain the inequality (3.1).

Let us prove (3.2). Let $(y, z) \in Y_*(x)$. Let $D^*Y_*(x, y, z) \mid (f) = \emptyset$. Then

$$\inf_{(d, n) \in D^*Y_*(x, y, z) \mid (f)} \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)} = +\infty$$

and the inequality (3.2) holds.

Now let $(y, z) \in Y_*(x)$, $D^*Y_*(x, y, z) \mid (f) \neq \emptyset$. Choose arbitrary $(d, n) \in D^*Y_*(x, y, z) \mid (f)$. From the definition of $D^*Y_*(x, y, z) \mid (f)$, there exists a $\delta_* > 0$ such that for all $\delta \in [0, \delta_*]$

$$(y(\delta), z(\delta)) = (y, z) + \delta(d, n) + (o_1(\delta), o_2(\delta)) \in Y_*(x + \delta f)$$

where $\|(o_1(\delta), o_2(\delta))\|/\delta \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow +0$. Since $(y, z) \in Y_*(x)$ then it follows that $m(x) = \sigma(x, y, z)$ and $(y(\delta), z(\delta)) \in Y_*(x + \delta f)$ then it follows that $m(x + \delta f) = \sigma(x + \delta f, y(\delta), z(\delta))$ for any $\delta \in [0, \delta_*]$. Then

$$\begin{aligned} \frac{\partial^+ m(x)}{\partial f} &= \limsup_{\delta \rightarrow +0} [m(x + \delta f) - m(x)] \delta^{-1} \\ &= \limsup_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y(\delta), z(\delta)) - \sigma(x, y, z)] \delta^{-1} \\ &= \limsup_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y + \delta d + o_1(\delta), z + \delta n + o_2(\delta)) - \sigma(x, y, z)] \delta^{-1} \\ &\leq \limsup_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y + \delta d, z + \delta n) - \sigma(x, y, z)] \delta^{-1} = \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)}. \end{aligned}$$

Hence $\frac{\partial^+ m(x)}{\partial f} \leq \frac{\partial^+ \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)}$ for any $(d, n) \in D^*Y_*(x, y, z) \mid (f)$, we obtain the inequality (3.2). ■

Proposition 8 *Let $x \in R^n$, $f \in R^n$ and there exists $(y_*, z_*) \in Y_*(x)$ such that $DY_*(x, y_*, z_*) \mid (f) \neq \emptyset$. Then*

$$\frac{\partial^+ m(x)}{\partial f} \geq \inf_{(y, z) \in Y_*(x)} \inf_{(d, n) \in DY_*(x, y, z) \mid (f)} \frac{\partial^- \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)} \quad (3.3)$$

Moreover if there exists $(y^*, z^*) \in Y_*(x)$ such that $D^*Y_*(x, y^*, z^*) \mid (f) \neq \emptyset$ then

$$\frac{\partial^- m(x)}{\partial f} \geq \inf_{(y, z) \in Y_*(x)} \inf_{(d, n) \in D^*Y_*(x, y, z) \mid (f)} \frac{\partial^- \sigma(x, y, z)}{\partial(f, d, n)} \quad (3.4)$$

Proof : Take any $(d, n) \in DY_*(x, y_*, z_*) \mid (f)$. From the definition of $DY_*(x, y_*, z_*) \mid (f)$, there exists a sequence $(y_k, z_k) \in Y_*(x + \delta_k f)$, where $\delta_k \rightarrow +0$ as $k \rightarrow \infty$, such that

$$(y_k, z_k) = (y_*, z_*) + \delta_k(d, n) + (o_1(\delta_k), o_2(\delta_k))$$

where $\|(o_1(\delta_k), o_2(\delta_k))\|/\delta_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Since $(y_*, z_*) \in Y_*(x)$, it follows that $m(x) = \sigma(x, y_*, z_*)$ and $(y_k, z_k) \in Y_*(x + \delta_k f)$ ($k = 1, 2, \dots$) then it follows that $m(x + \delta_k f) = \sigma(x + \delta_k f, y_k, z_k)$. Consequently

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^+ m(x)}{\partial f} \\ &= \limsup_{\delta \rightarrow +0} [m(x + \delta f) - m(x)] \delta^{-1} \\ &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} [\sigma(x + \delta_k f, y_k, z_k) - \sigma(x, y_*, z_*)] \delta_k^{-1} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} [\sigma(x + \delta_k f, y_* + \delta_k d + o_1(\delta_k), z_* + \delta_k n + o_2(\delta_k)) - \sigma(x, y_*, z_*)] \delta_k^{-1} \\ &\geq \liminf_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y_* + \delta d, z_* + \delta n) - \sigma(x, y_*, z_*)] \delta^{-1} \\ &= \frac{\partial^- \sigma(x, y_*, z_*)}{\partial(f, d, n)}. \end{aligned}$$

So we have $\frac{\partial^+ m(x)}{\partial f} \geq \frac{\partial^- \sigma(x, y_*, z_*)}{\partial(f, d, n)}$ for any $(d, n) \in DY_*(x, y_*, z_*) \mid (f)$ and consequently we obtain the inequality (3.3).

Let us prove (3.4). Take any $(d, n) \in D^*Y_*(x, y^*, z^*) \mid (f)$. From the definition of $D^*Y_*(x, y^*, z^*) \mid (f)$, there exists a $\delta_* > 0$ such that for all $\delta \in [0, \delta_*]$

$$(y(\delta), z(\delta)) = (y^*, z^*) + \delta(d, n) + (o_1(\delta), o_2(\delta)) \in Y_*(x + \delta f)$$

where $\|(o_1(\delta), o_2(\delta))\|/\delta \rightarrow 0$ as $\delta \rightarrow +0$. Since $(y^*, z^*) \in Y_*(x)$ then it follows that $m(x) = \sigma(x, y^*, z^*)$ and $(y(\delta), z(\delta)) \in Y_*(x + \delta f)$ then it follows that $m(x + \delta f) = \sigma(x + \delta f, y(\delta), z(\delta))$ for any $\delta \in [0, \delta_*]$. Then

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^- m(x)}{\partial f} \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow +0} [m(x + \delta f) - m(x)] \delta^{-1} \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y(\delta), z(\delta)) - \sigma(x, y^*, z^*)] \delta^{-1} \\ &= \liminf_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y^* + \delta d + o_1(\delta), z^* + \delta n + o_2(\delta)) - \sigma(x, y^*, z^*)] \delta^{-1} \\ &\geq \liminf_{\delta \rightarrow +0} [\sigma(x + \delta f, y^* + \delta d, z^* + \delta n) - \sigma(x, y^*, z^*)] \delta^{-1} \\ &= \frac{\partial^- \sigma(x, y^*, z^*)}{\partial(f, d, n)}. \end{aligned}$$

Hence $\frac{\partial^- m(x)}{\partial f} \geq \frac{\partial^- \sigma(x, y^*, z^*)}{\partial(f, d, n)}$ for any $(d, n) \in D^*Y_*(x, y^*, z^*) \mid (f)$, we obtain the inequality (3.4). ■

From Proposition 2 and Proposition 3 we have the following statement.

Theorem 9 *Suppose that $x \in R^n$, $f \in R^n$ and there exists $(y_*, z_*) \in Y_*(x)$ such that $D^*Y_*(x, y_*, z_*) \mid (f) \neq \emptyset$. Let $\sigma(\cdot, \cdot, \cdot) : R^n \times R^m \times R^k \rightarrow R$ is a*

differentiable function at (x, y, z) in the direction (f, d, n) for any $(y, z) \in Y_*(x)$, $d \in R^m$ and $n \in R^k$. Then $m(\cdot) : R^n \rightarrow R$ is differentiable at x in the direction f and

$$\frac{\partial m(x)}{\partial f} = \inf_{(y,z) \in Y_*(x)} \inf_{(d,n) \in DY_*(x,y,z)|(f)} \frac{\partial \sigma(x, y, z)}{\partial (f, d, n)}$$

4 Conclusions

By using the concepts of the directional lower and upper derivative sets of the max-min set valued map, the directional lower and upper derivatives of the max-min function are investigated. The results of this paper can be employed to calculate the directional lower and upper derivatives of the max-min functions in the control theory problems, the differential game problems and the parametric optimization problems. Sufficient conditions ensuring the existence of the directional derivative of the max-min function are obtained.

5 References

1. Aubin, J. P. and H. Frankowska (1990). Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston.
2. Clarke, F. H., Yu. S. Ledyayev, R. J. Stern and P. Wolenski (1995). Qualitative Properties of Trajectories of Control Systems : a Survey. J. of Dynamical and Control Systems, 1, 1-48.
3. Danskin, J. M. (1966). The Theory of max-min with applications. SIAM Journal, vol. 14, pp. 641-664.
4. Danskin, J. M. (1967). The Theory of Max-Min. Springer-Verlag, New York.
5. Demyanov, V. F. and L. V. Vasilyev (1981). Non-differentiable optimization. Nauka, Moscow.
6. Guseinov, Kh. G., A. I. Subbotin and V. N. Ushakov (1985). Derivatives for multivalued mappings with applications to game theoretical problems of control. Problems of Control and Information Theory, 14. 155-167.
7. Guseinov, Kh. G., Y. Kucuk and E. Ekici (2001). On the directional differentiability properties of the marginal function. Nonlinear Control Systems NOLCOS'01, 5th IFAC Symposium, Saint Petersburg, Russia, July 4-6. Preprints vol. 2 of 5, 355-359.

ERDAL EKICI
 DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
 CUMHURİYET UNIVERSITY
 SIVAS 58140, TURKEY
 eekici@cumhuriyet.edu.tr

Los Números de (Euler)-Catalan.

Mercedes H. Rosas

A Rafael Sánchez Lamonedá

Fue el gran Leonhard Euler (1707–1783) la primera persona en calcular los números de Catalan. Esto nos lo relata su contemporáneo Johann Segner (1704–1777) en su artículo: *Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula*, *Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae*, 7 (1758–59) 203–209.

Segner nos cuenta que los primeros valores para los números de Catalan le fueron comunicados por Euler, quien, sin embargo, le escondió la técnica que utilizó para calcularlos. *“quos numeros mecum benevolus communicavit summus Eulerus; modo, quo eos reperit, atque progressionis ordine, celatis.”*

En el trabajo mencionado Segner obtiene la recurrencia de Catalan, tal como la presentamos en la primera sección de este artículo. En un artículo posterior, y del mismo título, Segner conjeturó correctamente la fórmula cerrada para los números de Catalan, más no logró demostrarla.

Euler responde a los artículos de Segner sacando sus garras. En su “*Summary, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7, (1758/59), 13–15.” Reimpreso en su “*Opera Omnia* (1) 26 (1953), xvi–xviii,” Euler calcula la función generatriz de Catalan, y de ella deriva la fórmula cerrada de Catalan utilizando las ideas descritas en la sección 3 de este trabajo. La genialidad de Euler para atacar este problema, así como sus famosos trabajos en la teoría de particiones, inician el estudio de las funciones generatrices y con él una larga y fructífera unión entre el análisis y la combinatoria, [1].

Alrededor de un siglo después Eugene Catalan (1814–1894), volverá a calcular el número de maneras de triangular un polígono. En su memoria, los números de Catalan llevan hoy en día su nombre.

En su página en la internet <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec>, Richard Stanley nos reta con 95 familias de objetos enumerados por los números de Catalan. Las primeras 66 familias constituyen el famoso problema 6.19 de su libro EC2 [5]. Las restantes 29 (en la versión del 14 de Abril del 2003) conforman el “Catalan Addendum” que es actualizado frecuentemente.

Mi objetivo es recorrer junto al lector uno de los capítulos más simpáticos de la Combinatoria Enumerativa y luego remitirlo a la página de Richard Stanley,

para que se divierta con las muy diferentes interpretaciones de los números de Catalan que allí se encuentran, y quizás descubra la verdadera razón por la cuál los números de Catalan aparecen con tanta frecuencia, y en situaciones tan diversas, en las matemáticas.

1 La recurrencia de Catalan

Una triangulación de un polígono es una manera de descomponerlo como una unión disjunta de triángulos, cuyos vértices coinciden con los del polígono. Es fácil ver que para triangular un polígono con $n + 2$ vértices se necesitan exactamente n triángulos (y viceversa).

Por ejemplo, en la Figura 1 ilustramos las cinco triangulaciones de un pentágono, cada una de ellas construida utilizando exactamente tres triángulos.

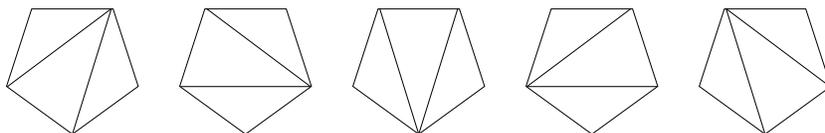


Figura 1: Las cinco triangulaciones de un pentágono.

Un sencillo cálculo convencerá al lector que podemos triangular un triángulo de una única manera, un cuadrado de dos, un pentágono de cinco, y un hexágono de catorce maneras diferentes. El problema se complica cada vez que aumentamos el número de lados del polígono. En esta sección presentaremos una recurrencia que nos permite calcular estos valores fácilmente.

Sea C_n el número de maneras de descomponer un polígono utilizando exactamente n triángulos. Procedemos por inducción en n para calcular C_n . Supongamos que sabemos triangular todos los polígonos con un máximo de $n + 2$ lados, y con esta información triangulemos un polígono con $n + 3$ lados. (El problema es trivial si tenemos un sólo triángulo.)

Procedemos de la siguiente manera. Primero escogemos a nuestro lado favorito del polígono de vértices $1, 2, \dots, n + 3$. En lo que sigue, el lado favorito del lector siempre será el que une a los vértices 1 y $n + 3$. Este lado pertenece a un único triángulo en nuestra triangulación, T_i , cuyo tercer vértice i pertenece al conjunto $\{2, 3, \dots, n + 2\}$. Ver Figura 2.

Eliminando al triángulo T_i de nuestro polígono, obtenemos dos nuevos polígonos que se encuentran triangulados. El primero de ellos tiene como vértices a los números $1, 2, \dots, i$, y en consecuencia, puede ser triangulado de C_{i-2} maneras diferentes. El segundo polígono tiene como vértices a los números $i, i+1, \dots, n+3$, y en consecuencia puede ser triangulado de C_{n-i+2} maneras distintas. Ambas

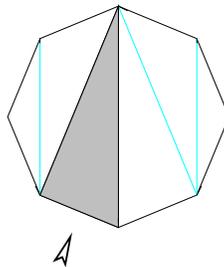


Figura 2: La disección de un polígono con un lado favorito, y cuyo tercer vértice es i .

elecciones son independientes. Así que el número de maneras de triangular al polígono (que contienen al triángulo T_i) es $C_{i-2}C_{n-i+2}$.

Al variar al tercer vértice del triángulo T_i sobre todos los valores posibles, $2, 3, \dots, n + 2$, obtenemos la recurrencia de Catalan;

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots + C_{n-1}C_1 + C_nC_0,$$

(Note que estamos suponiendo que $C_0 = 1$.)

La recurrencia de Catalan nos permite calcular rápidamente los primeros valores de la sucesión de Catalan:

1,	1,	2,	5,	14,	42,
132,	429,	1430,	4862,	16796,	58786,
208012,	742900,	2674440,	9694845,	35357670,	...

Para convencer al lector del poder de las recurrencias le dejaré un par de tareas. La estructura recursiva que acabamos de hallar nos permite generar todas las triangulaciones de un polígono. La primera tarea consiste en escribir un programa de computación que genere todas las triangulaciones de un polígono de manera recursiva.

La recurrencia de Catalan también nos permite demostrar que otros conjuntos se pueden contar con los números de Catalan. Una segunda tarea para el lector consiste en demostrar que las siguientes familias obedecen a la recurrencia de Catalan: Maneras (legales) de colocar parejas de paréntesis, caminos de Dyck, y escrutinios electorales, donde el candidato ganador siempre va a la cabeza (o empatado) y termina con exactamente un voto más que el perdedor.

Las cinco maneras de colocar 3 parejas de paréntesis son $((()))$, $()(())$, $(())()$, $(())()$ y $()()()$.

Un camino de Dyck es el resultado de una caminata con pasos de longitud constante y en las direcciones noreste y sureste, y de manera tal que nunca nos

encontramos en un punto con altura menor a la altura que teníamos al inicio del recorrido.

Los cinco caminos de Dyck de longitud $2 \cdot 3$ están ilustrados en la Figura 3.

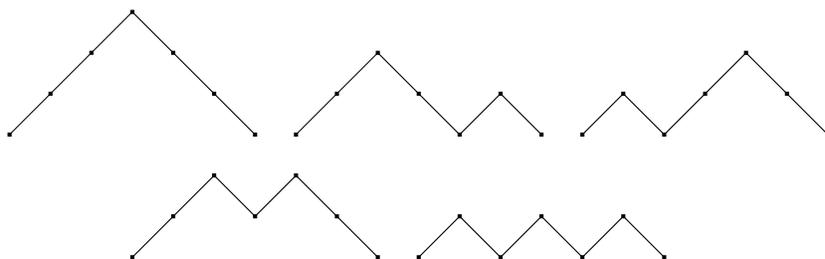


Figura 3: Los cinco caminos de Dyck de longitud $2 \cdot 3$.

Finalmente, los cinco resultados electorales donde el candidato ganador, en todo momento se encuentra a la cabeza o empatado con el candidato perdedor (y donde el candidato ganador recibe un voto más que el perdedor) son: *aaabb*, *aabab*, *aabba*, *abaab* y *ababa*.

A pesar de no ser particularmente elegante, es común deducir a la fórmula cerrada de Catalan utilizando la recurrencia que acabamos de encontrar. El lector interesado puede consultar para esto al segundo apéndice de este trabajo.

2 La fórmula cerrada de los números de Catalan.

Una manera particularmente elegante para derivar a la fórmula cerrada para los números de Catalan fue encontrada por Alfred Rényi.

Los números de Catalan enumeran a la familia de los árboles binarios. Esta afirmación le queda de tarea al lector, quien podrá ver fácilmente que la familia de los árboles binarios satisface a la recurrencia de Catalan.

Imaginemos que nuestros árboles son como los árboles genealógicos, donde cada padre tiene exactamente 2 hijos, uno derecho y el otro izquierdo. (Los árboles vienen dibujados en el plano, así que podemos hablar de izquierda, derecha, arriba y abajo)

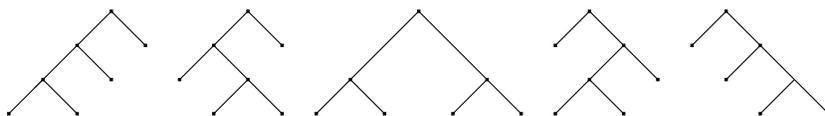


Figura 4: Los cinco árboles binarios con 3 padres.

Sea $B(n)$ el número de árboles binarios con n padres. Nuestra tarea consiste en demostrar que los árboles binarios satisfacen la recurrencia:

$$(n + 1)B(n) = 2(2n - 1)B(n - 1) \quad (n > 1)$$

El lector deberá demostrar que un árbol binario con n niños (un niño es un vértice sin descendientes) tiene exactamente $n - 1$ padres, y en consecuencia $2n - 1$ vértices.

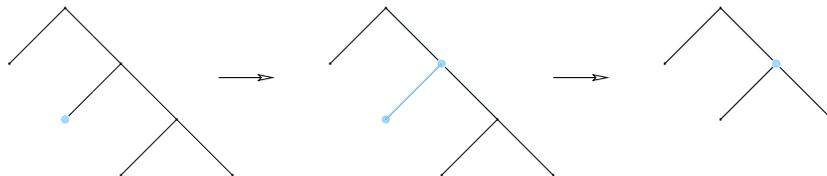


Figura 5: La biyección de Alfred Renyi.

Para demostrar la recurrencia procedemos como sigue. Construimos un árbol con n padres (de $B(n)$ maneras) y seleccionamos en él al hijo menos favorito. Los eliminamos a él y a su padre y promovemos al hermano al lugar del padre.

Obtenemos así un árbol con n vértices, donde uno de ellos, el que corresponde al hermano recién promovido, está marcado.

Para que este procedimiento sea una biyección, necesitamos recordar si el hijo menos favorito era el derecho o era el izquierdo. Tenemos dos posibilidades, y aparece entonces un factor de dos en el lado derecho de nuestra ecuación.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} B(n) &= \frac{2(2n - 1)}{n + 1} B(n - 1) = \frac{2(2n - 1)}{n + 1} \frac{2(2n - 3)}{n} B(n - 2) \\ &= \frac{2(2n - 1)}{n + 1} \frac{2(2n - 3)}{n} \dots \frac{2(2n - 2k + 1)}{n - k + 1} \dots 3 \cdot 1 \\ &= \frac{2n(2n - 1)2(n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n + 1)! n!} \\ &= \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

El lector demostró que $B(n) = C_n$. De manera que los números de Catalan vienen dados por la fórmula cerrada:

$$C_n = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}$$

3 Funciones Generatrices no conmutativas

En esta sección describimos una manera elegante de hallar a la función generatriz de Catalan. Es interesante mencionar que este fue el enfoque originalmente utilizado por Euler. La sección esta basada en el excelente libro de Flajolet y Sedgewick [2].

3.1 Triangulaciones.

Sea \mathcal{T} el conjunto formado por los poligonos triangulados.

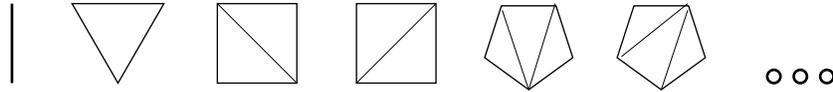


Figura 6: Los elementos de \mathcal{T} .

En la primera sección observamos que cualquier polígono triangulado podía ser descompuesto, univocamente y de manera canónica, como una sucesión consistente en un polígono triangulado, un triángulo (el que corresponde a nuestro lado favorito), y luego otro polígono triangulado.

Obtenemos entonces a la siguiente ecuación:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} \Delta \mathcal{T}$$

Al escribir a una sucesión k conjuntos de manera consecutiva estamos definiendo un nuevo conjunto cuyos elementos se obtienen juxtaponiendo los elementos de estos conjuntos. Por ejemplo,

$$\{a, b\}\{a, c\}\{d\} = \{(a, a, d), (a, c, d), (b, a, d), (b, c, d)\}$$

Si definimos de manera canónica al lado favorito de un polígono triangulado, entonces cualquier triangulación puede ser descompuesta de manera única, tal y como se indica en La Figura 7.

Definimos el peso de un polígono triangulado como el resultado de elevar a la indeterminada z al número de triángulos que se encuentran en ella. Por ejemplo, los pesos de los poligonos triangulados que aparecen en la figura 7 son z^7 , z^3 , z y z^3 , respectivamente. Más aún, la igualdad descrita en la figura se traduce en $z^7 = z^3 \cdot z \cdot z^3$.

Sea T la función generatriz que se obtiene al sumar los pesos de todos los elementos de \mathcal{T} . La descomposición que hemos descrito se traduce en la ecuación cuadrática de Catalan:

$$T(z) = 1 + T(z) \cdot z \cdot T(z)$$

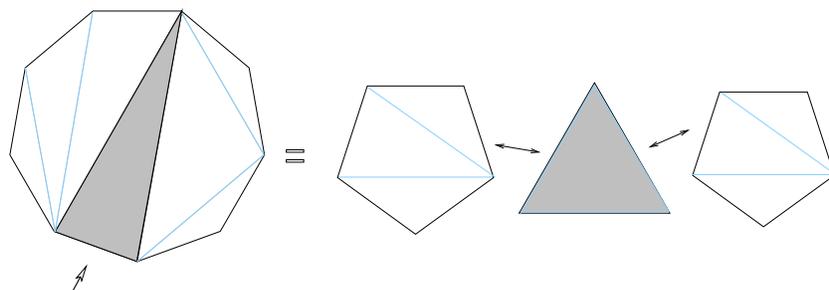


Figura 7: Descomposicion de una triangulación.

En particular, el coeficiente de z^n en el desarrollo en serie de $T(z)$ es el n -ésimo número de Catalan, C_n . (Ver sección 1).

Utilizando la fórmula del discriminante, obtenemos dos posibles soluciones de la ecuación cuadrática de Catalan:

$$T(z) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

Verificando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = 1 = T(0)$ y que por otra parte la otra alternativa a de ser descartada ya que el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$ obtenemos que la función generatriz de Catalan:

$$T(z) = \sum_{n \geq 0} C_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Por cierto, es posible evitar calcular este límite desarrollando ambas soluciones como series de potencias, y observando entonces cuál de ellas satisface nuestras condiciones iniciales, tal como lo indicamos en el primer apéndice de este trabajo.

Si el lector está familiarizado con el teorema del binomio de Newton, ya lo que queda es rutina. En caso contrario, lo invito a leer en este momento el primer apéndice de este trabajo.

Desarrollando a la función generatriz de Catalan como una serie de potencias

conseguimos una vez mas a la fórmula cerrada de Catalan:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n \\ &= 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + 14z^4 + 42z^5 + \dots \end{aligned}$$

3.2 Árboles de Catalan.

Definimos a un árbol de Catalan como un árbol plano, con raíz, y sin etiquetas. Para aclarar los términos nada mejor que un dibujo. En la Figura 8 se encuentran los cinco árboles de Catalan con $3 + 1$ vértices.

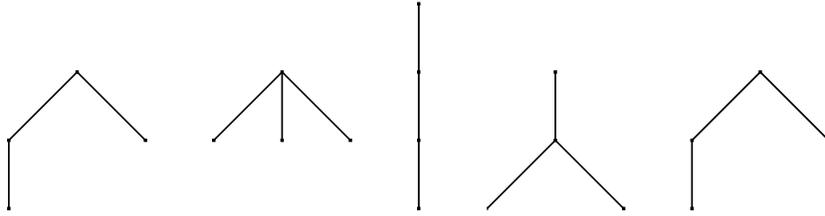


Figura 8: Los cinco árboles de Catalan con $3 + 1$ vértices.

Sea \mathcal{G} el conjunto de todos los árboles de Catalan. Se deja al lector la tarea de ver que \mathcal{G}^2 es el conjunto de los pares ordenados de árboles de Catalan, que \mathcal{G}^3 es el conjunto de todos los triples ordenados de Catalan, y en general que \mathcal{G}^k es el conjunto de todas las k -uplas ordenadas de Catalan.

Ahora viene el paso crucial. Cualquier árbol de Catalan puede ser descompuesto como un punto, (que corresponde a la raíz y que denotaremos por o), seguido por una sucesión de árboles de Catalan, que bien podría ser vacía.

$$\mathcal{G} = o \cdot (1 + \mathcal{G} + \mathcal{G}^2 + \mathcal{G}^3 + \dots) = \frac{o}{1 - \mathcal{G}}$$

Un ejemplo de esta correspondencia se encuentra ilustrado en la Figura 9.

Como en la sección anterior, le asociamos un peso a cada árbol de Catalan. En este caso, el peso de un árbol de Catalan se calcula elevando la indeterminada z al número de vértices que conforman el árbol. Sea $G(z)$ la función generatriz obtenida sumando a todos los pesos de todos los árboles en el conjunto \mathcal{G} . La ecuación anterior entre el conjunto \mathcal{G} se traduce en la siguiente ecuación algebraica que satisface su función generatriz .

$$G(z) = \frac{z}{1 - G(z)}$$



Figura 9: La descomposición de un árbol como la unión de su raíz y una sucesión ordenada de árboles.

Un razonamiento similar al utilizado en la sección 3.1 y que se dejó al lector nos permitirá desarrollar a la función generatriz $G(z)$ como serie de potencias:

$$G(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} z^n$$

y concluir que $G_n = C_{n-1}$.

3.3 Polidominos

Un polidomino es una colección de cuadrados del mismo tamaño donde cada uno de estos cuadrados está conectado con sus vecinos a través de sus lados y con los que constituye una sola pieza. En la Figura 10 se encuentra dibujado un polidomino que consiste en 13 cuadrados. En la Figura 11, se encuentran dibujados tres configuraciones que no son polidominos.

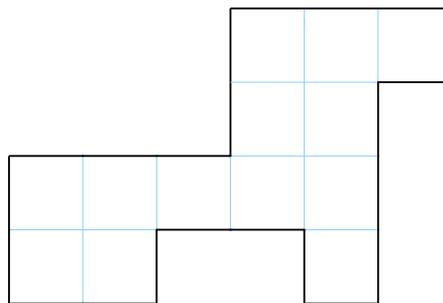


Figura 10: Un polidomino formado con 13 cuadrados.

A pesar de ser una pregunta que intriga a muchos matemáticos, nadie conoce una fórmula cerrada que permita calcular el número de polidominos que existen de un área dada, ni de un perímetro dado. Ahora, si imponemos la condición adicional que sea posible recorrer la frontera del polidomino caminando pasos norte (o este) y luego regresarse con pasos hacia el sur (u oeste) al punto de

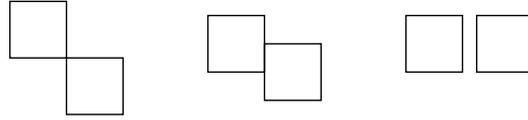


Figura 11: Configuraciones que no son polidominos.

partida, la respuesta fue hallada por Pólya en 1969, [4]. Por razones que pronto serán evidentes llamamos a esta familia los polidominos de Catalan. Describimos el resultado de Polya utilizando un argumento de Flajolet [3].

Enumeramos a esta familia de polidominos de acuerdo con su perímetro. Más precisamente, $P(n)$ es el número de polidominos de Catalan de perímetro $2n + 2$.

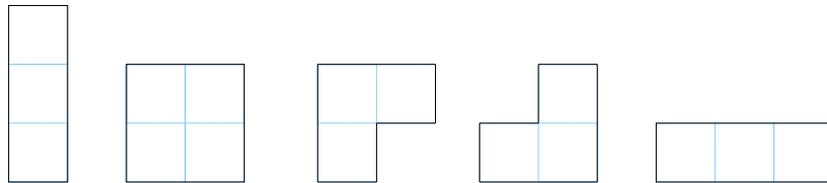


Figura 12: Los 5 polidominos de Catalan de perímetro $2 \cdot 3 + 2$.

Dados dos conjuntos \mathcal{F} y \mathcal{C} , si los elementos de \mathcal{F} se pueden identificar de manera única con sucesiones de elementos de \mathcal{C} , entonces las funciones generatrices asociadas a estos conjuntos satisfacen las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$F = \frac{1}{1 - C} \qquad C = 1 - \frac{1}{F}$$

Cualquier pareja de caminos que empiezan y terminan en el mismo punto se puede descomponer como una sucesión de dominos de Catalan, más dos casos degenerados, que corresponden a las situaciones donde los caminos se superponen. En la Figura 13 se ilustra esta afirmación. En particular, el caso degenerado, donde ambos caminos se superponen, está señalado por una flecha. Cada polidomino de Catalan aparecerá dos veces (*¿Por qué?*).

El número de parejas de caminos, cada uno de ellos de longitud n viene dado

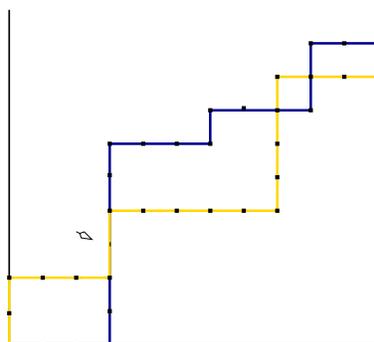


Figura 13: Una pareja de caminos que empiezan y terminan en el mismo punto.

por

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} z^n \\
 &= \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^n \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-4z}}
 \end{aligned}$$

Si el lector tiene problemas para justificar esta cadena de igualdades, entonces puede consultar el primer apéndice de este trabajo.

Así que,

$$\begin{aligned}
 C(z) &= \frac{1}{2}(1 - 2z - \sqrt{1-4z}) \\
 &= z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 14z^5 + 42z^6 + \dots
 \end{aligned}$$

Nótese que estamos substrayendo $2z$ para evitar la ocurrencia de los casos degenerados en nuestra función generatriz.

Concluimos entonces que el número de polidominos de Catalan de perímetro $2n$ es el número de Catalan

$$\frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$$

4 Una nueva ocurrencia de los Números de Catalan.

El Valle de Sartanejas es sede de una Olimpiada de Matemáticas. Como siempre todos los estudiantes están invitados a participar. Hay dos tipos de preguntas: Las menos difíciles valen n puntos; las demás valen $n + 1$ puntos.

Para hacer la competencia más divertida a cada jugador se le otorga una puntuación inicial de acuerdo al ranking local. El número uno del ranking empieza a jugar sin ningún punto.

Dado un número natural, no hay ninguna razón para suponer que algún estudiante esté en la posibilidad de obtenerlo. Por ejemplo, si las preguntas valen tres o cuatro puntos y todos los jugadores ocupan el mismo lugar en el ranking, entonces ningún estudiante puede sacar 1, 2, ni 5 puntos. (Todas las demás puntuaciones son posibles. ¿Por qué?)

Hay exactamente cuatro posibles escenarios más (¿Por qué?):

Que un estudiante empiece con un punto (con la posibilidad de obtener 5 puntos contestando una pregunta de 4 puntos correctamente) y nadie pueda obtener 2 puntos.

Que un estudiante empiece con 2 puntos (y con la posibilidad de obtener 5 puntos) y nadie pueda obtener 1 punto.

Que un estudiante empiece el torneo con 5 puntos, y finalmente, que existan tanto un estudiante que empiece con 1 punto, como un estudiante que empiece con 2 puntos (ambos dos con la posibilidad de obtener 5 puntos).

Pregunta: Si fijamos los valores de n (y $n + 1$), cuántos escenarios diferentes existen?

Una posible respuesta es la siguiente: (No es la misma que incluyó el profesor Richard Stanley en su Catalan Addendum, que tiene naturaleza más algebraica. ¡Espero que también sea diferente de la que conseguirá el lector!)

Llamemos S al conjunto de todas las puntuaciones posibles si todo los jugadores empiezan el torneo con 0 puntos.

Es fácil de demostrar que es posible obtener a todos los números mayores o iguales a $n(n - 1)$. Más aún, un argumento bastante estándar nos asegura que exactamente la mitad de los números entre 1 y $n(n - 1)$ pertenecen a S , [7].

Construyamos el siguiente arreglo:

1				
2	$n + 2$			
3	$n + 3$	$2n + 3$		
4	$n + 4$	$2n + 4$	$3n + 4$	
...
$n - 2$	$n(n - 2) - 2$	
$n - 1$	$2n - 1$	$3n - 1$	$n(n - 2) - 1$	$(n - 1)n - 1$

Este arreglo tiene las siguientes propiedades:

1. Los números en el arreglo son exactamente aquellos que no pertenecen a S .
2. Los números en cada línea horizontal están en progresión aritmética. (La diferencia entre los números consecutivos es n).

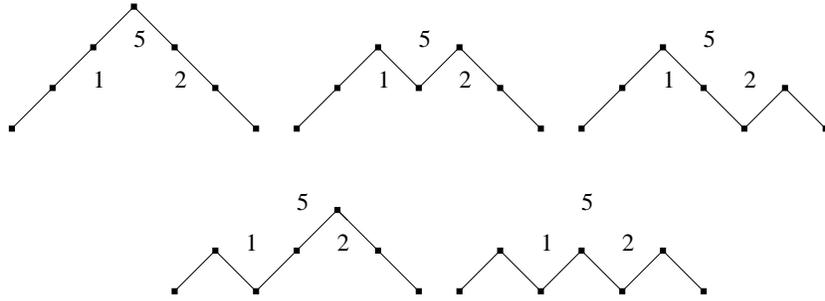


Figura 14: Biyección con los caminos de Dyck.

3. Los números en cada diagonal también están en progresión aritmética. La diferencia entre los números consecutivos es $n + 1$).

Rotemos este arreglo de manera que $(n - 1)n - 1$ se convierta en la primera fila, $n(n - 2) - 1$ y $n(n - 2) - 2$ la siguiente fila, y así hasta la última fila que será $1, 2, \dots, n - 1$. Dispongamos estos números en forma de pirámide.

Si uno de los números del arreglo rotado se torna posible por cambios en el ranking, entonces los que están inmediatamente por encima de él, se hacen posibles también. Eso permite obtener una biyección entre los escenarios posibles y los caminos de Dick. En consecuencia los posibles escenarios están contados por los números de Catalan.

Por ejemplo, en la Figura 14, está el resultado de rotar el arreglo cuando $n = 3$, así como los 5 posibles escenarios que describimos al enunciar la nueva interpretación de los números de Catalan.

5 Primer Apéndice

Queremos desarrollar como serie de potencias a la función generatriz de Catalan:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \frac{1 - (1 - 4z)^{1/2}}{2z}$$

Utilizamos al binomio de Newton para desarrollar como serie a la expresión $(1 - 4z)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} (1 - 4z)^{1/2} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} (-4z)^n \\ &= 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - 2)(1 - 4) \cdots (1 - 2n + 2)}{n!} (-2z)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 \cdot (n-1)!}{n!(n-1)!} (2z)^n \\
&= 1 - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} z^n
\end{aligned}$$

Obtenemos entonces la fórmula cerrada para los números de Catalan.

$$\begin{aligned}
C(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} z^{n-1} \\
&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n
\end{aligned}$$

6 Segundo Apéndice

La manera que se encuentra en la mayoría de los libros de texto de combinatoria para conseguir a la fórmula cerrada de Catalan a partir de la recurrencia descrita en la primera sección, es la siguiente.

Sea

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

Multiplicando la recurrencia de Catalan por z^n y sumando los resultados obtenidos para todos los valores de n obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (C_0 C_n z^n + C_1 C_{n-1} z^n + \cdots + C_{n-1} C_1 z^n + C_n C_0 z^n).$$

Ahora el lado derecho se puede describir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C^2(z).$$

Similarmente, el lado izquierdo se puede describir como

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{n-1} = \frac{1}{z} (C(z) - 1)$$

Obtenemos entonces a la ecuación cuadrática de Catalan:

$$C(z) = 1 + zC^2(z).$$

7 Agradecimientos

Quiero agradecer a Philippe Flajolet por la historia de los números de Catalan, a Doron Zeilenberger por la biyección expuesta en la sección 2, a Richard Stanley por los problemas referentes a los números de Catalan, y a Mike Zabrocki por su sugerencia acerca de cómo plantear la nueva interpretación de los números de Catalan descrita en este trabajo.

Quiero darles las gracias a Eduardo Lima de Sá por sus acertados comentarios, y a Argimiro Arratia y al árbitro anónimo por sus sugerencias sobre cómo mejorar la presentación de este trabajo.

Por último, y con mucho cariño, quiero darles las gracias a David Seguí, Adolfo Rodríguez, Paúl Monasterio, Hector Chang y Fernando Delgado.

Referencias

- [1] Dunham, William, Euler: The master of us all. The Dolciani Mathematical Expositions, 22. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.
- [2] Philippe Flajolet and Sedgewick, Singular Combinatorics/ Analytcs Combinatorics.
Este libro se puede imprimir de manera gratuita de la página del profesor Flajolet: <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html>
- [3] Philippe Flajolet, Polya Festoons, INRIA Research Report, No 1507, September 1991.
<http://algo.inria.fr/flajolet/Publications>
- [4] George Pólya, On the number of certain lattice polygons, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 6:102–105, 1969.
- [5] Richard Stanley, Enumerative Combinatorics 2
Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [6] Richard Stanley, Catalan Addendum,
<http://www-math.mit.edu/~rstan/ec>
- [7] Wilf, Herbert S, generatingfunctionology. Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.
Este libro se puede imprimir de manera gratuita de la página del profesor Wilf: <http://www.cis.upenn.edu/~wilf/>

MERCEDES H. ROSAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
mrosas@ma.usb.ve
<http://www.ma.usb.ve/~mrosas>

Comentarios sobre la definición de Autómata Celular^{*}

Neptalí Romero

Resumen

La finalidad primordial de estas notas es la de presentar una extensión del concepto de autómata celular proveniente de la Teoría de la Computación. Para los propósitos del artículo, enmarcamos la extensión del concepto de autómata celular en la Teoría de los Sistemas Dinámicos; y más precisamente en los Sistemas Dinámicos Discretos sobre Reticulados, apuntando hacia una visión un tanto globalizadora que incluya, entre otros ejemplos, las denominadas Aplicaciones Acopladas sobre Reticulados.

1. Introducción

La génesis de los autómatas celulares es asignada a Stanislaw Ulam y John von Neumann (década de los años 40 del siglo XX). Ulam, a partir de un conjunto de juegos para computadores, le propone a von Neumann el problema de construir un “universo abstracto” para el estudio y análisis de la reproducción automática, mecánica o robótica; ofreciendo de esta forma un marco teórico para el estudio de problemas provenientes de sistemas con comportamientos complejos y descritos por reglas sencillas.

En el primer ejemplo de autómata celular propuesto por von Neumann, el universo era un tablero infinito, cada celda del tablero asumía diferentes estados dentro de un conjunto finito de valores, y la evolución de los estados en cada una de las celdas eran gobernadas por leyes simplificadas de la Física que dependían de un número finito de parámetros. A partir de allí el estudio y desarrollo de los autómatas celulares ha venido recibiendo una notable atención

^{*} Conferencia Plenaria en las XVI Jornadas de Matemáticas. Abril 7–9, 2003. USB, Caracas

por investigadores en diferentes áreas del conocimiento. Citamos, por ejemplo, que en la Teoría de la Computación promovió el impulso del procesamiento paralelo y el procesamiento de imágenes; en la Biología han sido empleados para modelar problemas provenientes de la Genética; en la Física son usados para el estudio, entre otros, de problemas de la dinámica de fluidos; y en Química para el estudio de problemas de reacciones de difusión.

El primer ejemplo de von Neumann es un tanto complicado como para utilizarlo en un artículo de divulgación acerca de la definición de autómatas celulares. No obstante, existe un autómata celular que se hizo famoso en la década de los setenta del siglo pasado; se trata de denominado *Juego de la Vida*, el cual fue inventado por John Horton Conway, y mostrado como una curiosidad de Matemática Recreativa en la sección Mathematical Games de la revista Scientific American, ver [6]. Este autómata celular está modelado en \mathbb{Z}^2 , cada célula (punto del reticulado \mathbb{Z}^2) admite dos posibles estados: 0 = célula muerta y 1 = célula viva. La evolución de los estados de las células en \mathbb{Z}^2 ocurre de manera simultánea; de manera que la evolución del estado de cada célula depende del estado de ella y de los estados de sus vecinas inmediatas. La siguiente figura muestra la célula c y las células vecinas inmediatas que denotamos por v .

$$\begin{array}{ccc} v & v & v \\ v & c & v \\ v & v & v \end{array}$$

Figura 1: La evolución del valor que posee c depende de ese valor y del valor de las células etiquetadas con v

La ley que gobierna este juego es como sigue:

Si una célula muerta tiene exactamente tres vecinas vivas, éstas se reproducen y le dan vida. Si una célula viva tiene dos o tres vecinas vivas, ella permanece viva; pero si hay menos de dos vecinas vivas, muere por aislamiento. Si una célula tiene más de tres vecinas vivas, muere por superpoblación si estaba viva, y permanece muerta si ya lo estaba.

La figura a continuación muestra como las células vecinas se reproducen para darle vida a la célula c que estaba muerta.

Mucha gente comenzó, y aún lo hacen, a jugar con este juego matemático

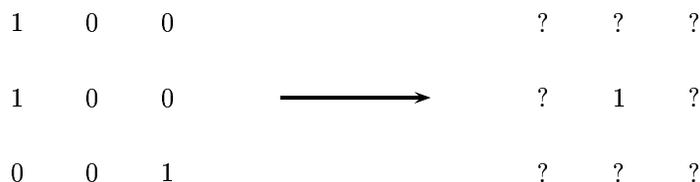


Figura 2: Los signos de interrogación que aparecen en los lugares ocupados por las vecinas de c indican la imposibilidad de asignarles un valor, no se conocen (en este caso) los estados de las células en sus respectivas vecindades inmediatas.

de Conway con el objetivo de buscar configuraciones curiosas; por ejemplo, configuraciones periódicas o preperiódicas. Versiones probabilísticas del juego de la vida han sido creadas. También se demostró que el juego de la vida es equivalente a una Máquina de Turing, motivando así el interés por la construcción de máquinas de computo en paralelo. De hecho en la actualidad se continúan construyendo máquinas de Turing soportadas sobre este autómata celular; ver por ejemplo [15].

Para concluir esta nota histórica, es necesario mencionar que en la década de los ochenta del siglo XX, se destaca el trabajo de Stephen Wolfram sobre la Teoría Computacional de los Autómatas Celulares. Haciendo uso de las ideas del primer ejemplo de von Neumann, Wolfram introduce variaciones sobre el reticulado unidimensional \mathbb{Z} . Cada punto, o célula, admitiendo dos valores: 0 y 1. La evolución del estado de cada célula regido por una regla que dependía de los estados de la propia célula y sus dos vecinas contiguas. Tal fue el entusiasmo de Wolfram que lo llevó a considerar las 256 posibles reglas bajo tales consideraciones; muchas de ellas conocidas en la actualidad por la numeración asignada por Wolfram. Muchas de estas reglas dan origen a dinámicas triviales; sin embargo en otras más interesantes, pueden observarse “fenómenos complejos” en los sistemas dinámicos definidos mediante tales reglas. Recientemente Wolfram ha publicado un libro relacionado con la autómatas celulares del cual L. Gray, en [10], hace una reseña del trabajo allí expuesto.¹

¹N. del E. : Véase también la reseña de A. Octavio sobre este libro de Wolfram en este mismo número del Boletín

2. La Definición Clásica de Autómata Celular

Es una convicción generalizada que el concepto de autómata celular proviene de la Teoría de la Computación. Antes de mostrar tal definición conviene señalar los elementos mediante los cuales se expresa, y el contexto general donde los autómatas celulares se enmarcan.

Los autómatas celulares constituyen una clase particular de sistemas dinámicos discretos sobre reticulados; estos son sistemas dinámicos que pueden expresarse mediante una ecuación en diferencia de orden uno:

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \geq 0,$$

donde $x_n = \{x_n(i)\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ (d entero positivo fijo), cada $x_n(i)$ está en un espacio métrico M_i , llamado *espacio de fase en el punto* $i \in \mathbb{Z}^d$, y F es un endomorfismo (mapa de transición global) del producto topológico $M = \prod_{i \in \mathbb{Z}^d} M_i$ (espacio de configuraciones) que preserva tal estructura topológica, es decir, $F(x) = \{F_i(x)\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ donde $F_i : M \rightarrow M_i$. De esta forma, un sistema dinámico discreto sobre el reticulado \mathbb{Z}^d es la acción de \mathbb{N} con la evolución del sistema dada por F ; en el caso de ser F invertible la acción se extiende a \mathbb{Z} .

Veamos cuales son los elementos necesarios para definir un autómata celular en este marco general:

1. \mathbb{Z}^d es el reticulado; para cada $i \in \mathbb{Z}^d$, $M_i = \mathcal{A}$ (métrica discreta) es un conjunto finito, denominado *alfabeto*;
2. el espacio de configuraciones, $\Sigma(\mathcal{A}, d)$, es el conjunto de todas las sucesiones d -infinitas con valores en \mathcal{A} , es decir $\Sigma(\mathcal{A}, d) = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$;
3. una vecindad finita \mathbb{V} del origen en \mathbb{Z}^d ;
4. todas las posibles funciones de \mathbb{V} en \mathcal{A} , $\mathcal{A}^{\mathbb{V}}$; y
5. una función $f : \mathcal{A}^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathcal{A}$ que es la regla que rige la evolución del autómata celular; también es conocida como *función bloque*.

Es simple chequear que $D(x, y) = 2^{-i}$ con $i = \inf\{\|n\| : n \in \mathbb{Z}^d, x(n) \neq y(n)\}$ y

$$\|n\| = \text{máx}\{|n_i| : 1 \leq i \leq d\} \quad \text{si } n = (n_1, \dots, n_d)$$

define una métrica compatible con la estructura producto; además, $(\Sigma(\mathcal{A}, d), D)$ es un conjunto de Cantor: compacto, perfecto y totalmente desconexo.

A partir de los elementos mencionados tenemos, ver [12], [18] y [19]:

Definición 1 *El autómata celular sobre el reticulado \mathbb{Z}^d con alfabeto \mathcal{A} y función bloque f , es el mapa de transición global $F : \Sigma(\mathcal{A}, d) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}, d)$ definido por:*

$$F(x)(n) = f(x|\mathbb{V} + n),$$

para cada $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y cada $n \in \mathbb{Z}^d$; donde $x|\mathbb{V} + n$ denota la función de \mathbb{V} en \mathcal{A} dada por los valores que asume la sucesión x en el trasladado de \mathbb{V} por el vector d -dimensional n .

Observe que el nuevo estado de la célula ubicada en la posición n de $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$, depende de los estados que tenga x en las células que conforman la vecindad de n dada por $\mathbb{V} + n$, justamente ese nuevo estado es el valor $f(x|\mathbb{V} + n)$. Por esta razón los autómatas celulares son considerados como *sistemas dinámicos espacialmente extendidos gobernados por interacciones locales*. La función f es la ley de interacción local, la cual es uniforme en el sentido que actúa sobre vecindades homogéneas de cada célula.

Ejemplo 1 *Tomemos como reticulado \mathbb{Z} , $\mathcal{A} = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{V} = \{-1, 0, 1\}$ y $f(a_{-1}, a_0, a_1) = a_{-1} + a_1 \pmod{2}$ (regla 90 en la nomenclatura de Wolfram). Entonces para la configuración*

$$x = \{\dots, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0 \dots\}$$

la evolución temporal hasta el “tiempo $n = 3$ ” se muestra en la siguiente figura:

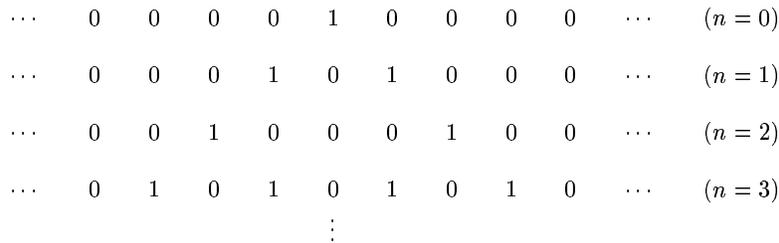


Figura 3: La primera línea es la configuración x , las restantes son las configuraciones de los sucesivos iterados por F de x hasta $n = 3$

2.1. Aplicaciones Shifts y Autómatas Celulares

En el espacio de configuraciones $\Sigma(\mathcal{A}, d)$ existe un grupo de automorfismos generado por las traslaciones en las coordenadas del reticulado \mathbb{Z}^d ; éstas son conocidas como aplicaciones shifts y son definidas, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, por

$$\sigma_i(x)(n) = x(n + e_i) \text{ para cada } x \in \Sigma(\mathcal{A}, d) \text{ y } n \in \mathbb{Z}^d,$$

donde e_i denota el i -ésimo vector canónico en \mathbb{R}^d . Luego es claro que σ es elemento de este grupo de traslaciones si, y sólo si, existe $q \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\sigma(x)(n) = x(n + q)$ para todo $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y $n \in \mathbb{Z}^d$.

Observación 1 *Las aplicaciones shifts $\sigma_i : \Sigma(\mathcal{A}, d) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}, d)$ ($i = 1, \dots, d$) juegan un papel importante para describir el comportamiento caótico de las órbitas en determinados conjuntos invariantes (conjuntos de Cantor) en ciertos sistemas dinámicos discretos $T : X \rightarrow X$ (X espacio métrico y T continua). De hecho, los shifts σ_i son caóticos, esto significa: el conjunto de puntos periódicos son densos en $\Sigma(\mathcal{A}, d)$; existen puntos $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ tales que su órbita $(\{\sigma_i^k(x) : k \geq 0\})$ es densa en $\Sigma(\mathcal{A}, d)$. Estas dos condiciones implican que cada σ_i tiene la propiedad de sensibilidad en las condiciones iniciales: existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y $\epsilon > 0$, existen $y \in \Sigma(\mathcal{A}, d)$ y $k \geq 1$ tales que $D(\sigma_i^k(x), \sigma_i^k(y)) \geq \delta$; ver [1].*

Es simple verificar que cada traslación σ es un autómata celular; además, todo autómata celular F definido en $\Sigma(\mathcal{A}, d)$ conmuta con todas las traslaciones σ . Más aún, como consecuencia de algunos resultados en [11] se tiene el siguiente teorema que permite caracterizar los autómatas celulares en términos de las aplicaciones shifts en \mathbb{Z}^d .

Teorema 1 (Curtis-Hedlund-Lyndon) *Toda $F : \Sigma(\mathcal{A}, d) \rightarrow \Sigma(\mathcal{A}, d)$ continua que conmuta con las aplicaciones shifts σ_i ($i = 1, \dots, d$) es un autómata celular.*

3. Extensión de la definición de Autómata Celular

Tomando como soporte el Teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon se extenderá, en esta sección, el concepto de autómata celular a un contexto más abstracto, manteniendo como marco los sistemas dinámicos discretos sobre reticulados. Para ello consideremos:

1. un reticulado \mathcal{R} : conjunto con estructura discreta (topología discreta),
2. un alfabeto \mathcal{A} : espacio métrico cualquiera,
3. el espacio de configuraciones es el espacio producto

$$\mathcal{A}^{\mathcal{R}} = \prod_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{A}_r = \{x : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}\},$$

donde $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}$ para todo $r \in \mathcal{R}$; y

4. un subgrupo G del grupo de permutaciones (aplicaciones biyectivas) de \mathcal{R} .

Correspondiente a cada $g \in G$ se define el g -shift $\sigma_g : \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ como

$$\sigma_g(x)(r) = x(g(r)) = (x \circ g)(r), \text{ para todo } x \in \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \text{ y } r \in \mathcal{R}.$$

Con estos elementos tenemos entonces:

Definición 2 *Dados \mathcal{R}, \mathcal{A} y G , decimos que $F : \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$, continua y preservando la estructura producto, es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata si conmuta con σ_g para todo $g \in G$.*

Debe observarse que si el grupo G de permutaciones en \mathcal{R} es conmutativo, entonces cada σ_g ($g \in G$) es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata.

Antes de mostrar algunos casos particulares de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas veamos cómo construir éstos mediante funciones bloques, tal y como fueron concebidos los autómatas celulares en la Teoría de la Computación.

Definición 3 *Un subgrupo G del grupo de permutaciones de \mathcal{R} se dice transitivo y libre de puntos fijos, si para cada $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$ existe una única $g \in G$ tal que $g(r_1) = r_2$.*

Proposición 1 *Sean \mathcal{R} un reticulado, \mathcal{A} un alfabeto y G un subgrupo transitivo y libre de puntos fijos en \mathcal{R} . Cualesquiera sean $r_0 \in \mathcal{R}$, $B = \{r_1, \dots, r_n\} \subset \mathcal{R}$ y $\phi : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}$ continua, el endomorfismo $F : \mathcal{A}^{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ definido, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ y $r \in \mathcal{R}$, por*

$$F(x)(r) = \phi(x(g(r_1)), \dots, x(g(r_2))),$$

donde $g \in G$ es la única permutación que $g(r_0) = r$, es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata. La función ϕ es la función bloque del autómata.

Demostración : Claramente la aplicación F así definida es continua. Mostremos que conmuta con cada g -shift de $\mathcal{A}^{\mathcal{R}}$. Fijemos $r \in \mathcal{R}$ arbitrario y tomemos el único h en G tal que $h(r_0) = r$. Para cualquier $g \in G$ y cada $x \in \mathcal{A}^{\mathcal{R}}$ se tiene:

$$\begin{aligned} (F \circ \sigma_g)(x)(r) &= F(\sigma_g(x))(r) = F(x \circ g)(r) \\ &= \phi((x \circ g)(h(r_1)), \dots, (x \circ g)(h(r_n))). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $h(r_0) = r$, entonces $(g \circ h)(r_0) = g(r)$. Luego es claro que

$$\begin{aligned} (\sigma_g \circ F)(x)(r) &= \sigma_g(F(x))(r) = F(x)(g(r)) \\ &= \phi(x((g \circ h)(r_1)), \dots, x((g \circ h)(r_n))) \\ &= (F \circ \sigma_g)(x)(r), \end{aligned}$$

lo cual demuestra que F es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata. ■

Observe que si F es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata definido mediante una función bloque ϕ como en la proposición anterior, entonces la evolución del estado en cada punto del reticulado r de cualquier configuración x ($x(r) \rightarrow F(x)(r)$), depende sólo de un número finito de estados (siempre el mismo e independientes de x y r) de la configuración x en determinados puntos de \mathcal{R} únicamente definidos por r . En otras palabras, en este caso la transición global de estados está definida mediante la interacción local de los estados de cada célula y sus vecinos en una vecindad uniforme. Esto no significa que todo $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata pueda ser expresado de tal forma. De hecho el siguiente ejemplo muestra un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata en el que la evolución del estado en cada punto del reticulado depende de todos los estados de la configuración.

Ejemplo 2 Tomemos $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ y G el grupo generado por la permutación $g(n) = n + 1$ de \mathbb{Z} ; es simple verificar que G es transitivo y libre de puntos fijos en \mathbb{Z} . Es claro que el shift asociado a g es dado por $\sigma(x)(n) = x(n + 1)$. Sea $F_0 : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x = \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ se tiene

$$F_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x(n)}{1 + |x(n)|} 2^{-|n|},$$

entonces $F : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ definida, para cada $x = \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ y $k \in \mathbb{Z}$, por

$$F(x)(k) = F_0(\sigma^k(x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma^k(x)(n)}{1 + |\sigma^k(x)(n)|} 2^{-|n|},$$

es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata ($F \circ \sigma = \sigma \circ F$) que no puede expresarse mediante una función bloque.

4. Algunos Casos Particulares de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -Autómatas

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas que aparecen en diferentes contextos. Se han anexado, gracias a comunicaciones orales con S. Marcantognini y C. A. Di Prisco, un ejemplo relativo a operadores de Toeplitz, y una caracterización de ciertos $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas usando nociones del concepto de barreras de la Teoría de Conjuntos, lo cual extiende el teorema 1 de Curtis-Hedlund-Lyndon para $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas con $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$ y \mathcal{A} discreto.

4.1. Autómatas Celulares

Los autómatas celulares de la definición 1 son obviamente $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas; basta tomar $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$, \mathcal{A} es un conjunto finito y G es el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z}^d , el cual es transitivo y libre de puntos fijos.

4.2. Sistemas Dinámicos Discretos

Todo sistema dinámico discreto en un espacio métrico X , $f : X \rightarrow X$, es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata. Basta elegir \mathcal{R} un conjunto unitario, $\mathcal{A} = X$ y G el grupo trivial.

4.3. $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómatas

Consideremos el caso particular de $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómatas donde G es el grupo de traslaciones en \mathbb{Z}^d .

El siguiente resultado provee una propiedad general de cualquiera de estos autómatas. Aunque simple de verificar es interesante, pues muestra que todo $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata se expresa mediante una función de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ en \mathcal{A} .

Proposición 2 *Si F es un $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata, existe $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ vale*

$$F(x)(n) = (F_0 \circ \sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x),$$

donde σ_i es la traslación en el vector canónico e_i con $i = 1, \dots, d$.

Demostración : Es claro que para cada $n \in \mathbb{Z}^d$ existe $F_n : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, $F(x) = \{F_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}^d}$. Dado que F conmuta con cada σ_i , entonces es simple verificar que para todo $i = 1, \dots, d$ y $n \in \mathbb{Z}^d$ se tiene $F_{n+e_i} = F_n \circ \sigma_i$. Luego, como las traslaciones conmutan entre si, el resultado sigue. ■

Para cualquier espacio métrico \mathcal{A} , el conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ dotado de la topología producto admite como una métrica que describe tal topología a $D : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \times \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow [0, +\infty)$ con $D(x, y) = 0$ si $x = y$, y

$$D(x, y) = 2^{-i}, \text{ donde } i = \inf_{n \in \mathbb{Z}^d} \{\|n\| : x(n) \neq y(n)\},$$

donde $\|n\| = \max\{|n_i| : i = 1, \dots, d\}$ si $n = (n_1, \dots, n_d)$. Por otro lado, fijados un entero no negativo k y una colección A de $(2k+1)^d$ valores a_n en \mathcal{A} (no necesariamente distintos), se define el *cilindro*

$$C(k, A) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : x(n) = a_n, \text{ para todo } \|n\| \leq k\}.$$

Es bien conocido que cada cilindro es abierto y cerrado; además, la colección de todos los cilindros es una base para la topología producto en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.

La extensión más simple del teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon, por ejemplo con \mathcal{A} compacto, es la que a continuación mostramos. Se incluye una demostración por su sencillez.

Teorema 2 Sean $\mathcal{R} = \mathbb{Z}^d$, \mathcal{A} es un espacio métrico y G es el grupo de las traslaciones de \mathbb{Z}^d . Si F es un $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómata uniformemente continuo, entonces F se expresa mediante una función bloque como en la proposición 1.

Demostración : Sabemos que existe $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d)$ vale $F(x)(n) = (F_0 \circ \sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x)$.

Dado que F es uniformemente continua, existe $k \geq 1$ tal que, para todo $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$:

$$D(x, y) < 2^{-k} \text{ implica } D(F(x), F(y)) < 1.$$

Esto es claramente equivalente a:

$$F_0(x) = F_0(y), \text{ siempre que } x(n) = y(n) \text{ con } \|n\| \leq k.$$

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{A}^{(2k+1)^d}$, cuyos elementos los entendemos como arreglos d -dimensionales $\omega = \{\omega(n) \in \mathcal{A} : \|n\| \leq k, n \in \mathbb{Z}^d\}$. Definimos

entonces la función $f : \mathcal{A}^{(2k+1)^d} \rightarrow \mathcal{A}$ por

$$f(\omega) = F_0(x) \text{ para cualquier } x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \text{ con } x(n) = \omega(n) \text{ para todo } \|n\| \leq k.$$

Note que por la continuidad uniforme de F , f está bien definida, es continua y también la función bloque que describe al autómata. ■

A continuación mostraremos otra extensión del teorema 1 para $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómatas, con \mathcal{A} discreto y G el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z}^d . Esta extensión sigue muy de cerca la caracterización de funciones continuas en otro contexto, quizás un tanto más reducido, ver [9]; pero que permite extender la noción de funciones bloques empleando el concepto de barreras proveniente de la Teoría de Conjuntos.

Para cada entero no negativo k , denotamos por $D(k)$ al conjunto de todo $n \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|n\| \leq k$. Sea \mathcal{F}_k el conjunto de funciones $f : D(k) \rightarrow \mathcal{A}$, y sea \mathcal{F} la unión de los \mathcal{F}_k con $k \geq 0$. En \mathcal{F} tenemos el orden parcial dado por:

$$f \sqsubset g \text{ si } \text{dom}(f) \subset \text{dom}(g) \text{ y } g|_{\text{dom}(f)} = f,$$

donde $\text{dom}(f)$ denota el dominio de f , y $g|_{\text{dom}(f)}$ es la restricción de g al dominio de f . Una *anticadena* en \mathcal{F} respecto de \sqsubset es cualquier colección de elementos no comparables (según \sqsubset) de \mathcal{F} .

Definición 4 (cf. [8], [9]) *Una barrera para $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ es una colección $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ tal que:*

- (i) \mathcal{B} es una anticadena respecto de \sqsubset , y
- (ii) para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, existe una única $f \in \mathcal{B}$ tal que $x|_{\text{dom}(f)} = f$.

La noción de barrera en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ está claramente relacionada con cierta colección de cilindros de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. De hecho, para cada barrera \mathcal{B} de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe una única colección de cilindros \mathcal{C} en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ que describe a \mathcal{B} . En efecto, para cada $f : D(k) \rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{B}$, sea $C(k, f(D(k)))$ el cilindro en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ formado por todos los $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tales que $x(n) = f(n)$ para todo $\|n\| \leq k$. Si \mathcal{C} es tal colección de cilindros, entonces es obvio que dos cilindros cualesquiera en \mathcal{C} son disjuntos; además, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe un único $C \in \mathcal{C}$ que contiene a x . Recíprocamente, si \mathcal{C} es una colección de cilindros en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que: la intersección de dos cilindros cualesquiera es vacía, y para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe un único $C \in \mathcal{C}$ con $x \in C$, entonces \mathcal{C} determina una barrera \mathcal{B} en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Esto es, la definición anterior ha podido expresarse en términos de cilindros.

Teorema 3 *Dado un espacio métrico discreto \mathcal{A} y el grupo G de traslaciones en \mathbb{Z}^d . Entonces:*

- (i) *Para cualquier barrera \mathcal{B} en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y cualquier $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, la aplicación $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ definida, para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, por*

$$F(x)(n) = \phi(f_{x,n}), \quad \text{con } f_{x,n} = (\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x) \Big|_{\text{dom}(f_{x,n})} \quad (1)$$

es un $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata.

- (ii) *Para cada $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A}, G)$ -autómata $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ existe una barrera \mathcal{B} y una función $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, de manera que F es expresado como en (1). La función ϕ se conoce como función bloque generalizada.*

Demostración : (i) Primero veamos que F conmuta con las aplicaciones shifts σ_i ($i = 1, \dots, d$), y luego que es continua. Es claro que $(F \circ \sigma_i)(x)(n) = \phi(f_{\sigma_i(x),n})$, donde $f_{\sigma_i(x),n}$ es la única función en \mathcal{B} tal que

$$(\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(\sigma_i(x)) \Big|_{\text{dom}(f_{\sigma_i(x),n})} = f_{\sigma_i(x),n}.$$

Por otro lado, $(\sigma_i \circ F)(x)(n) = \sigma_i(F(x))(n) = F(x)(n + e_i) = \phi(f_{x,n+e_i})$, donde $f_{x,n+e_i}$ es la única función de \mathcal{B} tal que

$$(\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_{i-1}^{n_{i-1}} \circ \sigma_i^{n_i+1} \circ \sigma_{i+1}^{n_{i+1}} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x) \Big|_{\text{dom}(f_{x,n+e_i})} = f_{x,n+e_i}.$$

Pero, como para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, $i = 1, \dots, d$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ se tiene que

$$(\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(\sigma_i(x)) = (\sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_{i-1}^{n_{i-1}} \circ \sigma_i^{n_i+1} \circ \sigma_{i+1}^{n_{i+1}} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x),$$

entonces $f_{\sigma_i(x),n} = f_{x,n+e_i}$, por la definición de barrera; luego F conmuta con cada traslación en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.

Ahora para mostrar la continuidad de F es suficiente verificar que la función F_0 es continua, ver proposición 2. En efecto, es claro que $F_0 : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{A}$ es dada por $F_0(x) = \phi(f_{x,0})$; como \mathcal{A} es discreto, la continuidad sigue si $F_0^{-1}(\{a\})$ es abierto para cada $a \in \mathcal{A}$. Esto último es cierto pues

$$F_0^{-1}(\{a\}) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} : F_0(x) = a\} = \bigcup_{x \in F_0^{-1}(\{a\})} C(f_{x,0}),$$

donde $C(f_{x,0})$ es el cilindro asociado a $f_{x,0} \in \mathcal{B}$.

(ii) Sabemos que para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ y $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ se tiene

$$F(x)(n) = (F_0 \circ \sigma_1^{n_1} \circ \dots \circ \sigma_d^{n_d})(x),$$

entonces la discretitud de \mathcal{A} y la continuidad de F implican que $F_0^{-1}(\{a\})$ es una unión disjunta de cilindros en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Denotemos esta colección por \mathcal{C}_a ; note que $F_0(C) = a$ para todo $C \in \mathcal{C}_a$. Para cada cilindro $C \in \mathcal{C}_a$, sea $f : D(k) \rightarrow \mathcal{A}$ (para algún k que depende de C) la función asociada a C ; y sea \mathcal{B}_a la colección de todas estas funciones. Luego, los elementos de \mathcal{B}_a no son comparables, y para cada $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ tal que $F_0(x) = a$, existe una única función f en \mathcal{B}_a con $x \upharpoonright_{\text{dom}(f)} = f$. De esta forma, \mathcal{B} , la unión de todos los \mathcal{B}_a con $a \in \mathcal{A}$, es una barrera en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Finalmente, $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ definida por $\phi(f) = a$ siempre que el cilindro C asociado a f sea tal que $F_0(C) = a$, describe a la función F_0 ; esto es, $F_0(x) = \phi(f_{x,0})$ para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Esto implica la segunda parte del teorema. ■

4.4. Aplicaciones Acopladas en Reticulados.

Son modelos de sistemas dinámicos discretos extendidos, que a partir de los años 80, ver [13] y [14], han venido ganando considerable atención por su conveniente implementación computacional en problemas de la Física Teórica; y también por su rigurosidad en las herramientas matemáticas empleadas para el estudio de la evolución temporal y espacial de su dinámica; así lo revela el elevado número de publicaciones sobre el tema.

Una aplicación acoplada sobre el reticulado \mathbb{Z}^d y medio p -dimensional $I \subset \mathbb{R}^p$ es cualquier endomorfismo $F : I^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow I^{\mathbb{Z}^d}$ que es definido por una misma interacción local en cada componente tal y como fueron definidos inicialmente los autómatas celulares; ver definición 1. Explícitamente, fijados \mathbb{V} un conjunto finito de \mathbb{Z}^d y $f : I^{\mathbb{V}} \rightarrow I$ continua, se define F de manera que para cada $x = \{x(j) : j \in \mathbb{Z}^d\} \in I^{\mathbb{Z}^d}$ y $j \in \mathbb{Z}^d$ se tiene

$$F(x)(j) = f(x \upharpoonright_{\mathbb{V}+j}), \tag{2}$$

donde $x \upharpoonright_{\mathbb{V}+j}$ denota la función de \mathbb{V} en I dada por $k \rightarrow x(j+k)$.

En términos de un sistema de infinitas ecuaciones en diferencias de orden uno, tal y como se expresan, en algunos casos, las aplicaciones acopladas sobre reticulados, se tiene de (2) que

$$x_j(n+1) = f(x(n) \upharpoonright_{\mathbb{V}+j}) \text{ con } j \in \mathbb{Z}^d, \tag{3}$$

donde $n \geq 0$ es el tiempo (discreto) del sistema.

Observe que a diferencia de los autómatas celulares, las aplicaciones acopladas sobre reticulados tienen, en general, el alfabeto no numerable. Es simple verificar que F es un caso particular de un (\mathbb{Z}^d, I, G) -autómata donde G es el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z}^d ; esto es, F conmuta con las aplicaciones shifts de $I^{\mathbb{Z}^d}$.

Una interesante disertación sobre el concepto de aplicaciones acopladas sobre reticulados se encuentra en [5].

4.5. Aplicaciones Acopladas en Reticulados con condiciones periódicas de frontera.

Estos son sistemas dinámicos discretos extendidos en el que también la función de transición global del sistema se expresa mediante una interacción local en vecindades uniformes; pero ahora el reticulado en lugar de ser \mathbb{Z}^d , es un producto de d reticulados finitos, digamos $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_{\ell_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\ell_d}$, donde $\mathbb{Z}_\ell = \{0, \dots, \ell - 1\}$ es el grupo aditivo de los enteros no negativos (*mod* ℓ). Esto corresponde a colocar condiciones periódicas de frontera en el sistema de ecuaciones en diferencia (3) empleadas para definir las aplicaciones acopladas sobre reticulados; lo que reduce el sistema de infinitas ecuaciones en diferencia a un sistema con un número finito de éstas.

La definición sigue como antes: fijados $\mathbb{V} \subset \mathcal{R}$, $I \subset \mathbb{R}^p$ y $f : I^{\mathbb{V}} \rightarrow I$ una función continua, entonces la correspondiente aplicación acoplada en \mathcal{R} es el endomorfismo $F : I^{\mathcal{R}} \rightarrow I^{\mathcal{R}}$ dado, para cada $x \in I^{\mathcal{R}}$ y $(j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R}$, por

$$F(x)(j_1, \dots, j_d) = f(x|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}), \quad (j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R}, \quad (4)$$

siendo $x|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}$ la función de \mathbb{V} en I tal que a cada $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{V}$ le hace corresponder el valor $x(j_1 \oplus_1 k_1, \dots, j_d \oplus_d k_d)$, donde \oplus_i denota la adición en \mathbb{Z}_{ℓ_i} . En términos de un sistema de ecuaciones en diferencia, F se expresa mediante el sistema de finitas ecuaciones en diferencias:

$$x_{(j_1, \dots, j_d)}(n+1) = f(x(n)|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}), \quad (j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R} \text{ y } n \geq 0,$$

donde $x(n)|_{\mathbb{V} \oplus (j_1, \dots, j_d)}$ tiene la misma interpretación anterior.

Veamos como estos endomorfismos son un caso particular de (\mathcal{R}, I, G_0) -autómatas, donde G_0 es el grupo transitivo y libre de puntos fijos de permutaciones en \mathcal{R} construido como sigue. Para cada $k = 1, \dots, d$, sea g^k la

permutación en \mathbb{Z}_{ℓ_k} dada por

$$g^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \ell_k - 2 & \ell_k - 1 \\ 1 & 2 & \dots & \ell_k - 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ es decir } g^k(n) = n \oplus_k 1.$$

Entonces $g_k = i_1 \times \dots \times i_{k-1} \times g^k \times i_{k+1} \times \dots \times i_d$, con i_j la identidad en \mathbb{Z}_{ℓ_j} , define una permutación en \mathcal{R} ; cuya traslación asociada es $\sigma_k : I^{\mathcal{R}} \rightarrow I^{\mathcal{R}}$ definida, para cada $x \in I^{\mathcal{R}}$ y $(j_1, \dots, j_d) \in \mathcal{R}$, por

$$\sigma_k(x)(j_1, \dots, j_d) = x(j_1, \dots, j_{k-1}, j_k \oplus_k 1, j_{k+1}, \dots, j_d). \quad (5)$$

Se verifica que el grupo G_0 generado por $\{g_1, \dots, g_d\}$ es transitivo y libre de puntos fijos, y además que el endomorfismo F dado por (4) conmuta con σ_k para todo $k = 1, \dots, d$, ver proposición 1.

A continuación se comenta una interesante propiedad de los $(\mathcal{R}, I, \tilde{G})$ -autómatas, donde \mathcal{R} e I son como arriba y \tilde{G} es un grupo transitivo y libre generado de manera similar al grupo G_0 anterior; \tilde{G} es cualquier grupo generado por permutaciones

$$h_k = i_1 \times \dots \times i_{k-1} \times h^k \times i_{k+1} \times \dots \times i_d \quad (k = 1, \dots, d),$$

donde h^k es cualquier permutación transitiva en \mathbb{Z}_{ℓ_k} , es decir, h^k es un ℓ_k -ciclo, o equivalentemente, \mathbb{Z}_{ℓ_k} es la única órbita periódica de h^k . Entonces:

Proposición 3 *Para todo (\mathcal{R}, I, G_0) -autómata F y $(\mathcal{R}, I, \tilde{G})$ -autómata H , con G_0 y \tilde{G} como arriba, existe $T : I^{\mathcal{R}} \rightarrow I^{\mathcal{R}}$ (lineal en sus coordenadas) tal que $H = T^{-1} \circ F \circ T$. Consecuentemente, los sistemas dinámicos discretos dados por F y H tienen la misma estructura de órbitas.*

Demostración : La demostración sigue inmediatamente a partir de la siguiente propiedad algebraica: para cualquier par de ℓ -ciclos τ_1, τ_2 de \mathbb{Z}_{ℓ} , existe una permutación η en \mathbb{Z}_{ℓ} tal que $\tau_1 = \eta^{-1} \tau_2 \eta$. ■

Debido a este resultado las aplicaciones acopladas sobre reticulados con condiciones periódicas de frontera se acostumbra a denominarse *autómatas celulares reales circulares*, o más simplemente *autómatas celulares reales*, ver por ejemplo [17]. Conviene decir que para estos $(\mathcal{R}, I, \tilde{G})$ -autómatas existe una descomposición semejante a la expresada en la proposición 2.

Es frecuente encontrar en la literatura matemática los autómatas celulares reales como modelos discretos intermediarios entre los autómatas celulares y

las ecuaciones diferenciales parciales. Como es conocido, las ecuaciones diferenciales parciales son usualmente empleadas para describir fenómenos en sistemas dinámicos espacio-temporales; sin embargo, el estudio analítico de sus soluciones presenta grandes dificultades metodológicas en sistemas con comportamiento complejo. Básicamente, los resultados en esta área están restringidos a encontrar algunas soluciones simples y estudiar su estabilidad o la estimación de la dimensión de sus atractores. Por otra parte, la simulación computacional ha sido usada como una efectiva y poderosa herramienta para estudiar formas discretas de estos sistemas complejos. Esta es una de las principales motivaciones para el empleo de los autómatas celulares reales.

Estos sistemas dinámicos expresados mediante un sistema de ecuaciones en diferencia con condiciones periódicas de frontera, pueden encontrarse en el estudio de fenómenos dinámicos en diferentes contextos, por ejemplo: aparecen en [2] para modelar competencia entre diferentes empresas en el marco de modelos económicos; en [7] se estudia la hiperbolicidad de autómatas celulares reales cuadráticos mostrándose la abertura y densidad de los mismos; H. L. Smith, ver [16], emplea estos sistemas dinámicos para estudiar aplicaciones competitivas con comportamiento caótico en el marco de modelos poblacionales; y en [17] los autómatas celulares reales son usados para describir fenómenos de bifurcación de aplicaciones logísticas acopladas con una influencia lineal de sus vecinos inmediatos.

4.6. Operadores de Toeplitz

En el contexto de la Teoría de Operadores en el Análisis Matemático aparece un interesante ejemplo de $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, G)$ -autómatas; se trata de los denominados operadores de Toeplitz. En realidad estos operadores no están definidos sobre todo el espacio de configuraciones $\mathcal{A}^{\mathcal{R}}$, y sí en subconjuntos de éste; por ejemplo en el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ cuando $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ y $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$.

Denotemos por \mathbb{T} el círculo unitario de \mathbb{C} . Dada una función $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la sucesión de sus coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Es bien conocido, ver [3] o [4], que para toda función $a \in L^\infty(\mathbb{T})$, el operador

$T_a : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definido, para cada $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, por

$$T_a(x) = y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \text{con } y_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} x_k,$$

es acotado. T_a se conoce como el operador de Toeplitz asociado a a , y la matriz $(a_{j-k})_{j,k=-\infty}^{+\infty}$ se llama matriz de Toeplitz. Es simple verificar que $\ell^2(\mathbb{Z})$ es invariante por la aplicación shift: $\sigma(x)(n) = x(n+1)$ con $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y $n \in \mathbb{Z}$; además, T_a conmuta con σ . Esto es, $\ell^2(\mathbb{Z})$ es un subshift de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y T_a es un $(\mathbb{Z}, \mathbb{C}, G)$ -autómata restringido a $\ell^2(\mathbb{Z})$, donde G es el grupo de las traslaciones en \mathbb{Z} .

Agradecimientos: Me gustaría agradecer a C. A. Di Prisco por sus comentarios sobre el tema. Es necesario mencionar también que el concepto extendido de autómata celular, y algunos tópicos abordados, provienen de las discusiones con los colegas J. Delgado, A. Rovella, F. Vilamajó y R. Vivas; todos con inquietudes intelectuales en el entorno de los autómatas celulares reales y la dinámica de endomorfismos.

Referencias

- [1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey. (1992), *On the Devaney's definition of chaos*, Amer. Math. Monthly. 332-334.
- [2] G. I. Bischi and L. Gardini. (2000), *Global Properties of Symmetric Competition Models with Riddling and Blowout Phenomena*. Discrete Dynamics in Nature and Society. **5**, 149–160.
- [3] A. Böttcher, S. M. Grudsky and B. Silbermann. (1997) *Norms of Inverses, Spectra, and Pseudospectra of Large Truncated Wiener-Hops Operators and Toeplitz Matrices*, New York J. Math. **3**, 1–31.
- [4] A. Bötcher and B. Silbermann. (1999) *Introduction to large truncated Toeplitz matrices*. Springer, New York.
- [5] L. Bunimovich. (1995), *Coupled map lattices: one step forward and two steps back*, Physica D. **86**, 248–255.
- [6] J. H. Conway. (1970), *Mathematical Games*, Sci. Amer. **223**, 120–123.

- [7] J. Delgado, N. Romero, A. Rovella and F. Vilamajó. (2003), *Hyperbolicity in Quadratic Real Cellular Automata*. Preprint.
- [8] C. A. Di Prisco. (2003), *Barreras y Canonización de Particiones*. Temas Avanzados de Teoría de Conjuntos. Preprint UCV.
- [9] C. A. Di Prisco and S. Todorcevic. (2003), *Remarks on shift preserving continuous functions*. Preprint IVIC.
- [10] L. Gray. (2003), *A Mathematician Looks at Wolfram's New Kind of Science*, Notices of AMS. **50(2)**, 200–211.
- [11] G. Hedlund. (1969), *Endomorphisms of the shift dynamical systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **3**, 320–375.
- [12] M. Hurley. (1990), *Attractors in cellular automata*, Ergodic Theory and Dynamical Systems. **10**, 131–140.
- [13] K. Kaneko, ed. (1993), *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. John Wiley & Sons Ltd, London.
- [14] K. Kaneko. (1989), *Pattern dynamics in spatiotemporal chaos*, Physica D. **34**, 1–41.
- [15] P. Rendell. (2001), *A Turing Machine in Conway's Game Life*. Preprint.
- [16] H. L. Smith. (1998) *Planar Competitive and Cooperative Difference Equations*. Journal of Difference Equations and Applications. **3**, 335–357.
- [17] J. Weitkämper. (1993), *A study of bifurcations in a circular real cellular automaton*, Int. Journal of Bifurcations and Chaos. **3(2)**, 293–321.
- [18] S. Wolfram. (1984), *Computation Theory of Cellular Automata*, Commun. Math. Phys. **96**, 15–57.
- [19] S. Wolfram. (1986), *Cellular Automata, Theory and Applications*, World Scientific.

NEPTALÍ ROMERO
UNIVERSIDAD CENTRO OCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO
DECANATO DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
APARTADO POSTAL 400. BARQUISIMETO, VENEZUELA
E-MAIL: nromero@uicm.ucla.edu.ve

HISTORIA

Władysław Orlicz (1903 - 1990) – matemático polaco –

conmemoración del centenario

Lech Maligranda

Władysław Roman Orlicz nació el 24 de mayo de 1903 en Okocim, una aldea en el distrito de Brzesko, provincia de Cracovia (en Galicia, Austria-Hungría – ahora Polonia). Sus padres, Franciszek y Maria Rossknecht de Orlicz, tuvieron cinco hijos. El padre murió cuando él tenía sólo cuatro años de edad.

En 1919 la familia de Orlicz se mudó a Lwów, donde él completó su educación secundaria y sus estudios de matemáticas, entonces estudiadas en la Universidad de Jan Kazimierz en Lwów, teniendo como maestros a Stefan Banach, Hugo Steinhaus y Antoni Łomnicki.

En los años 1922-1929 trabajó como asistente de enseñanza en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jan Kazimierz.

En 1928 recibió el grado de doctor presentando una tesis titulada “*Problemas en la teoría de las series ortogonales*” bajo la supervisión de Eustachy Żyliński. Ese mismo año se casó con Zofia Krzysik (nació: 26 septiembre 1898, Foča, Bosnia – murió: 5 noviembre 1999, Poznań, Polonia).

A fines de los años veinte y tempranos treinta, Orlicz trabajó como maestro en escuelas secundarias privadas y en una escuela militar.

El año académico 1929/30 Orlicz lo pasó en la Universidad de Göttingen como becario estudiando física teórica, no matemáticas. Durante su permanencia en Göttingen comenzó su colaboración con Zygmunt Wilhelm Birnbaum (también de Lwów). Ellos publicaron dos artículos en *Studia Mathematica* en 1930 y 1931 cuyos resultados llegaron a ser punto de partida para considerar e investigar, en 1932 y 1936, espacios de las funciones más generales que L^p , los espacios que llegaron a ser más tarde conocidos como *Espacios de Orlicz*.

Es importante destacar que, desde el punto de vista del análisis funcional, más precisamente, como espacios funcionales, la partida de nacimiento de los *espacios de Orlicz* es el artículo de Orlicz de 1932: *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, No. 8/9, 207-220, con una condición adicional en la función (la llamada condición Δ_2 para u grande), y en la generalidad completa, esto es, sin la condición Δ_2 , en 1936.



Lwów 1917, W. Orlicz (primero a la izquierda) con su madre y hermanos



Göttingen 1929



W. Orlicz con su esposa Zofia, 1945

En los años 1931-1937 Orlicz trabajó en Lwów en la Universidad Técnica. En 1934 le otorgaron la “habilitation” (*veniam legendi*) con la tesis “*Investigaciones de sistemas ortogonales*”.

Trabajando en Lwów, Orlicz tomó parte en las famosas reuniones en el Café Escocés (Scottish Café, Kawiarnia Szkocka) donde Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Stanisław Ulam, Stanisław Mazur, Marek Kac, Juliusz Schauder, Stefan Kaczmarz y muchos otros discutían problemas matemáticos y buscaban sus soluciones. El grupo ha ganado el reconocimiento internacional y ahora se le conoce como la *Escuela de Matemáticas* de Lwów (*Lwów School of Mathematics, Lwowska Szkoła Matematyczna*).

Una colección de 193 problemas matemáticos, resultado de las reuniones en el Café Escocés, apareció más tarde como el *Scottish Book*. Orlicz es el autor o co-autor de 14 problemas. Mencionemos que R. D. Mauldin redactó el libro “*The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café*”, Birkhäuser 1981, que contiene los problemas y los comentarios escritos por especialistas.

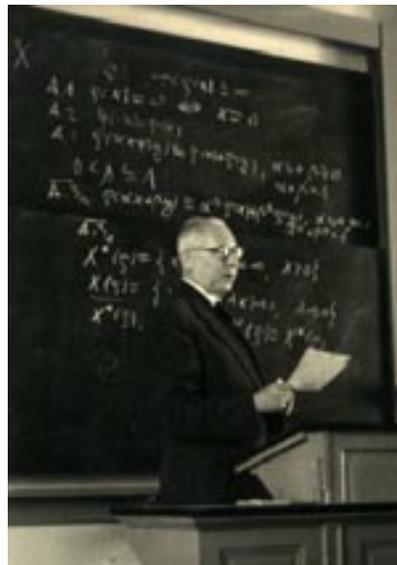
En 1968 cuándo presentaba los logros matemáticos de H. Steinhaus (en el artículo publicado en *Wiadom. Mat.* en 1969), Orlicz escribió:

“*Bajo la dirección de nuestros estimados maestros Banach y Steinhaus practicábamos complicaciones matemáticas en Lwów*”.

En 1937 Orlicz obtuvo una posición de profesor en la Universidad de Poznań (ahora Universidad de Adam Mickiewicz).

La Segunda Guerra Mundial Orlicz la pasó en Lwów. Era Profesor en la Universidad Estatal Iwan Franko (enero 1940 – junio 1941 y agosto 1944 – febrero 1945), maestro en la Escuela de Comercio (diciembre 1941 – agosto 1942) y la Escuela de Artesanías (octubre 1942 – enero 1943), y el conferencista en los Cursos del Bosque (febrero 1943 – junio 1944). En marzo 1945 Orlicz se repatrió a Polonia y en mayo 1945 volvió a la Universidad de Poznań.

En julio 1948 Orlicz fue promovido a Profesor Ordinario. Hasta su jubilación en 1974 trabajó en la Universidad de Poznań y en el Instituto Matemático de la Academia Polaca de Ciencias, rama de Poznań.



Halle 1961, Orlicz dictando una clase

Continuó su seminario “*Problemas Escogidos del Análisis Funcional*” hasta 1989. El seminario tuvo lugar cada miércoles a las doce y media en el Instituto Matemático. Orlicz se interesaba en el trabajo de otros matemáticos y en ramas lejanas del análisis funcional. A los participantes de su seminario y otros

interlocutores los llamaba con una frase característica “*Panie Kolego*” (esta frase viene del idioma alemán donde tiene una correspondencia exacta “Herr Kollege” pero en español es más difícil encontrar tal traducción; sin embargo traduzco como “*Señor Colega*”).

Orlicz colaboró con varios matemáticos. La colaboración con Mazur fue especialmente fructífera. Ellos escribieron una docena de artículos conjuntos y sus resultados son ahora clásicos. Cuándo en 1960 Hugo Steinhaus escribió acerca de Banach, recalcó que (cf. [1], p. 157; 257 y 242, respectivamente):

“*Mazur y Orlicz son alumnos directos de Banach; ellos representan la teoría de operadores de hoy en Polonia y sus nombres en la cubierta de “Studia Mathematica” indican la continuación directa del programa científico de Banach.*”

En total Orlicz publicó 171 artículos matemáticos, cerca de la mitad de ellos con la cooperación de varios autores. Fue supervisor de 39 disertaciones de doctorado y más de 500 tesis de licenciatura.

Orlicz tomó parte en los congresos de matemáticos en Oslo (1936), Edinburgh (1958), Stockholm (1962) y Warsaw (1983), y en muchas otras conferencias científicas. Fue invitado a universidades en Alemania, Canadá, China e Israel.

Su libro “*Análisis Funcional Lineal*”, Peking 1963, 138 págs (en chino), basado en una serie de conferencias dadas traducidas al alemán en temas escogidos del análisis funcional en el Instituto de Matemáticas de la Academia Sinica en Beijing en 1958, fue traducido también al inglés “*Linear Functional Analysis*” y publicado en 1992 por World Scientific, Singapur. Orlicz es también co-autor de dos libros de textos de escuela primaria.

Orlicz fue Redactor de *Commentationes Mathematicae* (1955–1990), y de *Studia Mathematica* (1962–1990), y Presidente de la Sociedad Matemática de Polonia (1977–1979).

En 1956 Orlicz fue elegido miembro correspondiente de la Academia Polaca de Ciencias y en 1961 miembro completo. Tres universidades (la Universidad de York en Canadá, la Universidad Técnica y Universidad de Adam Mickiewicz en Poznań) respectivamente, le otorgaron el título de doctor *Honoris Causa* en 1974, 1978 y 1983.

Orlicz recibió muchas altas condecoraciones del estado, premios, así como también medallas de instituciones y sociedades científicas, incluso el Premio Stefan Banach de la Sociedad Matemática de Polonia (1948), la Cruz Dorada del Mérito (1954), la Cruz de Comandante de la Orden de Polonia Restituta (1958), la Asociación Honoraria de la Sociedad Matemática de Polonia (1973), el Premio Alfred Jurzykowski (1973), la Orden de Maestro Distinguido (1977), Medalla de Copernicus de la Academia de Ciencias Polaca (1973), “Medalla de Waclaw Sierpiński” de la Universidad de Varsovia (1979), la Medalla de la Comisión para la Educación (1983), el premio Individual del Estado (en el grado II - en 1952 y en grado I - en 1966).

La contribución de Orlicz es esencial en las siguientes áreas matemáticas: los espacios de funciones (principalmente *espacios de Orlicz*), series ortogonales, convergencia incondicional en espacios de Banach, sumabilidad, funciones a valores vectoriales, los espacios localmente convexos métricos, los espacios de Saks, las funciones reales, la teoría de la medida y la integración, operadores polinómicos y espacios modulares.

Los **espacios de Orlicz** $L^\varphi = L^\varphi(\Omega, \Sigma, \mu)$ son espacios de Banach que consisten de los elementos $x \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ tales que $\int_\Omega \varphi(\lambda|x(t)|)d\mu(t) < \infty$ para algún $\lambda = \lambda(x) > 0$ con la *norma de Orlicz*:

$$\|x\|_\varphi^0 = \sup \left\{ \int_\Omega |x(t)y(t)|d\mu(t) : \int_\Omega \varphi^*(|y(t)|)d\mu(t) \leq 1 \right\},$$

donde $\varphi^*(v) = \sup_{u \geq 0} \{uv - \varphi(u)\}$, o la *norma de Luxemburg - Nakano*:

$$\|x\|_\varphi = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \varphi(|x(t)|/\lambda)d\mu(t) \leq 1 \right\}.$$

Los *espacios de Orlicz* L^φ son una generalización natural de los espacios L^p , y tienen una estructura topológica y geométrica muy rica; pueden poseer propiedades raras que no tienen los espacios L^p ordinarios. Las ideas de Orlicz han inspirado a muchos matemáticos. En décadas recientes estos espacios se han usado en análisis, teoría constructiva de funciones, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, probabilidad, estadística matemática, etc. (cf. monografías en espacios de Orlicz: M. A. Krasnoselskiĭ and Ya. B. Rutickii, “*Convex Functions and Orlicz Spaces*” Groningen 1961; J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, “*Classical Banach Spaces I, II*”, Springer 1977, 1979; C. Wu and T. Wang, “*Orlicz Spaces and their Applications*”, Harbin 1983 (chino); A. C. Zaanen, “*Riesz Spaces II*”, North-Holland 1983; C. Wu, T. Wang, S. Chen and Y. Wang “*Theory of Geometry of Orlicz Spaces*”, Harbin 1986 (chino); L. Maligranda, “*Orlicz Spaces and Interpolation*”, Campinas 1989; M. M. Rao and Z. D. Ren, “*Theory of Orlicz Spaces*”, Marcel Dekker 1991; S. Chen, “*Geometry of Orlicz Spaces*”, Dissertationes Math. 356, 1996; and M. M. Rao and Z. D. Ren, “*Applications of Orlicz Spaces*”, Marcel Dekker 2002).

El término “*espacios de Orlicz*” (*Orlicz spaces*) apareció ya en los sesenta en las Matemáticas en el índice de la clasificación de materias de la Sociedad Matemática Americana en la Sección **4635**, que es ahora **46E30**: *Espacios de funciones medibles (espacios L^p , espacios de Orlicz, etc.)* [*Spaces of measurable functions (L^p -spaces, Orlicz spaces, etc.)*].

Para recalcar la importancia de los espacios de Orlicz, en una manera jocosa, el Profesor Orlicz dijo que cuando a él le preguntaron ocasionalmente:

¿Por qué son “*mejores*” los espacios de Orlicz que los espacios L^p ?

El contestó:

Dígame primero ¿por qué los espacios L^p son “mejores” que L^2 ?

Anécdota (en conexión con espacios de Orlicz) : El Profesor Orlicz tenía un apartamento pequeño y él solicitó una vez a la administración de la ciudad uno más grande. La respuesta del empleado fue:

Su apartamento es realmente pequeño pero nosotros no podemos aceptar su reclamo ya que sabemos que usted tiene sus propios espacios !

El nombre de Orlicz se asocia no sólo con los espacios de Orlicz sino también con el teorema de Orlicz-Pettis, la propiedad de Orlicz, teorema de Orlicz de la convergencia incondicional en L^p , teorema de Mazur-Orlicz de consistencia, teorema de Mazur-Orlicz sobre desigualdades, teorema de Mazur-Orlicz sobre la acotación uniforme en espacios F, teorema de la categoría de Orlicz, teorema de interpolación de Orlicz, la norma de Orlicz, la función de Orlicz, convexidad en el sentido de Orlicz, la norma F de Mazur-Orlicz, teorema de Drewnowski-Orlicz sobre la representación integral de funcionales ortogonales y modulares, teorema de Orlicz en multiplicadores de Weyl, los índices de Matuszewska-Orlicz, los espacios de Hardy-Orlicz, los espacios de Marcinkiewicz-Orlicz, los espacios de Musielak-Orlicz, los espacios de Orlicz-Sobolev y los espacios de Orlicz-Bochner.

El teorema de Orlicz-Pettis dice que, en espacios de Banach, las clases sub-series débilmente convergentes e incondicionalmente convergente en norma, coinciden. El teorema de Orlicz de la convergencia incondicional en L^p establece que, si $1 \leq p < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es incondicionalmente convergente en L^p , entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^{\max(p, 2)} < \infty$.

En 1988, en la ocasión del 85 cumpleaños de Orlicz, los Editores Científicos Polacos (PWN) publicaron la recopilación de los artículos de Orlicz, *Artículos Completos* [5], en dos volúmenes (1754 páginas) reproduciendo 141 de sus papeles de 1926 a 1985.

K. Kuratowski [2, P. 40] ha escrito sobre la creación de la *Escuela Polaca de Matemáticas* que:

“El análisis funcional le debe su magnífico desarrollo a Banach y sus estudiantes, especialmente a Mazur, Orlicz y Schauder”.

Los logros científicos de Orlicz son presentados con todo detalle en los artículos de Maligranda y Matuszewska [4], Maligranda y Wnuk [9], y Maligranda [10]. El artículo [9] contiene una lista completa de publicaciones de Orlicz (171 artículos y 3 libros).

Orlicz dijo una vez:

“Las matemáticas son un flujo libre de los pensamientos y los conceptos que un matemático, en la misma manera como un músico hace con los tonos de la música y un poeta con palabras, pone juntos en teoremas y teorías”.

A finales de los setenta Orlicz comenzó a reunir información sobre los matemáticos de Lwów y planeaba escribir un libro de la historia de la Escuela de Matemáti-

cas de Lwów (publicó sólo dos artículos de divulgación: *Escuela de Matemáticas de Lwów entre las Guerras*, *Wiadom. Mat.* 23 (1981), 222-231, y *Los Logros de Matemáticos Polacos en Análisis Funcional en los Años 1919-1951*, y breves biografías de S. Banach, S. Kaczmarz, A. Lomnicki, S. Mazur, J. P. Schauder). Es una verdadera lástima que él no llevó a cabo ese proyecto.



W. Orlicz en sus setentas



W. Orlicz en su 80 cumpleaños



Poznań 1987. W. Orlicz en la biblioteca del Instituto de Matemáticas de la Academia Polaca de Ciencias

Orlicz murió el 9 de agosto de 1990 en Poznań cuando corrigió las pruebas de galera de su último artículo aceptado para publicación en *Mathematica Japonica*.

Tres conferencias se organizaron a la memoria de Władysław Orlicz: *Conferencia Conmemorativa de Orlicz* [*Orlicz Memorial Conference*] (21–23 marzo, 1991) por La Universidad de Mississippi en Oxford, los Estados Unidos de América; *Espacios Funcionales V* (28 de agosto – 2 septiembre, 1998) por la Universidad de A. Mickiewicz en Poznań, Polonia (artículo [8] apareció en las memorias de esta conferencia); y la *Sesión Científica en la Memoria de Profesor Władysław Orlicz* (27–29 septiembre, 2000) por la Universidad de A. Mickiewicz y el Instituto de Matemáticas de la Academia Polaca de Ciencias en Będlewo, Polonia (las memorias incluyen el artículo [10] con alrededor de cuarenta fotos de Orlicz).

Para finalizar, ¿hay alguna conexión venezolana con Orlicz? Una respuesta podría ser que varios matemáticos en Venezuela (D. Bárcenas, M. Cotlar, V. Echandía, C. E. Finol y N. Merentes) han dedicado parte de su trabajo en áreas donde Orlicz fue pionero. La otra es que las personas más involucradas en mi trabajo en Venezuela (1987–1991, en IVIC y en UCV) fueron Orlicz y C. E. Finol. Durante este período supervise a tres estudiantes de postgrado. Dos de ellos Alexi Quevedo y Jesús Gasch, concluyeron sus tesis doctorales en 1990 y 1994, respectivamente.



Poznań 1989. De izquierda a derecha: Carlos Finol (UCV, Caracas, Venezuela), Francisco Hernández (Universidad Complutense de Madrid, España), Władysław Orlicz (Academia Polaca de Ciencias, Polonia), Lech Maligranda (entonces IVIC–UCV, Caracas, Venezuela, ahora en la Universidad Tecnológica de Luleå, Suecia), Witold Wnuk (Universidad de Adam Mickiewicz, Poznań, Polonia)

Agradecimientos. Gracias a Carlos Finol por correcciones de mi español durante el tiempo que visité la UCV en febrero 2002.

Referencias:

1. H. Steinhaus, *Stefan Banach*, Nauka Polska 8, No. 4(1960), 150–195; *Wiadom. Mat.* 4(1961), 251-259; Impreso en: “*La matemática media entre el espíritu y la materia*”, PWN, Warszawa–Wrocław 2000, 236-244 (en polaco).
2. K. Kuratowski, *A half century of Polish mathematics*, Remembrances and reflections, PWN and Pergamon Press, Warszawa 1980, 208 pp. (en polaco: *Pół wieku matematyki polskiej 1920-1970*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1973). MR 83f:01027
3. W. Matuszewska, *Władysław Orlicz – A review of his scientific work*, *Commentationes Math. Tomus Specialis in Honorem Ladislai Orlicz*, Vol. I, 1978, 1-17. MR 80a:01035
4. L. Maligranda and W. Matuszewska, *A survey of Władysław Orlicz’s scientific work*, In: *Władysław Orlicz Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, xv–liv.
5. *Władysław Orlicz Collected Papers. I, II*, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988, 1754 pages. MR 89i:01141
6. *Władysław Orlicz: 24 May 1903 – 9 August 1990*, *Studia Math.* 97(1990), No. 2, ii-iv. MR 91i:01136
7. L. Maligranda and W. Wnuk, *Władysław Orlicz (1903-1990)*, *Nauka Polska* 3(1992), 187-193 (en polaco).
8. L. Maligranda and W. Wnuk, *Władysław Orlicz: his life and contributions to mathematics*, In: *Function Spaces*, *Lecture Notes in Pure and Applied Math.* 213, Marcel Dekker, New York-Basel 2000, 23–29.
9. L. Maligranda and W. Wnuk, *Władysław Orlicz (1903-1990)*, *Wiadom. Mat.* 36 (2000), 85–147 (en polaco). MR 2001k:01059
10. L. Maligranda, *Władysław Orlicz (1903-1990) – Su vida y sus contribuciones a la matemática*, En: “*Władysław Orlicz – Fundador de la Escuela de Matemáticas de Poznań*”, Editor Científico, Universidad de Adam Mickiewicz, Poznań 2002, 33–80 (en polaco).
11. L. Maligranda, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, En: “The MacTutor History of Mathematics archive-Biographies”: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Orlicz.html>

LECH MALIGRANDA
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
LULEÅ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
SE-971 87 LULEÅ, SWEDEN
e-mail: lech@sm.luth.se
http://www.sm.luth.se/~lech/

MATEMÁTICAS RECREATIVAS

Sumando la Derivada de la Serie Geométrica

Lyonell Boulton y Mercedes H. Rosas

1. Introducción

Jacobo Bernoulli (1654 – 1705) publica *Tractatus de Seriebus Infinitas* en 1689. En esta obra, el primero de la dinastía de los Bernoulli, demostrará la divergencia de la serie armónica y estudiará la noción de convergencia. También conseguirá la suma de unas pocas series, logrando reducirlas a geométricas y telescópicas.

Pese a todo el desarrollo que ha sufrido la matemática desde finales del siglo XVII, no son muchas las series que podemos sumar de manera exacta. En su *Tractatus*, Bernoulli plantea lo que se conocerá posteriormente como el “problema de Basilea”: Se desea conocer la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales. La historia de la solución de este problema coincide con una época de grandes cambios en la manera de concebir las matemáticas.

En el otoño de 1666 el joven Isaac Newton (1643 – 1727) inventa el cálculo matemático. Un año antes ha probado su famoso teorema del binomio. Newton guardará celosamente sus resultados. No es sino hasta el año de 1687 que publicará *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (o *Principia Matemática* como se le conoce actualmente), y esperará hasta 1711 para publicar *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones*. A partir de 1675 el filósofo y matemático Gottfried Leibniz (1640 – 1716) desarrolla el cálculo de manera independiente de Newton. Al contrario de éste, Leibniz decide comunicar sus resultados, publicándolos en 1684, y es gracias al segundo que las academias de finales del siglo XVII comienzan a hacer uso de esta poderosa herramienta.

En 1705 muere Jacobo Bernoulli sin conocer la solución al problema de Basilea y sin ver publicada su obra, *Ars Conjectandi*, un tratado donde desarrolla la teoría de probabilidades, el cual aparece posteriormente en 1713. El problema de Basilea intriga a grandes matemáticos de la época como Johann y Daniel Bernoulli, Leibniz, Stirling y de Moivre. Todos ellos tratan de resolverlo, sin éxito. En el año de 1731, un joven estudiante del hermano de Jacobo, Johann Bernoulli (1667 – 1748), sorprende a su maestro con una solución muy ingeniosa. Leonhard Euler (1707 – 1783) demuestra que el problema de Basilea tiene solución $\pi^2/6$, utilizando las funciones simétricas. En 1748 Euler publicará *Introductio in Analysin Infinitorum*, en donde revoluciona el cálculo matemático al definir el concepto de función y estudiar de manera sistemática sus expansiones en series.

Hoy en día, las nociones de derivada y expansión en series de una función, permiten hallar la suma exacta de series infinitas como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} \quad \text{donde } p = 0, 1, 2, \dots$$

Para el caso $p = 0$, no tenemos otra cosa que la serie geométrica evaluada en $1/2$. Para $p > 0$, lo que tenemos es el término principal de la derivada de ésta, evaluado en ese mismo punto. Para hallar la suma, debemos derivar p veces a $1/(1 - z)$, aislar el término principal de manera que sólo dependa de series del mismo tipo con potencias p de menor orden, y luego evaluar en $z = 1/2$. Sin embargo, como hemos comentado, esta forma de proceder no se inventó sino hasta mediados del siglo XVIII.

A continuación mostramos —haciendo un ejercicio de imaginación— que es posible sumar estas series con las herramientas matemáticas desarrolladas hasta 1689, sin incluir las ideas del cálculo. Es decir, es perfectamente plausible que Jacobo Bernoulli hubiese podido sumar de manera exacta estas series. Se sabe que ciertamente resolvió los casos $p = 0$ y $p = 1$, pero no se sabe de ninguna fuente que indique que conocía la solución para los otros casos.

2. Las tres primeras derivadas de la serie geométrica

Comencemos con el caso $p = 0$. El famoso papiro de Rhind, actualmente en el British Museum de Londres, muestra que ya los egipcios sabían cómo sumar la serie geométrica. Hoy en día conocemos varias maneras de hacer esto. Por ejemplo, el siguiente dibujo ilustra a un rectángulo de área uno. Si lo descomponemos como una unión de rectángulos más pequeños, podemos calcular su área, sumando el área de cada uno de los pedazos, [2],

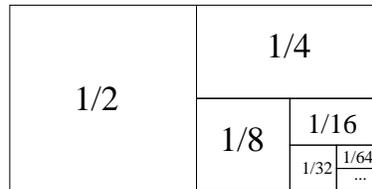


Figura 1:

Ambos resultados han de ser iguales, así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

Ahora que sabemos cómo sumar la serie geométrica, podemos intentar hacer lo mismo con su derivada, [1]. Deseamos encontrar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Para ello, cada sumando de esta serie puede ser colocado en las filas del siguiente arreglo cuya suma se puede calcular de manera sencilla hallando la suma de cada columna:

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{1/2} & & & \\
 \boxed{1/4} & \boxed{1/4} & & \\
 \boxed{1/8} & \boxed{1/8} & \boxed{1/8} & \\
 \boxed{1/16} & \boxed{1/16} & \boxed{1/16} & \boxed{1/16} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 = 1 & + 1/2 & + 1/4 & + 1/8 + \dots = 2
 \end{array}$$

Figura 2:

Obtenemos así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots = 2.$$

Veamos qué podemos hacer ahora para sumar la segunda derivada de la serie geométrica. Ahora debemos hallar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \dots \tag{1}$$

Para esto construimos una pirámide como la que ilustra la figura 4, a base de cubos del mismo tamaño, y tales que el peso de los cubos en cada nivel, es la mitad del peso de los del nivel superior. El tope de esta pirámide pesa media unidad. Para calcular cuánto suma la serie (1), debemos conseguir el peso total de la pirámide. La pared exterior pesa

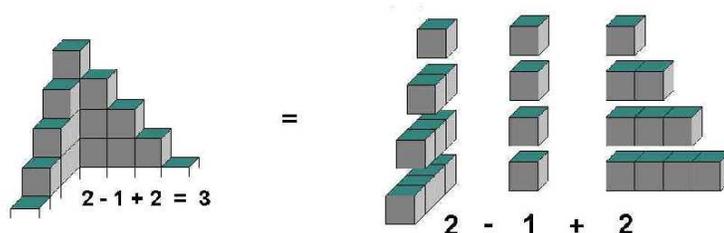
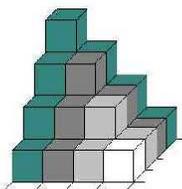


Figura 3:

Si descomponemos nuestra pirámide por capas como lo indican los colores de la siguiente figura,



$$3 + 3/2 + 3/4 + 3/8 + \dots = 6$$

Figura 4:

concluimos que la serie (1) suma 6.

Ahora, si fuese nuestra intención sumar la tercera derivada de la serie geométrica utilizando el mismo procedimiento, tendríamos que saber dibujar en cuatro dimensiones. Como no es el caso, una pequeña modificación del argumento anterior nos permitirá quedarnos dentro del espacio de tres dimensiones.

Queremos demostrar que

$$\frac{1}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \frac{4^3}{2^4} + \dots = 26. \quad (2)$$

Para esto construimos una pirámide como la que ilustra la figura 6, a base de cubos cuyo peso disminuye a la mitad siempre que bajamos un nivel. El peso

total de esta pirámide corresponde con la suma de la serie (2). El peso de la pared exterior es 10:

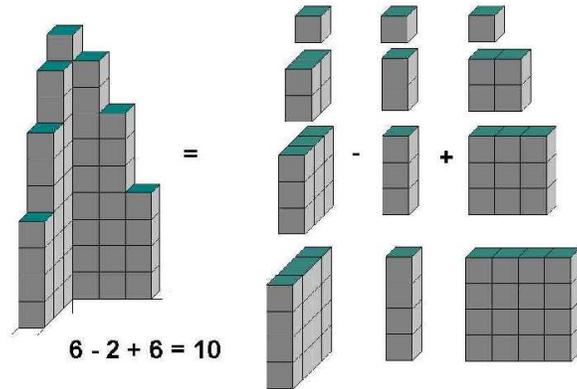


Figura 5:

Las tapas superiores de cada nivel deben ser pesadas por separado, recordando que ya la pared exterior ha sido tomada en cuenta. Esto se logra formando con estos cubos una nueva pirámide como la ya utilizada en la figura 3, teniendo en cuenta que el tope ahora comienza pesando $1/4$. En consecuencia la suma total de la serie (2) es

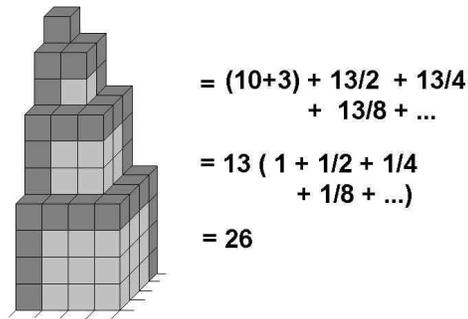


Figura 6:

3. Derivadas de orden superior

Deseamos ahora construir argumentos del mismo estilo, para hallar la suma de las derivadas de orden superior de la serie geométrica. Es decir, queremos hallar

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2^p}{2^2} + \frac{3^p}{2^3} + \dots$$

donde $p = 4, 5, \dots$ Para ello procedemos de manera análoga al caso $p = 1$ ya discutido, pero cambiando convenientemente el peso de cada cuadrado. Por ejemplo, para $p = 2$, tenemos

1/2			
2/4	2/4		
3/8	3/8	3/8	
4/16	4/16	4/16	4/16

Figura 7:

Sumando por columnas, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+k}{2^{n+k}} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+k}{2^{n+k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^{n+k}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \\ &= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Se puede observar que el arreglo de la figura 7 no es más que una proyección al plano de la pirámide construida en la figura 4, donde cada casilla indica la suma del peso de los bloques en dirección perpendicular a la proyección.

Queremos generalizar este argumento para $p+1 = 4, 5, \dots$ Para esto debemos considerar los arreglos descritos en la siguiente figura

$1^p/2$			
$2^p/4$	$2^p/4$		
$3^p/8$	$3^p/8$	$3^p/8$	
$4^p/16$	$4^p/16$	$4^p/16$	$4^p/16$

Figura 8:

cuya suma de nuevo se obtiene calculando por separado el peso de cada columna. Asumimos, por inducción, que sabemos calcular la suma de las derivadas de orden menor o igual a p , y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+1}}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)^p}{2^{n+k}} + \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k)^p}{2^{n+k}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} n^{p-j} k^j \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^j}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p-j}}{2^n}.
 \end{aligned}$$

Esto proporciona una manera recursiva de calcular las sumas de las derivadas p -ésimas de la serie armónica. Si

$$\begin{aligned}
 S(p) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} \quad \text{y} \quad S(1) = 1, \\
 S(p+1) &= S(p) + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} S(j) S(p-j).
 \end{aligned}$$

Por ejemplo para el caso $p+1 = 3$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} = 6 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 26,$$

lo que confirma nuestra cuenta anterior, y éste permite hallar el caso $p + 1 = 4$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} = 26 + 1 \cdot 26 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 2 + 26 \cdot 1 = 150.$$

Es interesante observar que, así como sucedió para $p = 2$, cada arreglo en los casos $p = 3, 4, \dots$ corresponde a la proyección plana de una pirámide en el espacio $p + 2$ dimensional formada por cubos $(p + 1)$ -dimensionales, y que el peso de cada casilla corresponde a la suma del peso de los cubos en dirección perpendicular a la proyección.

4. Preguntas y comentarios

Hemos obtenido la siguiente sucesión de números naturales 1, 2, 6, 26, 150, 1082, 9366, 94586, 1091670, 14174522, 204495126, ... Es imposible evitar preguntarse: ¿Qué cuentan estos números? La respuesta podemos encontrarla en la página de N.J.A. Sloane:

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html>

Visitando esta página en la internet, e introduciendo los primeros valores de la sucesión 1, 2, 6, 26, 150, \dots , el lector encontrará referencias acerca de la siguiente información. La recursión $S(p)$, cuenta el número de collares que se pueden construir con un conjunto de p de perlas etiquetadas. Además $S(p)$ es el número de secuencias de cuantificadores de primer orden, lógicamente diferentes, en las cuales ocurren p variables. También se puede probar que estos números son coeficientes de las expansiones en serie de potencias centradas en el origen de $-\ln(2 - e^x)$ y de su derivada $e^x/(2 - e^x)$.

Dejamos al lector las siguientes preguntas que nos parecen de interés general:

¿El argumento geométrico empleado servirá para calcular la suma de alguna otra serie?

¿Es posible hallar la suma de la derivada de la serie geométrica utilizando argumentos que involucren a la pirámide de la figura 4 con cada uno de sus cubos pesados de manera conveniente?

En este caso, ¿qué interpretación geométrica tendría esta manera de proceder?

5. Nota Final

La referencia histórica de la sección introductoria fue tomada del libro [1], cuya lectura recomendamos. Algunos detalles adicionales, como la información del papiro de Rhind, fueron obtenidos de la página de Historia de la Matemática de la Universidad de Saint Andrews:

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history>

También se puede encontrar información sobre este papiro en la página oficial del British Museum de Londres

<http://www.thebritishmuseum.ac.uk/>

Queremos agradecer a Argimiro Arratia por sus muy útiles sugerencias y a Nerio Borges por su interés en este trabajo.

Referencias

- [1] Dunham, William, Euler: The master of us all. The Dolciani Mathematical Expositions, 22. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.
- [2] Roger B. Nelsen, Proof without words II, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000.

L. BOULTON, M. ROSAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR, VENEZUELA.
lboulton@ma.usb.ve, mrosas@ma.usb.ve

INFORMACIÓN NACIONAL

Lázaro Recht, premio Lorenzo Mendoza Fleury 2003 otorgado por la Fundación Polar

Eduardo Lima de Sá

Para comenzar quiero agradecer a la Fundación Polar el haberme invitado a participar en el proceso de selección de la décimo primera edición del premio Lorenzo Mendoza Fleury. Fue una experiencia enriquecedora y sumamente agradable, un proceso muy bien organizado en el cual se nota la experiencia y seriedad de los organizadores, desde la presidente de la Fundación, la señora Leonor Mendoza, su gerente general, Graciela Pantin, y las tres personas con las cuales tuvimos contacto más directo, el coordinador, Renato Valdivieso, el maestro Virgilio Urbina y la siempre alegre y colaboradora, Constanza. Gracias a todos.

Lázaro Recht nació en Buenos Aires hace casi 62 años. Sus padres emigraron de Polonia a Argentina en los años 20, se conocieron y casaron en Buenos Aires. Lázaro tiene una hermana menor que vive en esa ciudad. El padre trabajaba como tornero y después de su matrimonio montó su propio taller, en el cual ayudaba su esposa y, a veces, Lázaro. Hizo la secundaria en el liceo Nicolás Avellaneda, donde también estudiaron otros muchachos que luego fueron matemáticos, entre ellos, Horacio Porta y Ángel Larotonda. Cuando era adolescente leyó algunos escritos de Einstein que lo impactaron mucho y pensó dedicarse a la Física. Descubrió que para ello era necesario aprender primero matemáticas. Jamás salió de ella, aunque ha estudiado Física, especialmente Mecánica y Relatividad y diseñó los cursos de Matemática de la Física de la USB.

Estudió en la Universidad de Buenos Aires, de 1958 a 1963 en una época muy romántica y efervescente. Se sentía aún las consecuencias de la renovación ocurrida luego de la caída de Perón, cuando salieron aquellos cuyo mérito principal era tener el carnet peronista y regresaron algunos de los que se habían ido e ingresaron otros, jóvenes, bien preparados y con gran entusiasmo. Cuando le faltaba poco para graduarse tuvo que cumplir el servicio militar, recluido durante más de seis meses en un cuartel. De esa época tiene varias anécdotas; le gusta contar como cambió su calidad de vida en el cuartel, luego de que enseñó, primero a un soldado y luego a su capitán, un método fácil y rápido para calcular la raíz cuadrada de un número, el método de Newton.

Luego de graduarse, comenzó a trabajar como profesor ayudante y al poco tiempo inició el doctorado bajo la dirección de Rodolfo Ricabarra, quien tendría una gran influencia sobre su visión de la matemática y sobre su vida. La Universidad de Buenos Aires gozaba de un enorme prestigio y estaba confiada y

tranquila, a pesar de la naciente dictadura. En 1966 Lázaro y Noemí Rosenblit habían decidido casarse y comprar una casa. Esa tranquilidad y esos planes se vieron violentamente destruidos en la “noche de los bastones largos”. La universidad fue invadida, los soldados fueron dispuestos en dos filas paralelas y los miembros de la comunidad tenían que salir entre ellas mientras los soldados le caían a palos. En esos días estaba de visita un matemático norteamericano, Warren Ambrose, del MIT. También fue maltratado y a su regreso a USA armó un revuelo en el medio académico y en el New York Times, logrando un fuerte apoyo para ayudar a matemáticos y otros científicos argentinos. En particular, convenció a Lázaro, a quién ya en visitas anteriores había tratado de atraer, de que fuera al MIT a hacer su doctorado. En Setiembre del 66 llegó Lázaro a MIT junto con otros cuatro jóvenes matemáticos argentinos. En noviembre se le unió Noemí, alquilaron un pequeño apartamento en Boston y se casaron. Allí nacieron dos hijas, Judith e Isabel. Tres años después, en 1969, obtuvo su PhD bajo la dirección de Donald Anderson. La situación argentina no mejoraba y la familia Recht se quedó en Boston. Lázaro ingresó al departamento de Matemáticas de la Universidad de Massachussets en Boston como profesor asistente con posibilidades de ingresar al escalafón (“tenure track”). Al cabo de un año lo visitó Ricabarra y le habló de la posibilidad de ir a Venezuela, a la UCV. En unos meses se hicieron todos los arreglos, pero la UCV fue intervenida y estuvo prácticamente cerrada durante un año. De todas maneras vino a Caracas pues en enero de 1971 lo contrató la Universidad Simón Bolívar. Unos años después, a pesar de que la situación argentina había mejorado un poco, Lázaro y Noemí decidieron quedarse definitivamente en Venezuela. La situación en Argentina se tornó insostenible de nuevo y Ricabarra que había regresado, volvió a Venezuela y decidió establecerse en Mérida, donde murió hace algunos años. En 1984 murió Noemí, luego de una corta pero penosa enfermedad y Lázaro se quedó solo con sus hijas. En 1988 se casó con Claudia Clemares, su actual compañera. De este matrimonio nacieron dos hermosas hijas, Sara y Emilia.

Permítanme ahora decir algo sobre el quehacer matemático de Lázaro. Luego de un trabajo con Horacio Porta y su tesis de doctorado en 1969, Lázaro no publicó ningún artículo durante 11 años. Eso se debió, en parte, a la influencia de Ricabarra para quién lo importante era entender, aprender y tener una visión global y geométrica de las distintas áreas de la matemática. Durante ese tiempo Lázaro estudió varios temas ampliando su visión y participando activamente en el seminario de Topología de la UCV y en los diversos seminarios del departamento de Matemáticas de la USB. A finales de los 70 comenzó a trabajar con Horacio Porta y en 1980 apareció una primera versión en español de su trabajo seminal de Teoría de Morse sobre fibrados, publicado dos años más tarde en *Advances in Mathematics*. A partir de entonces, Lázaro y Horacio colaboran estrechamente y publican una serie de trabajos donde se aplican ideas geométricas globales a problemas de Análisis Funcional. A finales de los 80 se

les unió un joven matemático argentino, Gustavo Corach. Con él producen otra serie de trabajos. Entre Lázaro y Horacio y luego con Gustavo, han publicado alrededor de 24 trabajos. Para dar una idea de la contribución de Lázaro, leo un comentario que me envió Gustavo: Los temas en los que hemos trabajado tienen siempre una faz geométrica y un contexto de análisis funcional. De alguna manera, Lázaro hacía la geometría y Horacio y yo nos ocupábamos del análisis y de las aplicaciones. Sin reparos puedo decir que la innovación que introdujimos estudiando esos temas tiene interés precisamente por la visión geométrica, a veces de resultados ya conocidos o inclusive clásicos. Por ello, puedo afirmar que la tarea de Lázaro en el grupo fue esencial y generalmente las motivaciones surgían de él.

Desde hace años, Lázaro visita Buenos Aires durante las vacaciones escolares en Venezuela. De esas visitas han surgido otros colaboradores y trabajos. Por un lado, E. Andruchow, D Stojanov y A. Larotonda y por otro, J. Pejsachowicz, radicado en Torino, Italia con quien ha publicado varios artículos junto con P. Fitzpatrick. También ha trabajado con jóvenes matemáticos venezolanos, formados en la USB y con doctorado en el exterior. Entre ellos, Pedro Berrizbeitia, Carlos Durán, Luis Mata y Santiago Simancas. Actualmente trabaja con Luis Mata y Carlos Durán en Geometría métrica en espacios homogéneos. Su primer trabajo en esa área acaba de ser aceptado y quiero compartir con ustedes mi traducción de la parte final de la opinión de uno de los árbitros: En resumen, este es un artículo sustancial en geometría infinito-dimensional con resultados significativos y aplicaciones interesantes. Sus conceptos y resultados seguramente generarán actividades de investigación en situaciones más generales, tales como álgebras de operadores de Jordan débilmente cerrados. Este trabajo es por lo tanto fuertemente recomendado para su publicación en *Advances in Mathematics*. Lázaro ha ayudado a la formación de varios estudiantes de la USB, entre ellos recuerdo a Pedro Berrizbeitia, Luis Mata, Santiago Simancas, Juan Carlos Álvarez, Carlos Duran, Emmanuel Fernandes. Ninguno de ellos hizo tesis con él, todos obtuvieron su doctorado afuera y están activos en investigación, unos en Venezuela y otros en el extranjero. A pesar de estar oficialmente jubilado, Lázaro sigue viviendo en la USB, muy activo tanto en investigación como en docencia, además de desarrollar una fuerte actividad en la Asociación de Profesores. Merece especial atención el hecho de que esté a cargo de los cursos de honor de Matemáticas I, II y III (primer año), en los cuales se inscriben estudiantes con especial talento matemático. Estos cursos tienen un nivel más alto y son más exigentes que los cursos regulares. De esos grupos, seguramente, saldrán algunos de los futuros matemáticos venezolanos.

Quisiera por último referirme a otros aspectos de la personalidad de Lázaro Recht. Tiene una amplia cultura, que comienza por su conocimiento y manejo de varios idiomas. Además de Yiddish, el idioma de su casa, y el español de toda su vida, maneja el alemán porque se parece al Yiddish, por la poesía, los lieders,

Goethe, Schiller, Heine y Thomas Mann; el italiano por la ópera; el francés, tal vez por la matemática, por Dumas, Camus, Sartre y Simone de Beauvoir; el lunfardo, por el tango; y, por supuesto, el inglés. En la Simón Bolívar aprendió latín de su amigo, el recordado filósofo Ángel Capelletti lo cual le permite leer a los clásicos y entender mejor otros idiomas. De Juan Tolosa aprendió luego ruso. Cuando en 1963 se iniciaba como profesor, entre sus estudiantes de las clases prácticas estaba un ingeniero que quería aprender matemática. Héctor Pirotsky era, además, músico. Llegaron al acuerdo de que Héctor le enseñaría música a Lázaro y éste matemática a Héctor. Durante más de dos años se reunieron todos los sábados. En muchas ocasiones esos encuentros eran seguidos por actuaciones del conjunto de Pirotsky. Lázaro aprendió música. Pirotsky, no contento con eso, le dijo que la música no sólo era para escuchar o estudiar, había que hacerla y vivirla. Lázaro tenía que aprender algún instrumento. Luego de algunos intentos con la flauta, decidieron que su instrumento sería la voz. Lázaro canta desde entonces. En un coro argentino en MIT, en el orfeón universitario de la USB, en un conjunto de música renacentista cada vez que va a Buenos Aires y desde hace ocho años en un conjunto vocal compuesto en su mayoría por matemáticos y computistas de la USB, el grupo Garúa. En 1972, la primera vez que regresó a Buenos Aires, se enteró con mucha tristeza del suicidio de Pirotsky. Su vida estudiantil durante la renovación de la universidad argentina y su forzada emigración alimentaron su deseo de protesta, su oposición al poder. Esas ideas encontraron fuerte eco en una serie de lecturas que formaron su manera de ver la vida, su confesado anarquismo y su honestidad intelectual. Particularmente Mihail Bakunin y Pëtr A. Kropotkin. Es también ávido lector y admirador de ese gran intelectual norteamericano, Noam Chomsky. La oposición de Lázaro a toda forma de dominio sobre los demás, a todo tipo de gobierno controlador o líder que quiera marcar el rumbo de otros, su enorme respeto hacia la opinión y el valor de los demás y su descarnada franqueza, hacen que su sensibilidad y su disposición de ayudar no sean tan aparentes. Espero que la divulgación de su trabajo y sus ideas, así como el premio que hoy le otorga la Fundación Polar atraiga a jóvenes ávidos de ciencia. El tiene mucho que dar. Muchas gracias.

Lista de las publicaciones más importantes de L. Recht.

- [1] H. Porta and L. Recht, *Spectra of Algebras of Holomorphic Germs*, Illinois J. Math. 13 (1969), 515-520. MR 39 7131.
- [2] H. Porta and L. Recht, *Morse theory for bundles*, Adv. in Math. 45 (1982), no. 2, 144-188; MR 84b:57024
- [3] H. Porta and L. Recht, *Continuous selections of complemented subspaces*, Contemp Math., 52 (1986) 121-125. MR 87i:46106.

-
- [4] H. Porta and L. Recht, *Classification of linear connections*, J. Math. Anal. Appl. 118 (1986), no. 2, 547-560; MR 87k:53065
- [5] H. Porta and L. Recht, *Forms equivalent to curvatures*, Rev. Mat. Iberoamericana 2 (1986), no. 4, 397-403; MR 88m:58003
- [6] H. Porta and L. Recht, *Minimality of geodesics in Grassmann manifolds*, Proc. Amer. Math Soc. 100 (1987), no. 3, 464-466; MR 88f:46113
- [7] H. Porta and L. Recht, *Spaces of projections in Banach algebras*, Acta Cient. Venezolana 38 (1987), no. 4, 408-426 (1988); MR 90a:46189
- [8] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *A metric property of the polar decompositions of projections*, in Analysis and partial differential equations, 417-426, Dekker, New York, 1990; MR 916:47043
- [9] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *An operator inequality*, Linear Algebra Appl. 142 (1990), 153-158; MR 91m:47020
- [10] P. Berrizbeitia, L. Mata and L. Recht, *An uniqueness theorem for the unitary part of a reflection*, J. Math. Anal. Appl. 152 (1990), no. 2, 448-454; MR 91k:47088
- [11] L. Mata-Lorenzo and L. Recht *Infinite-dimensional homogenous reductive spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina 37 (1991), no. 1-2, 103-116 (1992); MR 95d:58010
- [12] Corach, H. Porta and L. Recht, *Splitting of the positive set of a C^* -algebra*, Indag. Math. (ICS.) 2 (1991), no. 4, 461-468; MR 93j:46059
- [13] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *A geometric interpretation of Segal's inequality $\|e^{x+y}\| < \|e^{x/2}e^ye^{x/2}\|$* , Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), no. 1, 229-231; MR 92h:46105
- [14] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *The geometry of the space of selfadjoint invertible elements of a C^* -algebra*, Integral Equations Operator Theory 16 (1993), no. 3, 333-359; MR 94d:58010
- [15] E. Andruchow, L. Recht and D. Stojanoff, *The space of spectral measures is a homogeneous reductive space*, Integral Equations Operator Theory 16 (1993), no. 1, 1-14; MR 93j:46078
- [16] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *The geometry of spaces of projections in C^* -algebras*, Adv. Math. 101 (1993), no. 1, 59-77; MR 94h:46089
- [17] G. Corach, H. Porta and L. Recht, *Convexity of the geodesic distance on the space of positive operators*, Illinois J. Math. 38 (1994), no. 1, 87-94; MR 94i:58010

- [18] H. Porta and L. Recht, *Conditional expectations and operator decompositions*, Ann. Global Anal. Geom. 12 (1994), no. 4, 335-339; MR 95i:46089
- [19] A. Larotonda and L. Recht, *The orbit of a conditional expectation as a reductive homogeneous space* in Volume in homage to Dr. Rodolfo A. Ricabarra (Spanish), 61-73, Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, 1995; MR 96k:46125
- [20] H. Porta and L. Recht, *Exponential sets and their geometric motions*, J. Geom. Anal. 6 (1996), no. 2, 277-285; MR 98i:46059
- [21] E. Andruchow, A. Larotonda, D. Stojanoff and L. Recht, *Infinite dimensional homogeneous reductive spaces and finite index conditional expectations*, Illinois J. Math. 41 (1997), no. 1, 54-76; MR 98c:46108
- [22] P. M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz and L. Recht, *Spectral flows and bifurcations of critical points*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 (1997), no. 7, 743-747; MR 98k:47021
- [23] P. M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz and L. Recht, *Spectral flows and bifurcations of critical points of strongly indefinite functionals I. General Theory*, J. Funct. Anal. 162 (1999), no. 1, 52-95; MR 2000b:58021
- [24] L. Recht, *Differential Geometry in the space of positive operators*, Bol. Asoc. Mat. Venez. 6 (1999), no. 2, 125-139; MR 2001m:58010
- [25] P. M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz and L. Recht, *Spectral flows and bifurcations of critical points of strongly indefinite functionals II. Bifurcations of periodic orbits of dynamical systems*, J. Differential Equations 163 (2000), no. 1, 18-40; MR 2001g:37090
- [26] L. Mata-Lorenzo and L. Recht, *Convexity properties of $\text{Tr}[(a^*a)^n]$* , Linear Algebra Appl. 315 (2000), no. 1-3, 25-38; MR 2002h:47116
- [27] C. Durán, L. Mata-Lorenzo and L. Recht, *Natural variational problems in the Grassmann manifolds of a C^* -algebra with trace*, Adv. Math. 154 (2000), no. 1, 196-228; MR 2002e:58012
- [28] C. Durán, L. Mata-Lorenzo and L. Recht, *Metric Geometry in Homogeneous Spaces of the Unitary Group of a C^* -Algebra I: Minimal Curves*. Aceptado por Advances in Mathematics.

EDUARDO LIMA DE SÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍCAR
VENEZUELA.

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamonedá

La actividad olímpica avanza con paso seguro en el país. Sin lugar a dudas podemos comenzar con esta frase optimista la sección de La Esquina Olímpica de este número del Boletín de la AMV.

En principio reseñamos la V Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria, V OIMU. En esta oportunidad se desarrolló bajo la responsabilidad de la Olimpiada Matemática Brasileña y la Sociedad Brasileira de Matemáticas. La prueba de la V OIMU se presentó el primer sábado de Noviembre de 2002 con la participación de estudiantes de varias universidades del país. En este evento nuestros estudiantes ganaron dos medallas de plata y dos de bronce. Los ganadores fueron:

David Seguí. Medalla de Plata. (USB)

Héctor Chang. Medalla de plata (USB)

Adolfo Rodríguez. Medalla de Bronce (UCV)

Alexis Prado. Medalla de Bronce (UCV)

Más información, así como los problemas de la competencia los pueden obtener consultando la página: euler.ciens.ucv.ve/acm.

Otra actividad importante de destacar es la realización por segundo año consecutivo del Concurso Canguro Matemático. En esta oportunidad lo ofrecemos en todos los niveles y participaron 10.400 jóvenes, de ocho ciudades del país, abarcando todos los niveles desde el tercer grado de Escuela Básica hasta el segundo año de Educación Media-Diversificada. La prueba del Canguro Matemático se utilizó también como el certamen preliminar de la X Olimpiada Recreativa de Matemáticas, competencia de promoción de las matemáticas que lleva dos años organizándose con el apoyo de la AMV y la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM, y que nos permite descubrir niños con talento para el estudio de las matemáticas y cuya escolaridad está comprendida entre 3º y 7º grado de Escuela Básica. De esta manera vamos conformando las generaciones de relevo que nos permitirán confeccionar los equipos que luego participarán en olimpiadas de matemáticas en el ámbito internacional. Junto a la ORM y el Canguro, en los meses de Mayo y Junio, hemos participado también en la IX Olimpiada Matemática de Mayo y la IV Olimpiada Bolivariana de Matemáticas. Para mayor información pueden consultar la página indicada

arriba. Ahora estamos a la espera de conocer oficialmente los resultados sobre la actuación de nuestros muchachos en ambos eventos internacionales.

Siguiendo en el ámbito internacional, ya tenemos preparada la delegación que asistirá a la 44ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, en Tokio, del 7 al 19 de Julio y estamos en la etapa final de selección de los equipos que competirán en la XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, en Mar del Plata, en Septiembre de 2003 y la V Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, OMCC. Sobre este evento quisiera hacer un comentario adicional. La sede para este año nos había sido otorgada durante la realización de la IV OMCC, en Mérida-México el año pasado, pero nos vimos obligados a suspender el evento por razones de fuerza mayor. En vista de esto, el comité organizador de las Olimpiadas Matemáticas de Costa Rica, ofreció la posibilidad de organizar el evento en su país, con la asesoría de parte nuestra. Esto ofrece una nueva alternativa de organización de olimpiadas y permitirá el desarrollo de estos eventos en la región. La V OMCC se llevará a cabo en Costa Rica del 18 al 22 de Agosto.

Finalizamos con las pruebas de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria.

V OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA UNIVERSITARIA

9 DE NOVIEMBRE DE 2002

PROBLEMA 1. [4 puntos] Encuentre todos los enteros positivos n para los cuales existe un entero m tal que

$$m + \frac{1}{5} < \frac{(1 + \sqrt{3})^n}{\sqrt{3}} < m + \frac{4}{5}.$$

PROBLEMA 2. [5 puntos] Calcule el volumen del sólido en \mathbf{R}^3 descrito por

$$x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1, \quad 3x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

PROBLEMA 3. [5 puntos] La velocidad en tierra de un avión es la velocidad escalar de su proyección radial en la Tierra (i.e., la intersección de la superficie de la Tierra con el segmento que une el centro de la Tierra al avión).

- (a) [2 puntos] Suponiendo que la Tierra sea una esfera perfecta, pruebe que la velocidad en tierra es siempre menor o igual a la velocidad del avión.
- (b) [3 puntos] Suponiendo que la Tierra sea un elipsoide de revolución, determine si la velocidad en tierra es siempre menor o igual a la velocidad del avión.

PROBLEMA 4. [6 puntos] Diga si existe una numeración $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ de todos los racionales positivos para la cual exista el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q_n}.$$

PROBLEMA 5. [6 puntos] Pruebe que, para $n > 2$, no existen polinomios no constantes con coeficientes reales $p(x), q(x)$ y $r(x)$ coprimos dos a dos tales que

$$(p(x))^n + (q(x))^n = (r(x))^n.$$

PROBLEMA 6. [8 puntos] Dado un entero positivo n y un número real positivo ϵ , sea $f(n, \epsilon)$ el número máximo de elementos de un conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$ tal que $|v| = 1$ para todo $v \in X$ y

$$v, v' \in X, v \neq v' \Rightarrow |\langle v, v' \rangle| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, diga si existe algún entero positivo k para el cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n, \epsilon)}{n^k} = 0.$$

Observación: $|\langle v, v' \rangle|$ denota el producto interno entre v y v' .

PROBLEMA 7. [9 puntos] Pruebe que existen funciones continuas $a_1, a_2, a_3, \dots : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ tales que

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) < +\infty, \quad \forall t \in [0, 1].$$

(ii) Para toda sucesión (b_n) de términos positivos con $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n(t)} = 0.$$

ESCUELA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA,
VENEZUELA
rsanchez@euler.ciens.ucv.ve

LIBROS

A New Kind of Science, por Stephen Wolfram,
Wolfram Media Inc., 2002. ISBN: 1-57955-008-8, 1197 páginas, 973
ilustraciones.

Lo Bueno, Lo Malo y Lo Feo: Una Revisión del Libro *A New Kind of Science* de Stephen Wolfram

por Alfredo Octavio

1 Lo Bueno

El Libro de Stephen Wolfram, *A New Kind of Science (Un Nuevo Tipo de Ciencia)*, contiene varios libros en uno. Es, en primer lugar, una exposición



excelente para quien quiera entender, empíricamente, la teoría de los *Autómatas Celulares*, su historia, sus últimos avances y sus consecuencias y posibilidades. Es también, un libro de divulgación científica y, además, uno de esos libros escasos donde se presenta investigación científica original al público en general, en lugar de a la comunidad científica exclusivamente.

En sus primeros seis capítulos el libro explica la teoría de *Autómatas Celulares* desde el punto de vista de Steve Wolfram y su carrera científica. En los capítulos del 7 al 9 el autor hace especulaciones sobre posibles aplicaciones de los *Autómatas Celulares* a distintas áreas del conocimiento. Por último en los capítulos 10 y 11 introduce conceptos necesarios para la presentación, en el capítulo 12 de el **Principio de Equivalencia Computacional**. Este resultado es lo más importante del libro.

Finalmente, el último tercio del libro, llamado *Notas*, es una mirada histórica a los *Autómatas Celulares*, dándole crédito a los contribuyentes más importantes.

Como introducción a los *Autómatas Celulares* el libro resulta excelente para todo aquel que sea capaz de leerlo con paciencia. Stephen Wolfram narra su encuentro con los patrones que finalmente se llamaron *Autómatas Celulares*. En el libro describe a los *Autómatas Celulares* como programas simples, un conjunto pequeño de reglas simples que producen resultados complejos. Este simple concepto lo utiliza como base para mucho, quizás para demasiado. Para

saber más sobre *Autómatas Celulares*, el lector puede consultar el artículo de Neptalí Romero en este mismo número.

El libro contiene muchísimas ilustraciones y ejemplos, producidos con el programa *Mathematica* y está impreso en papel de alta calidad y con gran cuidado de los detalles estéticos

Lo más importante del libro es el **Principio de Equivalencia Computacional**. Algunos han interpretado este principio como el Teorema que los Autómatas Celulares, considerados como máquinas de cómputos, son equivalentes a una máquina de Turing. Si este fuera el caso estaríamos delante de un interesante resultado. Desafortunadamente, Wolfram desea hacer más y menos a la vez. Lo único para lo cual indica una vaga idea de demostración es la equivalencia entre la máquina de Turing y una de las reglas de Autómatas Celulares (la número 110), considerada como máquina de cómputos. El reinterpreta este resultado, sin demostración, para decir que todo fenómeno complejo son manifestaciones, igualmente complejas, de las reglas para Autómatas Celulares. Más aún, establece que toda la complejidad es de ese nivel, incluyendo la posibilidad de que otras reglas de Autómatas Celulares sean equivalentes a una máquina de Turing. Este principio lo pone como un descubrimiento comparable al mayor logro científico de la humanidad. Sus argumentos no son contundentes.

2 Lo Malo

Empezando por el título, el libro tiene ambiciones extremas, desafortunadamente esas ambiciones no son satisfechas. El primer problema que uno nota es una suposición enorme del autor. Este asume que los científicos no creen que lo complejo pueda provenir de lo simple. El cree que sorprende al decir que un grupo de reglas simples pueden producir resultados complejos. Después de años de divulgación de teorías como el Caos o los Fractales, entre otras, esta afirmación parece venir de un ermitaño, sin relaciones en el mundo de la ciencia. En conversaciones con varios científicos en distintas áreas, así como de personas no involucradas en el mundo científico, el que esto escribe no encontró a **una sola persona** que pensara que era imposible que reglas simples produjeran resultados complejos. Más aún, la mayoría creía, intuitivamente, que el estudio de procesos complejos en la naturaleza eventualmente encuentra explicaciones en reglas simples. Todos concordaban que encontrar esas reglas, simples o no, era sumamente difícil y que sólo un puñado han sido encontradas en el curso de la historia, pero estaban convencidos que en el fondo lo que hay detrás de estas complejas manifestaciones son principios simples.

El planteamiento del libro como una obra de la mayor magnitud, por el autor mismo, presenta un obstáculo considerable a la lectura misma del libro. Es muy difícil para el lector separar las frases grandilocuentes del contenido real del libro. El libro no cumple con las expectativas del autor. Ningún libro

podría. Pero además el lector se encuentra rápidamente deseando encontrar errores y regocijándose, incluso, en el menor descuido de tipeo. Así, extraer los beneficios del libro pasa a ser una especie de tortura, en vez del placer que normalmente resulta aprender cosas nuevas. La autopropaganda, abierta y sin tapujos, del autor, sobrepasa cualquier interés que el más honesto lector pueda tener. Una consecuencia de esta actitud del autor ha sido la enorme cantidad de revisiones crueles y satíricas, desde los acertados comentarios de Ray Kurzweil, hasta la brillante burla de un lector en AMAZON.COM titulada *Un Nuevo Tipo de Revisión*.

Otra sorpresa es la baja cantidad de matemática y ciencia novedosa que contiene el libro. Incluso en las partes donde describe resultados conocidos se delata una ausencia de argumentación semi-formal. Esto se nota, de forma fatal, al final del libro donde todos los argumentos para apoyar el **Principio de Equivalencia Computacional** incluyen frases del tipo “*Es mi firme creencia...*”. Tanto el **Principio de Equivalencia Computacional** como las definiciones de *Computabilidad* y *Complejidad* son expresados de forma vaga y confusa, dando pie a argumentos casi circulares: “*Lo que no cumpla el Principio de Equivalencia Computacional no debe ser realmente complejo*”, que aunque no estén expresados de forma explícita se infieren del contenido.

Como toda teoría que trata de explicarlo todo, las teorías del Dr. Wolfram no satisfacen ni al más amable de sus seguidores. Es demasiada pretensión para poco contenido. El deshacerse de las objeciones con argumentos vacíos es el menor de los problemas de este libro.

3 Lo Feo

Para culminar, el libro resulta un insulto a los científicos que han contribuido sobre el tema. Sin leerse las notas, relegadas al final del libro, que la gran mayoría de lectores no leerá, pareciera que todo lo que se sabe sobre Autómatas Celulares se le debe a Steve Wolfram. El libro sufre de este egocentrismo, los lectores pueden abandonarlo o rehusar leerlo, pero para los que han dedicado su vida a contribuir significativamente en el tema y se consideran colegas del Dr. Wolfram, el tono del libro no es más que una puñalada traspera.

Resulta evidente que el libro no fue leído antes de su publicación por nadie que se atreviera a decirle la verdad al autor. Como científico uno termina reconciliado con el proceso de revisión por los pares. Esperemos que este camino no sea imitado por personas con similares recursos económicos a Wolfram, pero menos inteligencia y capacidad. Wolfram ha hecho contribuciones reales y concretas a la ciencia, incluyendo, entre otras, el programa *Mathematica*, que se ha convertido en una herramienta fundamental para muchos científicos. Este libro pudiera haberse convertido en su consagración, si hubiera sido un intento honesto en divulgar las ideas y posibilidades de la Teoría de Autómatas Celu-

lares y una exposición del Principio de Equivalencia Computacional, como una hipótesis de trabajo. Pero el libro intenta ser simultáneamente estas cosas y una propaganda a ultranza para el autor, lo que lo convierten en la coletilla de un chiste mal contado.

ALFREDO OCTAVIO
IVIC
VENEZUELA

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs. 10.000 (US\$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history or philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance.

All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsibility of the author.

All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs. 10.000 (US\$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041-A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: <http://boletinamv.ma.usb.ve/>

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.

Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86