MATEMÁTICAS RECREATIVAS

Sumando la Derivada de la Serie Geométrica

Lyonell Boulton y Mercedes H. Rosas

1. Introducción

Jacobo Bernoulli (1654 – 1705) publica *Tractatus de Seriebus Infinitas* en 1689. En esta obra, el primero de la dinastía de los Bernoulli, demostrará la divergenia de la serie armónica y estudiará la noción de convergencia. También conseguirá la suma de unas pocas series, logrando reducirlas a geométricas y telescópicas.

Pese a todo el desarrollo que ha sufrido la matemática desde finales del siglo XVII, no son muchas las series que podemos sumar de manera exacta. En su *Tractatus*, Bernoulli plantea lo que se conocerá posteriormente como el "problema de Basilea": Se desea conocer la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números naturales. La historia de la solución de este problema coincide con una época de grandes cambios en la manera de concebir las matemáticas.

En el otoño de 1666 el joven Isaac Newton (1643 – 1727) inventa el cálculo matemático. Un año antes ha probado su famoso teorema del binomio. Newton guardará celosamente sus resultados. No es sino hasta el año de 1687 que publicará *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (o *Principia Matemática* como se le conoce actualmente), y esperará hasta 1711 para publicar *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones*. A partir de 1675 el filósofo y matemático Gottfried Leibniz (1640 – 1716) desarrolla el cálculo de manera independiente de Newton. Al contrario de éste, Leibniz decide comunicar sus resultados, publicándolos en 1684, y es gracias al segundo que las academias de finales del siglo XVII comienzan a hacer uso de esta poderosa herramienta.

En 1705 muere Jacobo Bernoulli sin conocer la solución al problema de Basilea y sin ver publicada su obra, *Ars Conjectandi*, un tratado donde desarrolla la teoría de probabilidades, el cual aparece posteriormente en 1713. El problema de Basilea intriga a grandes matemáticos de la época como Johann y Daniel Bernoulli, Leibniz, Stirling y de Moivre. Todos ellos tratan de resolverlo, sin éxito. En el año de 1731, un joven estudiante del hermano de Jacobo, Johann Bernoulli (1667 – 1748), sorprende a su maestro con una solución muy ingeniosa. Leonhard Euler (1707 – 1783) demuestra que el problema de Basilea tiene solución $\pi^2/6$, utilizando las funciones simétricas. En 1748 Euler publicará *Introductio in Analysin Infinitorum*, en donde revoluciona el cálculo matemático al definir el concepto de función y estudiar de manera sistemática sus expansiones en series.

Hoy en día, las nociones de derivada y expansión en series de una función, permiten hallar la suma exacta de series infinitas como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} \qquad\qquad \text{donde } p = 0, 1, 2, \cdots$$

Para el caso $p = 0$, no tenemos otra cosa que la serie geométrica evaluada en $1/2$. Para $p > 0$, lo que tenemos es el término principal de la derivada de ésta, evaluado en ese mismo punto. Para hallar la suma, debemos derivar p veces a $1/(1 - z)$, aislar el término principal de manera que sólo dependa de series del mismo tipo con potencias p de menor órden, y luego evaluar en $z = 1/2$. Sin embargo, como hemos comentado, esta forma de proceder no se inventó sino hasta mediados del siglo XVIII.

A continuación mostramos —haciendo un ejercicio de imaginación— que es posible sumar estas series con las herramientas matemáticas desarrolladas hasta 1689, sin incluir las ideas del cálculo. Es decir, es perfectamente plausible que Jacobo Bernoulli hubiese podido sumar de manera exacta estas series. Se sabe que ciertamente resolvió los casos $p = 0$ y $p = 1$, pero no se sabe de ninguna fuente que indique que conocía la solución para los otros casos.

2. Las tres primeras derivadas de la serie geométrica

Comencemos con el caso $p = 0$. El famoso papiro de Rhind, actualmente en el British Museum de Londres, muestra que ya los egipcios sabían cómo sumar la serie geométrica. Hoy en día conocemos varias maneras de hacer ésto. Por ejemplo, el siguiente dibujo ilustra a un rectángulo de área uno. Si lo descomponemos como una unión de rectángulos más pequeños, podemos calcular su área, sumando el área de cada uno de los pedazos, [2],

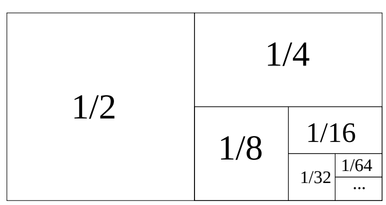

Figura 1:

Ambos resultados han de ser iguales, así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Ahora que sabemos cómo sumar la serie geométrica, podemos intentar hacer lo mismo con su derivada, [1]. Deseamos encontrar el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Para ello, cada sumando de esta serie puede ser colocado en las filas del siguiente arreglo cuya suma se puede calcular de manera sencilla hallando la suma de cada columna:

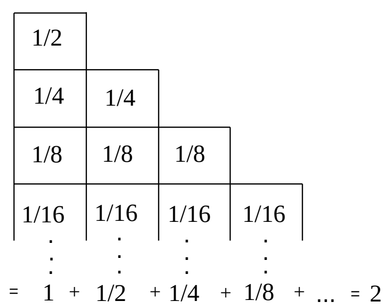

Figura 2:

Obtenemos así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = 2.$$

Veamos qué podemos hacer ahora para sumar la segunda derivada de la serie geométrica. Ahora debemos hallar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \frac{4^2}{2^4} + \cdots \tag{1}$$

Para esto construimos una pirámide como la que ilustra la figura 4, a base de cubos del mismo tamaño, y tales que el peso de los cubos en cada nivel, es la mitad del peso de los del nivel superior. El tope de esta pirámide pesa media unidad. Para calcular cuánto suma la serie (1), debemos conseguir el peso total de la pirámide. La pared exterior pesa

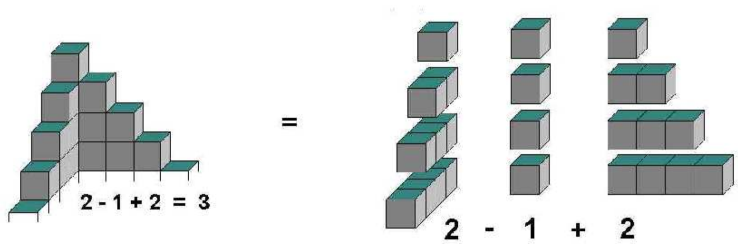

Figura 3:

Si descomponemos nuestra pirámide por capas como lo indican los colores de la siguiente figura,

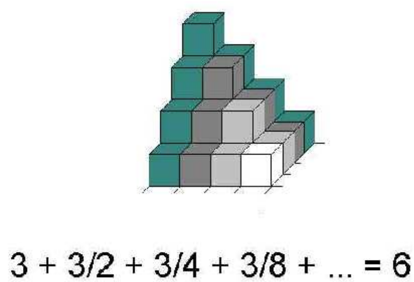

Figura 4:

concluimos que la serie (1) suma 6.

Ahora, si fuese nuestra intención sumar la tercera derivada de la serie geométrica utilizando el mismo procedimiento, tendríamos que saber dibujar en cuatro dimensiones. Como no es el caso, una pequeña modificación del argumento anterior nos permitirá quedarnos dentro del espacio de tres dimensiones.

Queremos demostrar que

$$\frac{1}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + \frac{4^3}{2^4} + \cdots = 26. \tag{2}$$

Para esto construimos una pirámide como la que ilustra la figura 6, a base de cubos cuyo peso disminuye a la mitad siempre que bajamos un nivel. El peso total de esta pirámide corresponde con la suma de la serie (2). El peso de la pared exterior es 10:

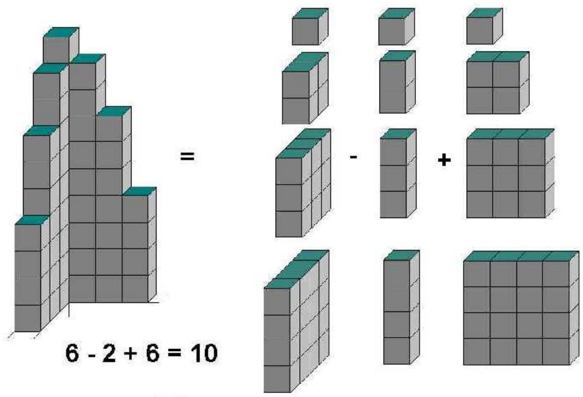

Figura 5:

Las tapas superiores de cada nivel deben ser pesadas por separado, recordando que ya la pared exterior ha sido tomada en cuenta. Esto se logra formando con estos cubos una nueva pirámide como la ya utilizada en la figura 3, teniendo en cuenta que el tope ahora comienza pesando 1/4. En consecuencia la suma total de la serie (2) es

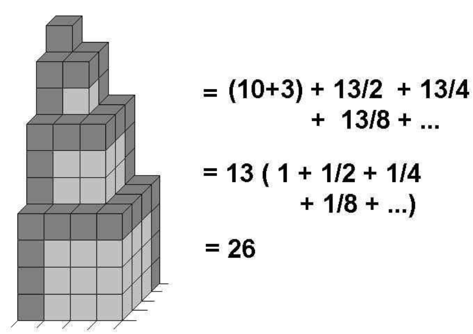

Figura 6:

3. Derivadas de orden superior

Deseamos ahora construir argumentos del mismo estilo, para hallar la suma de las derivadas de orden superior de la serie geométrica. Es decir, queremos hallar

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{n^p}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2^p}{2^2} + \frac{3^p}{2^3} + \cdots$$

donde $p = 4, 5, \ldots$. Para ello procedemos de manera análoga al caso $p = 1$ ya discutido, pero cambiando convenientemente el peso de cada cuadrado. Por ejemplo, para $p = 2$, tenemos

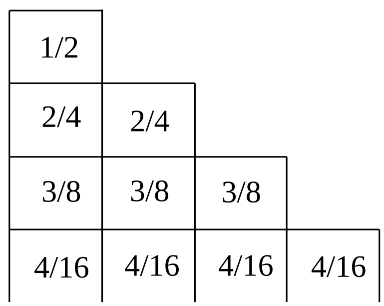

Figura 7:

Sumando por columnas, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} + \ldots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+k}{2^{n+k}} + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+k}{2^{n+k}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^{n+k}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \\
&= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6.
\end{aligned}$$

Se puede observar que el arreglo de la figura 7 no es más que una proyección al plano de la pirámide construida en la figura 4, donde cada casilla indica la suma del peso de los bloques en dirección perpendicular a la proyección.

Queremos generalizar este argumento para $p + 1 = 4, 5, \ldots$. Para esto debemos considerar los arreglos descritos en la siguiente figura

$1^p/2$			
$2^p/4$	$2^p/4$		
$3^p/8$	$3^p/8$	$3^p/8$	
$4^p/16$	$4^p/16$	$4^p/16$	$4^p/16$

Figura 8:

cuya suma de nuevo se obtiene calculando por separado el peso de cada columna. Asumimos, por inducción, que sabemos calcular la suma de las derivadas de orden menor o igual a p, y obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p+1}}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}}+\ldots+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^p}{2^{n+k}}+\ldots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^n}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)^p}{2^{n+k}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^n}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+k}}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}n^{p-j}k^j\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^n}+\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^j}{2^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p-j}}{2^n}.\end{aligned}$$

Esto proporciona una manera recursiva de calcular las sumas de las derivadas p-ésimas de la serie armónica. Si

$$S(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{2^n} \qquad \text{y} \qquad S(1)=1,$$

$$S(p+1)=S(p)+\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S(j)\,S(p-j).$$

Por ejemplo para el caso $p+1=3$ obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}=6+1\cdot 6+2\cdot 2\cdot 2+6\cdot 1=26,$$

lo que confirma nuestra cuenta anterior, y éste permite hallar el caso $p+1=4$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n} = 26 + 1 \cdot 26 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 2 + 26 \cdot 1 = 150.$$

Es interesante observar que, así como sucedió para $p = 2$, cada arreglo en los casos $p = 3, 4, \ldots$ corresponde a la proyección plana de una pirámide en el espacio $p + 2$ dimensional formada por cubos $(p + 1)$-dimensionales, y que el peso de cada casilla corresponde a la suma del peso de los cubos en dirección perpendicular a la proyección.

4. Preguntas y comentarios

Hemos obtenido la siguiente sucesión de números naturales $1, 2, 6, 26, 150, 1082, 9366, 94586, 1091670, 14174522, 204495126, ...$ Es imposible evitar preguntarse: ¿Qué cuentan estos números? La respuesta podemos encontrarla en la página de N.J.A. Sloane:

`http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html`

Visitando esta pagina en la internet, e introduciendo los primeros valores de la sucesión 1, 2, 6, 26, 150, $\cdots$, el lector encontrará referencias acerca de la siguiente información. La recursión $S(p)$, cuenta el número de collares que se pueden construir con un conjunto de p de perlas etiquetadas. Además $S(p)$ es el número de secuencias de cuantificadores de primer orden, lógicamente diferentes, en las cuales ocurren p variables. También se puede probar que estos números son coeficientes de las expansiones en serie de potencias centradas en el origen de $-\ln(2 - e^x)$ y de su derivada $e^x/(2 - e^x)$.

Dejamos al lector las siguientes preguntas que nos parecen de interés general:

¿El argumento geométrico empleado servirá para calcular la suma de alguna otra serie?

¿Es posible hallar la suma de la derivada de la serie geométrica utilizando argumentos que involucren a la pirámide de la figura 4 con cada uno de sus cubos pesados de manera conveniente?

En este caso, ¿qué interpretración geométrica tendría esta manera de proceder?

5. Nota Final

La referencia histórica de la sección introductoria fue tomada del libro [1], cuya lectura recomendamos. Algunos detalles adicionales, como la información del papiro de Rhind, fueron obtenidos de la página de Historia de la Matemática de la Universidad de Saint Andrews:

`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history`

También se puede encontrar información sobre este papiro en la página oficial del British Museum de Londres

`http://www.thebritishmuseum.ac.uk/`

Queremos agradecer a Argimiro Arratia por sus muy útiles sugerencias y a Nerio Borges por su interés en este trabajo.

Referencias

[1] Dunham, William, Euler: The master of us all. The Dolciani Mathematical Expositions, 22. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[2] Roger B. Nelsen, Proof without words II, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2000.

L. Boulton, M. Rosas
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
lboulton@ma.usb.ve, mrosas@ma.usb.ve