Funções de classe C^k

Carlos Humberto Soares Júnior

Abstract

When we study the functions of class C^k in the graduate courses, in general are not presented for us many examples. The objective here is to show a result of Ruas and Saia [2] that permit us to give infinite examples of functions of class C^k of the type $\frac{p}{q}$.

Resumo

Quando estudamos as funções de classe C^k nos cursos de graduação, em geral não nos são apresentados muitos exemplos. O objetivo aqui é expormos didaticamente um resultado de Ruas e Saia [2] que nos permite obter infinitos exemplos de funções de classe C^k do tipo $\frac{p}{q}$.

1 Introdução

Quando estudamos na graduação funções de classe C^k geralmente os exemplos dados, quando dados, não são muito satisfatórios. Em geral, os únicos bons exemplos dados são $x^{2k+1}sen(\frac{1}{x})$ que é de classe C^k e não é de classe C^{k+1}, $x^{2k+2}sen(\frac{1}{x})$ que é de classe C^k, possui derivada de ordem $k+1$, mas esta não é contínua na origem. Um outro exemplo também é o da função $x^k\|x\|$ que é de classe C^k e não é de classe C^{k+1}.

Aqui exporemos uma demonstração simples e elegante de um Teorema de Ruas e Saia [2] que nos dá a classe de diferenciabilidade de um quociente do tipo $\frac{p}{q}$ onde p e q satisfazem certas condições.

Gostaria de agradecer ao *referee* pelas sugestões apresentadas, as quais tornaram a leitura deste artigo incomparavelmente mais didática.

2 Teorema e exemplos

Sejam $(w_1, ..., w_n)$ uma n-upla de números inteiros positivos e d um número inteiro positivo.

Definição 2.1 *Uma função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é quase-homogênea do tipo* $(w_1, ..., w_n; d)$ *se* $f(\lambda^{w_1}x_1, ..., \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, ..., x_n)$, $\forall\ \lambda \geq 0$, *onde* $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *é um sistema de coordenadas do* $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.2 *Fixemos* $(w_1, ..., w_n; 2d)$ *uma (n+1)-upla de inteiros positivos. Definimos a função controle associada a* $(w_1, ..., w_n)$ *por* $q_d(x) = x_1^{2a_1} + x_2^{2a_2} + ... + x_n^{2a_n}$, *onde os* $a_{i,s}$ *são tais que a função* q_d *é quase-homogênea do tipo* $(w_1, ..., w_n;\ 2d)$. *Observe que* $a_1w_1 = \cdots = a_nw_n = d$.

Exemplo: Fixemos $(2, 3; 12)$. Então $q_6(x, y) = x^6 + y^4$ é a função controle associada a $(2, 3)$ e é quase-homogênea do tipo $(2, 3; 12)$.

Lema 2.3 *Seja* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função quase-homogênea do tipo* $(w_1, ..., w_n; 2d)$. *Então, existe uma constante* $c > 0$ *tal que* $\|h(x)\| \leq c \cdot q_d(x)$.

Prova: Seja $S = \{y \in \mathbb{R}^n\ /\ q_d(y) = 1\}$. Observemos que para cada $x \neq 0$ fixado, existe $y \in S$, e um número real $\lambda \neq 0$, tal que $x = (\lambda^{w_1}y_1, ..., \lambda^{w_n}y_n)$ (isso segue do fato da aplicação $\varphi : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(y, \lambda) = (\lambda^{w_1}y_1, ..., \lambda^{w_n}y_n)$, ser sobrejetora).

Agora, seja $c = \sup\{\|h(y)\|\ /\ y \in S\}$. Então,

$$\|h(x)\| = \|h(\lambda y)\| = \lambda^{2d}\|h(y)\| \leq \lambda^{2d}c = \lambda^{2d}cq_d(y) = cq_d(x).$$

■

Definição 2.4 *Sejam* $\vec{w} = (w_1, ..., w_n)$ *uma n-upla de números inteiros positivos e* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função analítica dada por*

$$h(x) = \sum_{\alpha} b_\alpha x^\alpha,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Definimos a filtração de h*, relativa a* $\vec{w}$*, por*

$$fil(h, \vec{w}) := \min\{\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n\ /\ b_\alpha \neq 0\}.$$

No que se segue denotaremos a filtração de h*, relativa a* $\vec{w} = (w_1, ..., w_n)$*, simplesmente por* $fil(h)$.

Abaixo citamos algumas propriedades da filtração.

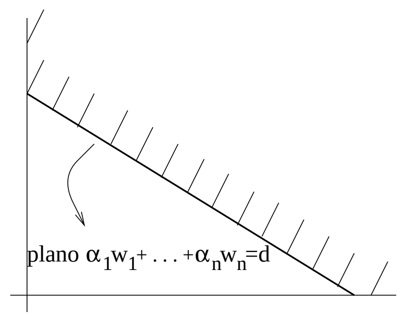
Propriedades 2.5 *Fixemos a n-upla* $(w_1, ..., w_n)$ *com* $w_1 \leq \cdots \leq w_n$. *Então:*

1. $fil(fg) \geq fil(f) + fil(g)$;
2. $fil(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \geq fil(f) - w_n$.

Podemos interpretar geometricamente a filtração da seguinte forma:

Fixemos uma $n+1$-upla $(w_1, ..., w_n; d)$. Podemos identificar o conjunto das funções monomiais $\{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ fil(x^\alpha) = d\}$ com o conjunto $\{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \ / \ w_1\alpha_1 + \cdots + w_n\alpha_n = d\}$. Observe que este último consiste do conjunto dos pontos do plano $w_1\alpha_1 + \cdots + w_n\alpha_n = d$ normal a $(w_1, ..., w_n)$.

Assim, se $h(x) = \sum b_\alpha x^\alpha$ é uma função analítica com $fil(h) \geq d$, geometricamente podemos dizer que os monômios x^α de h ($b_\alpha \neq 0$) estão na região achurada, conforme a figura abaixo.



Lema 2.6 *Sejam $q(x)$ uma função controle associada a $(w_1, ..., w_n; 2d)$ com $w_1 \leq \cdots \leq w_n$ e p(x) uma função analítica tal que:*

$$fil(p) \geq 2d + w_n + 1.$$

Então, a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ é diferenciável de classe C^1.

Prova: O gradiente de f é

$$\nabla f(x) = \frac{q(x) \cdot \nabla p(x) - p(x) \cdot \nabla q(x)}{q(x)^2}, \text{ com } \inf_i \{fil(\frac{\partial q}{\partial x_i}(x))\} \geq 2d - w_n$$

e $fil(p(x)) \geq 2d + w_n + 1$, então $fil(q(x) \cdot \nabla p(x)) \geq 4d + 1$ e $fil(p(x) \cdot \nabla q(x)) \geq 4d + 1$.

Cada termo de $\nabla f(x)$ é da forma $g(x) \cdot \frac{h(x)}{q(x)}$, onde $h(x)$ é quase-homogênea do tipo $(w_1, ..., w_n; 2d)$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. Daí segue-se do Lema 2.3 que $\frac{h(x)}{q(x)}$ é limitada, e portanto $\nabla f(x)$ é contínua. ■

Esse Lema é o primeiro passo para induzirmos o seguinte Teorema:

Teorema 2.7 (Ruas e Saia, [2]) *Sejam $q(x)$ uma função controle associada a $(w_1, ..., w_n; 2d)$ com $w_1 \leq \cdots \leq w_n$ e p(x) uma função analítica tal que:*

$$fil(p) \geq 2d + kw_n + 1, \ k \geq 1.$$

Então, a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ é diferenciável de classe C^k.

Prova: Faremos indução na classe de diferenciabilidade k.

Primeiramente observemos que o caso $k = 1$ foi resolvido no Lema 2.6.

Assumamos agora, como hipótese de indução, que para toda função do tipo $F = \frac{H}{q}$ com $fil(H) \geq 2d + (k-1)w_n + 1$, F é de classe C^{k-1}.

Seja $f = \frac{h(x)}{q(x)}$ com $fil(h(x)) \geq 2d + kw_n + 1$. Então $\nabla f(x) = \frac{H(x)}{q(x)}$, com $fil(H) \geq 2d + (k-1)w_n + 1$, é de classe C^{k-1}, e portanto f é de classe C^k. ■

Exemplo 1: Seja
$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Fixemos $(1,1;2)$. Observemos que $h(x,y) = x^4 + y^4$ e $q(x,y) = x^2 + y^2$ e portanto, como $fil(h) = 4 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1$, temos que f é de classe C^1.

Não é difícil verificarmos que f não possui segunda derivada na origem, portanto não é de classe C^2.

Esse exemplo mostra que o Teorema acima é o melhor possível.

Exemplo 2: Seja
$$f(x,y) = \frac{h(x,y)}{q(x,y)} = \frac{x^{11} + y^6 + x^5 y^3}{x^4 + y^2}.$$

Então, fixado (1,2;4) e como $fil(h) = 11 = 4 + 3.2 + 1$, temos que f é de classe C^3.

Exemplo 3: Seja f a função
$$f(x,y,z) = \frac{h(x,y,z)}{q(x,y,z)} = \frac{x^a y^b z^c}{x^{4n} + y^{3n} + z^{2n}}$$

onde n é um número inteiro positivo. Suponhamos que $3a+4b+6c \geq 12n+6k+1$, onde k é um número inteiro positivo dado. Então, como q é quase-homogênea do tipo $(3,4,6;12n)$ e $fil(h) = 3a + 4b + 6c \geq 12n + 6k + 1$, temos que f é de classe C^k.

Exemplo 4: Seja
$$f(x,y) = \frac{y^5 sen(x)}{x^7 + xy^4}.$$

Podemos reescrever f como
$$f(x,y) = \frac{h(x,y)}{q(x,y)} = \frac{\frac{y^5 sen(x)}{x}}{x^6 + y^4}.$$

Como q é quase-homogênea do tipo $(2,3;12)$ e $fil(h) = 19 = 12 + 2.3 + 1$ temos que f é de classe C^2.

Referências

[1] E. L. Lima. *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$, Editora da Universidade de Brasília.

[2] M. A. Ruas & M. J. Saia. *C^ℓ-determinacy of Weighted Homogeneous Germs*, Hokkaido Math. J., vol. 26 (1997), pp 89-99.

Universidade Regional do Carirí - URCA
Curso de Matemática
CEP 63.050-480 - Juazeiro do Norte - CE - Brasil
humberto@icmc.usp.br

Universidade de São Paulo - USP
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Cx. Postal 668, CEP 13560-970 - São Carlos - SP - Brasil
humberto@icmc.usp.br