Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*

Carmen Azcárate Giménez y Matías Camacho Machín

Resumen

En este artículo se hace una breve exposición de las principales características del llamado "pensamiento matemático avanzado", en el cual se enmarcan una gran parte de las investigaciones de didáctica del Análisis Matemático. Se muestran algunas de las aportaciones de la investigación en este campo al desarrollo curricular y se presenta la línea de investigación "Procesos cognitivos del pensamiento matemático avanzado" que se viene desarrollando en varias universidades españolas desde mediados de la década de los noventa.

Abstract

In this paper we shortly explain the main characteristics of the so-called "advanced mathematical thinking" where we insert the research in Mathematical Analysis education. We show some of the contributions in this area to the curriculum development and present the line of research, "Cognitive processes in advanced mathematical research", which have been developed in some Spanish universities since the middle of the nineties.

Introducción

Hablar de la situación actual de la Didáctica del Análisis Matemático implica hacer un poco de historia y explicar el marco general en el que se inserta. En efecto, es en 1985, en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado "Pensamiento Matemático Avanzado" y, en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1990; Tall, 1991).

El interés por estos temas se explica por la tendencia en Didáctica de la Matemática, durante la década de los noventa, a considerar la problemática

*Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto de la DGI, BXX2000-0069 del MCyT.

del aprendizaje de las Matemáticas en términos de procesos cognitivos y ya no como simple adquisición de competencias y de habilidades; en esos años se aprecia una clara evolución desde el estudio de los errores y dificultades del alumnado hacia investigaciones acerca del conocimiento de los estudiantes que subyace a dichas dificultades. Además, en esa misma época, se amplía el campo de los problemas investigados, hasta entonces muy centrado en los conceptos básicos de las Matemáticas de la enseñanza primaria (que corresponde al "pensamiento matemático elemental"), a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios. Este desarrollo de la investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el Análisis Matemático, considerando además los procesos asociados de definición, prueba y demostración, ha venido enriqueciendo los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes.

A lo largo de este artículo se hará una breve exposición de las principales características del pensamiento matemático avanzado, en el cual se enmarcan un amplio número de las investigaciones de didáctica del Análisis Matemático, se mostrarán algunas de las aportaciones de la investigación en este campo al desarrollo curricular y se presentará, finalmente, una línea de investigación que se viene desarrollando en España desde mediados de la década de los noventa.

Procesos del pensamiento matemático avanzado

De acuerdo con las palabras de Dreyfus (1991), "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Las investigaciones cognitivas están interesadas en estos procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógicoformal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que dicha presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante.

Aunque no sea posible establecer una distinción clara entre las Matemáticas elementales y las avanzadas, sí se pueden señalar algunos rasgos distintivos, uno de los cuales es la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla; los procesos más potentes son aquellos que permiten este control, en particular la representación y la abstracción. Además, el éxito en Matemáticas se puede relacionar con la riqueza y la flexibilidad de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos.

Modelos cognitivos

Vamos a exponer brevemente alguno de los modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, como son los implicados en el Análisis Matemático; estos modelos son distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo. Con el propósito de clarificar las ideas y el lenguaje, resulta relevante la distinción que establecen Tall y Vinner (1981) "entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos", es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo.

Se considera, por un lado, la *definición de un concepto* matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones *formales*, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen encontrar escritas en los libros), y las definiciones *personales* que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal. Por otro lado, se considera el *esquema conceptual*[1] que tiene una persona de un concepto matemático como la expresión que permite referirnos a "la estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos ..." (Tall y Vinner, 1981), donde se entiende imagen mental como el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en su mente, incluyendo cualquier representación del concepto (gráfica, numérica, simbólica, ...).

[1] Vamos a utilizar *esquema conceptual* como traducción de la expresión original inglesa *concept image*

Resumiendo, podemos decir que el esquema conceptual es algo no siempre verbal que asociamos mentalmente al nombre del concepto; puede ser una representación visual del concepto pero incluye también las experiencias y las sensaciones vividas en relación al mismo. Es evidente que las representaciones visuales, las imágenes mentales, las propiedades, los procedimientos, las sensaciones o las experiencias asociadas al nombre del concepto se pueden traducir a formas verbales pero, tal como señala Vinner (1991), "es importante recordar que dichas formas verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria".

Desde otra perspectiva, una de las razones de la complejidad del conocimiento matemático superior es que, en su mayoría, los conceptos del pensamiento matemático avanzado pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización del estudiante. Sfard (1991) habla de dos tipos de *concepciones* de un mismo concepto matemático: las concepciones que llama *operacionales* cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones *estructurales* cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias ("la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de 'comprender'"), ella considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales.

En su análisis del proceso de formación de concepciones, Sfard distingue tres etapas que corresponden a tres grados de estructuralización progresiva y que denomina: interiorización, condensación y cosificación; se consideran las etapas de interiorización y de condensación como procesos graduales y cuantitativos mientras la cosificación se considera un proceso casi instantáneo. La nueva entidad cosificada, el objeto, se desprende del proceso que la ha producido y empieza a adquirir su significado por el hecho de pertenecer a una cierta categoría. El estadio de cosificación es el punto en el cual empieza la interiorización de unos conceptos de nivel superior, aquellos que se originan a partir de procesos sobre el objeto en cuestión.

Un enfoque más reciente y todavía en fase de elaboración es el de un grupo de investigadores denominado RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) dirigidos por el profesor Ed Dubinsky; su propósito del análisis teórico de un concepto es el de proponer un modelo cognitivo, en este caso una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante podría elaborar con el fin de desarrollar su comprensión de un concepto. El resultado del análisis teórico es lo que se denomina la *descomposición genética del concepto* (Asiala et al., 1996). El análisis se basa principalmente en:

- La comprensión que tienen los investigadores sobre el concepto en cuestión y en sus experiencias como aprendices y profesores del mismo.

- Investigaciones previas sobre el concepto.
- Observaciones de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto estudiado.

Para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. A su vez los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas[2], mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y des-encapsulaciones. En definitiva, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

En un artículo muy sugerente, Tall (1995) explica que existen dos secuencias de desarrollo, distintas y simultáneas, que empiezan una por la percepción de objetos y la otra con la acción sobre ellos. Explica que la actividad matemática empieza por la percepción de objetos en forma visuo-espacial, seguida de su descripción verbal, su clasificación y el inicio de deducciones verbales. La acción sobre objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que llama *procepto*[3] El estudio de un gran número de casos, en todos los niveles de las matemáticas pero especialmente en niveles superiores, en que un proceso y su producto se representan mediante el mismo símbolo, indujo a Tall a definir el término procepto: "Definimos un procepto como un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos."

Por ejemplo:

- La expresión $f(x) = x^2 - 9$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".

[2]Esta teoría se conoce en inglés como APOS de *Action, Process, Object , Schema*. En la literatura española se traduce por APOE.

[3]*Procepto* es nuestra traducción de la expresión original inglesa *procept*, que proviene de proceso (*process*) y de concepto (*concept*).

- En cuanto a las expresiones:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{x - 1} \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} \; ; \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

  representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de cálculo específico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural".

Para complementar este panorama teórico de las investigaciones cognitivas acerca del conocimiento matemático superior, podemos citar la teoría de las representaciones semióticas, desarrollada por Duval (1996, 1999). Duval, al interrogarse sobre si los medios estructuralmente requeridos para que una persona pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático son diferentes, o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento (por ejemplo en botánica, astronomía, química, historia,...), constata lo siguiente:

- La no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. "De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría,...".

- La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa...).

Duval, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos.

El papel de las definiciones

Una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas es considerar que, en las primeras, los objetos se describen, mientras en las segundas, se definen. Si nos referimos al lenguaje, en ambos casos se utiliza el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, sea matemático sea del mundo externo, y para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Hemos visto que adquirir un concepto matemático se puede describir como construir un esquema conceptual del mismo. Saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones.

Sin embargo, la presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas. Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa diciendo: "Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos".

Desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y realización de tareas son éstas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso. Sin embargo, lo que ocurre en la práctica, según las investigaciones que se ocupan de esta cuestión, es que el esquema conceptual se construye a partir de la experiencia del estudiante, es decir a partir de situaciones muy variadas. Los alumnos tienden a realizar sus tareas de forma espontánea, de acuerdo con los hábitos adquiridos en la vida cotidiana, es decir que elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación.

El problema que se plantea es el de la necesidad de educar progresivamente los hábitos de los estudiantes, sobre todo de los que van a realizar estudios de matemáticas no elementales, de forma que las definiciones formen parte de su experiencia y, por tanto, de sus esquemas conceptuales. Es evidente, que en el campo de las matemáticas, como por ejemplo el del Análisis Matemático, las definiciones desempeñan un papel muy importante en la realización de tareas cognitivas y, por consiguiente, en la formación de los esquemas conceptuales. De ahí la necesidad de ingeniar situaciones didácticas adecuadas, en las cuales las definiciones sean imprescindibles para una correcta realización de la tarea.

La Didáctica del Análisis Matemático y el desarrollo curricular

El grupo de trabajo del ICME 7 (celebrado en Québec en el año 1992) denominado "Las dificultades de los estudiantes en el Cálculo" contó con un amplio número de participantes de diferentes países con el objetivo de responder a algunas cuestiones agrupadas en tres aspectos principales (Artigue y Ervynck, 1993):

- Objetivos y contenidos: ¿Cuáles son los objetivos de un curso de cálculo? ¿Cuál es su papel en el currículo de Matemáticas? ¿Cuáles son las relaciones entre los aspectos conceptuales y los aspectos técnicos de los contenidos del curso?

- Dificultades de enseñanza y aprendizaje: ¿Cuáles son las dificultades comunes a todos los aspectos del Cálculo? ¿Cuáles son las dificultades específicas de algunos aspectos? ¿Cuáles son las razones de tales dificultades?

- Concepciones del Cálculo y su enseñanza que subyacen en las distintas experiencias: ¿Qué problemas surgen a la hora de implementar secuencias de enseñanza? ¿Cuáles han sido los resultados? ¿Están de acuerdo los resultados obtenidos con los resultados esperados? ¿Es posible explicar las divergencias entre los resultados esperados y los conseguidos?

Muchas de estas preguntas han quedado abiertas y constituyen las preguntas más generales de investigación. Distintos autores en este campo han venido señalando un conjunto de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático; se consideran como dificultades esenciales el concepto de límite y los procesos infinitos que intervienen en los conceptos básicos de derivada e integral; se indican además otro tipo de dificultades que tienen que ver con el estudio de las funciones, la notación de Leibniz, el concepto de infinito, el uso y selección de las distintas representaciones, etc.

En muchas reformas curriculares, las calculadoras gráficas y simbólicas y los Programas de Cálculo Simbólico (PCS)[4] juegan un papel importante. En USA se desarrolla desde 1986 el proyecto C^{2}PC (Calculator and Computer

[4]Hemos optado en este trabajo por considerar los PCS en el mismo sentido que en la literatura anglosajona se utilizan las siglas CAS (*Computer Álgebra Systems*)

Pre-Calculus Project) cuyo objetivo principal consiste en el desarrollo de un currículo de matemáticas para la secundaria, analizando para ello las destrezas necesarias para la comprensión del concepto de función, gráficas de funciones y geometría analítica. Uno de los aspectos más interesantes de este trabajo consiste en el desarrollo de un proceso sistemático en la resolución de problemas, atendiendo a las conexiones existentes entre las distintas representaciones (verbal, algebraica, numérica y gráfica) que se pueden obtener en el proceso de resolución de una situación problemática, para la cual las calculadoras gráficas son de gran utilidad.

Las modificaciones que se han incorporado a los currículos de algunos países han sido dirigidas principalmente hacia una introducción del Análisis Matemático más intuitiva y experimental, incorporando el uso de las nuevas tecnologías. Por ejemplo, el movimiento para la reforma del cálculo que se desarrolló en USA tuvo su influencia en los Estándares Curriculares de los años 90 y han dado lugar a un gran número de materiales curriculares, en los que las nuevas tecnologías juegan un importante papel. Los materiales británicos del SMP 16-19, representan también un buen ejemplo de esto. En Francia, Artigue (1997) ha hecho un estudio exhaustivo de la evolución de los programas de Análisis Matemático, en los cuales se reduce sustancialmente la formalización y se organiza la actividad matemática en torno a la resolución de problemas de optimización, aproximaciones de números y funciones, modelización de variaciones discretas y continuas. El orden matemático (límites-continuidad-derivada) ha sido substituido por una aproximación intuitiva al lenguaje de los límites con el objetivo de que sirva de sustento al concepto de derivada que constituye la noción esencial del Cálculo.

En el currículo de Bachillerato de España también se aprecian modificaciones dirigidas al uso de las calculadoras. El DCB señalaba en su introducción que "con el fin de que el énfasis se ponga en los aspectos intuitivos y gráficos de estas ideas, e instrumentos para el análisis, sería conveniente el trabajo con las calculadoras y los ordenadores cuando se quiera minimizar los efectos no deseados de la falta de madurez en el cálculo algebraico (que habría que diagnosticar y tratar a parte en casos de alumnos y alumnas concretos)". Ahora bien, con una herramienta como ésta, es necesario analizar el currículo de Secundaria desde otra perspectiva: las situaciones y problemas de matemáticas no se pueden plantear de la misma manera que se hacía en la enseñanza tradicional, dado que en estas calculadoras los aspectos exclusivamente instrumentales propios de las matemáticas (en exceso muchas veces), no tendrán sentido si no se orientan de una forma adecuada. Habrá, por tanto, que establecer modificaciones en el currículo, y como consecuencia desarrollar investigaciones dirigidas a articular los conocimientos de los alumnos en torno a este nuevo instrumento.

Una experiencia española de investigación en Didáctica del Análisis Matemático

Cuando se estaba consolidando la reforma de las enseñanzas medias y la implantación de la Enseñanza Obligatoria hasta los 16 años, parecía muy importante investigar qué pasa en la asignatura de Matemáticas, donde el nivel matemático de una gran mayoría de alumnos no es bueno, según detectan los profesores de los primeros cursos universitarios, y donde los profesores asisten con cierta impasibilidad al "enigma de que unos pocos tienen éxito con muy poco esfuerzo, mientras otros parecen condenados al fracaso" (Gray y Tall, 1994). En ese marco, vamos a referirnos al proyecto de investigación que sobre Pensamiento Matemático Avanzado, nació en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (Azcárate y otros, 1996), y se amplió después a las Universidades de Salamanca (Modesto Sierra), La Laguna (Matías Camacho), Valladolid (Tomás Ortega) y Lleida (Mar Moreno); se trata de una línea de investigación cuyo objetivo es profundizar en el estudio de diferentes aspectos como son:

- Los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas y que van adquiriendo una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, procesos todos ellos que tienen una componente psicológica.
- El estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos, con especial referencia a los conceptos fundamentales del Análisis, lo cual implica investigar la transposición didáctica del saber matemático al saber escolar a través del análisis de los currículos oficiales y de los libros de texto.
- El papel que juegan los PCS y las calculadoras gráficas y simbólicas en la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos importantes del Análisis Matemático Este proyecto garantiza una evaluación y un control del uso de estas herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje.

En estas investigaciones se distinguen los fenómenos de enseñanza, cuyo sujeto de estudio es el profesor y los fenómenos de aprendizaje, cuyos sujetos de estudio son los estudiantes. Los métodos de recogida de datos son fundamentalmente de tipo cualitativo. Así, para las investigaciones sobre aprendizaje se utilizan sobre todo: trabajos realizados por los alumnos (cuadernos de clase, exámenes, ...), cuestionarios semi-abiertos, entrevistas semi-abiertas grabadas en magnetófono. Para las investigaciones sobre enseñanza: diarios personales de los investigadores, entrevistas semi-abiertas investigador-profesor grabadas en magnetófono, cuestionarios semi-abiertos, mapas conceptuales elaborados por los profesores, clases grabadas en video. En las investigaciones de tipo histórico se utilizan: libros de texto; libros de autores clásicos de análisis matemático (Cauchy, Euler, Lagrange,...); materiales didácticos. En las investigaciones sobre el papel de las nuevas tecnologías se analizan los programas informáticos utilizados.

El análisis de datos es fundamentalmente de tipo cualitativo. La información se analiza y se codifica de acuerdo con códigos y categorías consensuadas entre los participantes, con la validación de investigadores externos; es frecuente organizar los diferentes puntos de vista en torno a dilemas a partir de los cuales se estructuran los datos. Para las comparaciones múltiples entre las categorías se organizan tablas u otros sistemas de comparación cualitativos. La validez de los resultados se intenta asegurar mediante multiplicidad de fuentes de datos y de investigadores que participan en la discusión de las conclusiones. El análisis de los libros históricos y de texto se llevan a cabo atendiendo a tres componentes: análisis de contenido, didáctico-cognitivo y fenomenológico.

En cuanto al estado actual del trabajo realizado, se pueden distinguir las distintas facetas:

a) Aspectos cognitivos del aprendizaje del análisis:

En la Universidad Autónoma de Barcelona y bajo la dirección de Carmen Azcárate, se han llevado a cabo varias investigaciones acerca de problemas de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite (Espinoza, 1998; Delgado, 1998; Espinoza y Azcárate, 2000); del concepto de integral (Calvo, 2001); del concepto de infinito (Garbín, 1998; Garbín y Azcárate, 2000; 2001, 2002); del concepto de ecuación diferencial (Moreno y Azcárate, 1997; Moreno, 2000; Moreno y Azcárate, 2003); de los conceptos de pendiente de una recta y la variación instantánea y derivada de una función (Badillo, 2003); del concepto de cuantificador (Ramírez, 2000). En la Universidad de Salamanca, Modesto Sierra ha llevado a cabo una investigación acerca de las concepciones de los alumnos de Bachillerato y C.O.U. sobre el límite funcional y la continuidad (Sierra, González y López, 2000). En la Universidad de Valladolid, Tomás Ortega ha dirigido una investigación acerca del concepto de límite en alumnos de Bachillerato de Ciencias Sociales (Blázquez, 2000).

Estas investigaciones han obtenido ricas informaciones acerca de los procesos característicos del pensamiento matemático avanzado involucrados en dichos conceptos (abstracción, formalización, representación, definición, demostración, . . .); sobre ciertos aspectos del desarrollo cognitivo como son esquemas conceptuales y obstáculos cognitivos, en relación con el aprendizaje de los estudiantes; y sobre el conocimiento del profesor, como es el estudio de las organizaciones matemáticas y didácticas, el estudio del conocimiento matemático y didáctico o las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas universitarios sobre las ecuaciones diferenciales y la modelización de situaciones de carácter científico-técnicas.

b) Estudio histórico y epistemológico de los contenidos matemáticos:

En la Universidad de Salamanca, Modesto Sierra ha dirigido investigaciones sobre la evolución histórica de los conceptos de límite funcional y continuidad en los libros de texto de Bachillerato y C.O.U. (Sierra, González y López, 1999) y sobre sistemas de representación simbólicos en la enseñanza del Análisis (González, 2002). En la Universidad Autónoma de Barcelona, Jordi Deulofeu ha dirigido una investigación acerca de la evolución histórica de los sistemas de representación de los números reales (Miralles, 1998) y su influencia epistemológica, y otra sobre la historia de los métodos de máximos y mínimos de Fermat.

c) El papel de los PCS en la enseñanza y aprendizaje de conceptos básicos del Análisis Matemático:

En la Universidad de La Laguna, se está llevando a cabo una investigación acerca de las potencialidades y dificultades de implementación del software DERIVE en los primeros cursos universitarios, mediante la que se analiza de una parte, las actitudes de los estudiantes hacia el uso del Programa de Cálculo Simbólico DERIVE, y de otra, la influencia del uso del dicho software en la concepción de integral definida que adquieren los estudiantes y su relación con el concepto de área bajo una curva (Camacho y Depool, 2001, 2002). También se ha realizado otra investigación acerca de las dificultades, obstáculos y errores que aparecen en los estudiantes cuando se desarrolla una enseñanza habitual del concepto de integral impropia en el primer curso de la Licenciatura de Matemáticas. Se trata de elaborar una ingeniería didáctica para la enseñanza de la integral impropia que promueva el uso de los sistemas de representación algebraico y gráfico utilizando el Programa de Cálculo Simbólico MAPLE como uno de los recursos didácticos (González-Martín, 2002; González-Martín y Camacho, 2003). También se comienza a desarrollar un estudio acerca de la enseñanza y aprendizaje de las aplicaciones de la derivada utilizando calculadoras simbólicas en Ingeniería y Formación inicial de profesores.

Además, los miembros del grupo Pensamiento Matemático Avanzado constituyen el grueso del grupo de investigación "Didáctica del Análisis Matemático" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) que se constituyó en 1996, en cuyos simposios anuales se presentan y discuten los trabajos individuales de los investigadores del grupo, se comparten las noticias bibliográficas y se discuten artículos e investigaciones de actualidad en este campo de conocimiento.

En este mismo marco del grupo de investigación "Didáctica del Análisis Matemático" de la SEIEM, se pueden destacar otras líneas de trabajo consolidadas: en la Universidad de Jaén (Ángel Contreras), en las Universidades de Sevilla y Alicante (Salvador Llinares), en la Universidad de Barcelona (Vicenç Font).

Referencias

Artigue, M. (1997). La integración de calculadoras gráficas y formales en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato. *Actas del RELME 11.*

Artigue, M.; Ervynck, G. (eds.)(1993). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME 7*, QuÉbec, Canada.

Asiala, M y otros (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 16, No 4, pp. 399-343.

Azcárate, C.; Casadevall, M.; Casellas, E.; Bosch, D. (1996). *Cálculo diferencial e integral.* Madrid: Síntesis.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo Diferencial e Integral.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Camacho, M. y Depool, R. (2001). "Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un software para el aprendizaje de las Matemáticas". *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, Vol. III, pp. 27-42.

Camacho, M. y Depool, R. (2002). Students' attitudes towards mathematics and computers when using derive in the learning of calculus concepts. *The International Journal of Computer Algebra in Maths. Education*, Vol 9, 4, pp. 259-283.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds), *Mathematics and cognition.* Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 25-41.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6, 3, pp. 349-382.

Duval, R. (1999b). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME 23*, pp. 3-26.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función".* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Espinoza, L. y Azcárate, C (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18.3, 355-368.

Garbin, S. (1999). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2000). Estudio sobre esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de bachillerato en relación con el infinito actual expresado en diferentes lenguajes matemáticos. *Educación Matemática*, 12. 3, 5-18.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual: una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 38, 53-67.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 20.1, 87-113.

González, M. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

González-Martín, A. S. (2002). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del concepto de integral impropia* (Tesina), Universidad de La Laguna

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2003). What is students' actual understanding about improper integration?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (aceptado para su publicación).

Gray, E. M. y Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, No 2, pp. 115-141.

Miralles, J. (2000). *Sobre l'evolució històrica del concepte de nombre. Impacte didàctic i algunes propostes concretes.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Moreno, M. y Azcárate, C. (1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de Química y Biología. Estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15, 21-34 Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de Matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21.2, pp. 265-280. Ramírez, J. L. (1999). *Análisis del modelo de descomposición genética de la cuantificación, en dos contextos: el contexto de los enunciados en matemáticas y el contexto no matemático de la representación del conocimiento con la lógica de primer orden.* Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Barcelona.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies*

in Mathematics, Vol. 22, pp. 1-36.
Sierra, M., González, M. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y COU: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, vol 17, 3, pp. 463-476.
Sierra, M., González, M. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y COU sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)* .Vol 3, 1.
Tall, D. (Ed) (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer.
Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, *Proceedings of PME 19*, Recife (Brasil).
Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En Bishop, A. J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325. Netherlands: Kluwer.
Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, No 12, pp, 151-169.
Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En TALL, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.

Carmen Azcárate Giménez.
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales
Universidad Autónoma de Barcelona, España

Matías Camacho Machín
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna, España