

Origen y Formación de Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Estudio de un Grupo de Alumnos que Comienzan la Educación Secundaria

María Luz Callejo y Antoni Vila

Introducción

A lo largo de la escolaridad los alumnos se van forjando una idea de lo que es la matemática y de lo que significa “hacer matemáticas”. Pero las investigaciones sobre las creencias de los alumnos nos muestran que la visión de la matemática que predomina es la de una ciencia rígida, aburrida, mecánica, difícil, un tormento para algunos, que poco o nada tiene que ver con la creatividad, la belleza o el juego.

Aunque socialmente se considera que esta materia es importante para la formación y el desarrollo personal y social, y con frecuencia se advierte la preocupación por el bajo rendimiento de los alumnos, sin embargo no se ponen los medios para presentar, a través de los medios de comunicación, en la educación formal o en otros ámbitos formativos, sus vertientes estética, lúdica o experimental; no se proporciona a la mayoría de los jóvenes experiencias inolvidables, como la de demostrar que hay infinitos números primos aunque no se tenga una fórmula para obtenerlos y que además, aunque parezca imposible, hay tantos números primos como naturales a pesar de que los primos son un subconjunto de los naturales; o no se les propone verdaderos problemas en los que trabajen intensamente, con interés y motivación, tratando de resolverlos y tengan el placer de comprobar de que en un instante se puede producir la iluminación que compense grandes esfuerzos.

Por otra parte la realidad del día a día en el aula nos muestra una amplia e inabordable casuística de dificultades, bloqueos y errores cometidos y/o observados en el alumnado al resolver problemas de matemáticas. Y nos preguntamos: ¿Por qué se producen estos errores de forma tan generalizada? ¿Por qué algunos alumnos especialmente capacitados a veces dan respuestas pobres o ingenuas?

En este artículo vamos a tratar de la visión de la matemática asomándonos al mundo de las creencias de los alumnos, más concretamente a las creencias sobre la resolución de problemas (RP) y sus consecuencias sobre las prácticas. Comenzaremos partiendo de la realidad, exponiendo unos cuantos ejemplos de errores que cometen los alumnos, luego trataremos de darles una explicación a partir de las creencias sobre la actividad de resolver problemas; para ello delimitaremos este concepto y su relación con otros semejantes, veremos cómo se relacionan entre sí y con las prácticas y cuál es su origen y formación; por último presentaremos una parte de los resultados de una investigación reciente con un grupo de alumnos que inician la Educación Secundaria, respecto a qué entienden por “problema de matemáticas”, cómo conciben la naturaleza de la actividad de resolver problemas y los aspectos que inciden en su aprendizaje y mejora, así como la manera en que se formaron estas creencias¹.

1 Algunas respuestas de los alumnos

La realidad del día a día nos ofrece ejemplos que son un exponente de que no se está favoreciendo el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos, sino más bien el aprendizaje de mecanismos y de respuestas prefabricadas que producen bloqueos y fijaciones de distintos tipos e inhiben la creatividad. Veamos tres tipos de cuestiones y de respuestas.

En primer lugar podemos considerar las respuestas “sin sentido” a situaciones planteadas en el entorno escolar con relación a aspectos cotidianos. Podemos centrarnos en aquellas que se corresponden con situaciones sobre las que se formulan preguntas absurdas, que serían reconocidas fácilmente como tales fuera del entorno escolar. Por ejemplo, el caso de una maestra que plantea por escrito a todos los niños y niñas de 6 años de una clase la siguiente situación (Vila, 1998):

“Si un niño tiene 7 lápices y le quitan 7, ¿podrá escribir?”

Uno de los niños responde diciendo que “eso dependerá de si tiene bolígrafos o rotuladores”. Esta respuesta no sólo no es admitida como correcta, sino que incluso es entendida por la profesora como una especie de rebeldía. Cuatro años más tarde, cuando a este niño se le estaba recordando la anécdota, interrumpió afirmando: “Qué problema más tonto, ¡claro que no podrá escribir!”.

Exponemos en segundo lugar las dificultades observadas en el proceso de resolución de *problemas no estereotipados* (PNE), presentados en un contexto más o menos familiar, que no requieren complejas estrategias de resolución, o más aún, que admiten métodos, estrategias o procesos de ejecución informales.

¹Un trabajo más extenso sobre estos aspectos puede consultarse en: *Pensar en clase de matemáticas. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. A. VILA y M.L. CALLEJO. Narcea, Madrid (en imprenta)

Una fuente muy importante de obtención y análisis de errores de este tipo es la de las llamadas evaluaciones externas, no sólo por la extensión de la población a la que se aplican, sino principalmente porque el alumnado se enfrenta a situaciones propuestas por profesorado ajeno, y en consecuencia a situaciones para las cuales no ha sido adiestrado *ad hoc*. En España, en el informe de las pruebas correspondientes al “Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias” (TIMSS)² sobre alumnado de 13-14 años, se cita el siguiente ejemplo:

“Las tres quintas partes del alumnado de una clase son chicas. Si añadimos a esta clase 5 chicas y 5 chicos, ¿qué afirmación es cierta?”

- a. hay más chicas que chicos
- b. hay igual número de chicos que de chicas
- c. hay más chicos que chicas
- d. con la información dada, no es posible saber si hay más chicos o chicas”

A pesar de que el 62% del alumnado opta correctamente por la opción (a), queremos resaltar que uno de cada seis alumnos optó por la opción (d). Aunque el problema es poco complejo, incluso para la edad a la que era propuesto, su carácter no estereotipado hace que requiera de un abordaje reflexivo, no automático, ni asociado de forma mimética a algoritmos o sistemas conceptuales.

Y finalmente, abordando el papel que creemos que debiera tener la educación matemática para aquellos alumnos especialmente capacitados, nos preguntamos: ¿Qué es lo que hace que algunos “buenos alumnos” resuelvan bien (excelentemente) algunos PNE y en cambio otros se bloqueen, den respuestas rápidas o incoherentes, o se conformen con bajos niveles de solución?

Un ejemplo, que requiere el empleo de estrategias de poca complejidad, es el siguiente, propuesto a alumnos de 12 años (Vila, 2001):

“Imagínate una tira larga de papel (figura 1). Dóblala por la mitad haciendo coincidir los dos extremos uno sobre otro. Cuando la vuelvas a abrir verás una marca de pliegue en medio. Si en lugar de doblarla una sola vez, lo haces dos veces, siempre por la mitad y en el mismo sentido, al volverla a abrir observarás 3 marcas de pliegue. ¿Cuántos pliegues verás en medio si en total doblas la tira 10 veces, cada vez por su mitad?”

Por una parte, Mireia, alumna con un rendimiento académico impecable, muestra una absoluta ingenuidad en la resolución, asociando el enunciado propuesto a métodos recientemente aprendidos, en concreto aplicando criterios de

²López y Moreno (1997)

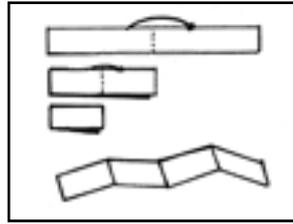


Figura 1

proporcionalidad: “si al doblar cinco veces aparecen 15 pliegues, al doblarlo 10 veces aparecerán 30 pliegues”.

Otra alumna brillante, Laia, aborda de forma adecuada el problema: prueba casos sencillos, organiza los datos en forma de tabla y busca pautas, en este caso de recurrencia. Sin embargo, en su exploración comete un error y dado que no contrasta la validez de su conjetura (¿por qué debía hacerlo?), sigue un proceso erróneo y da una respuesta muy alejada de la admisible e incluso creíble (figura 2).

Cada vez que se dobla un papel en n partes
se nombran los doblados y se suman los:

1.º Doblado = 2.º doblado

2 "	= 2 "	+ 1 doblado que formó 2
3 "	= 3 "	+ 3 doblados "
4 "	= 4 "	+ 6 doblados "
5 "	= 5 "	+ 10 doblados "
6 "	= 6 "	+ 15 doblados "
7 "	= 7 "	+ 21 doblados "
8 "	= 8 "	+ 28 doblados "
9 "	= 9 "	+ 36 doblados "
10 "	= 10 "	+ 45 doblados "

R-En total se formó 35 doblados

Figura 2

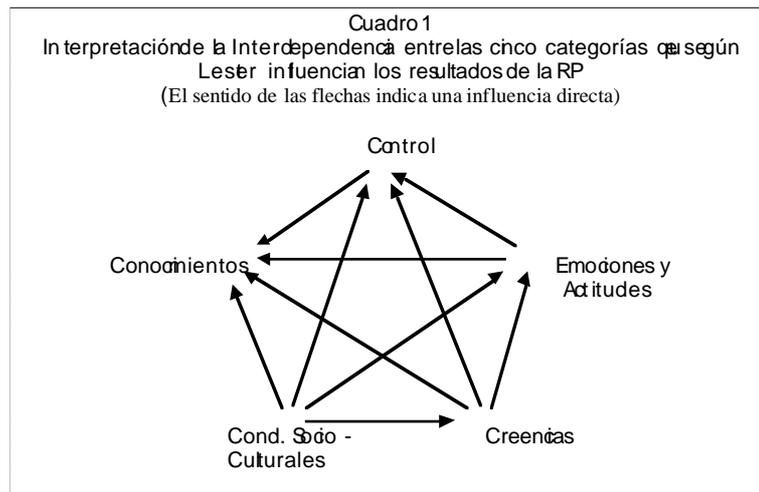
Finalmente, Marina, otra alumna no menos brillante, en su hoja de resolución organiza también sus datos en una tabla y centra sus esfuerzos en la búsqueda de pautas; pero a diferencia de Laia, contrasta la validez de su conjetura, lo cual le lleva a conseguir una solución admisible e incluso rica y general, buscando pautas y expresando el número de pliegues en función del número de veces que se dobla el papel. Sin embargo, puestos a hacerle una crítica, la respuesta no se corresponde estrictamente con la pregunta formulada: el resultado obtenido no expresa el número de pliegues sino el número de partes en las que queda dividida la tira de papel.

Este tipo de comportamiento se observa también en las competencias nacionales e internacionales, a las que acuden alumnos brillantes (Callejo 1994).

Hemos expuesto pues brevemente tres tipos de respuestas incorrectas, queriendo con ello mostrar la heterogeneidad y magnitud de la problemática a la que queremos hacer referencia.

En el último caso descrito los alumnos y alumnas conocían los conceptos y algoritmos necesarios para dar una respuesta correcta, por tanto las causas de sus errores hay que buscarlas en otros aspectos que inciden en el proceso de resolución de un problema y que influyen en el éxito o fracaso ante la tarea.

Desde la investigación en didáctica de la matemática se han elaborado marcos teóricos que dan cuenta de por qué los resolutores no tienen éxito al resolver problemas. Así, Lester (1987), ha distinguido cinco categorías interdependientes: *los conocimientos, el control, las emociones y actitudes, las creencias y las condiciones socio-culturales*. En el esquema del cuadro 1 hemos interpretado las relaciones que Lester considera entre ellas. En el mismo se ilustra cómo la comprensión / uso de ideas y técnicas matemáticas se desarrolla en situaciones culturales, y que las influencias de éstas se dejan sentir en cualquiera de las otras categorías.



Con una clara visión del papel capital que juegan las creencias en el conjunto del rendimiento en RP (observemos en el esquema que directamente y también indirectamente a través de otros aspectos, inciden sobre la utilización de los conocimientos), Lester está muy próximo a la idea de Schoenfeld (1985, 1992) en cuanto al “papel explicativo” de éstas. En esta línea Schoenfeld (1992) distingue cinco aspectos: *conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos y prácticas*. Así, en particular, Schoenfeld

considera que cuando un alumno dispone de un buen bagaje de conocimientos y estrategias, y tiene un buen control de lo que hace, la única cosa que permite explicar el fracaso es su sistema de creencias³.

Las respuestas del primer niño, que responde de forma lógica y coherente a los 6 años, pero que a los 10 años responde con “la lógica” de la respuesta esperada por la maestra, muestran un cambio de creencias acerca de las respuestas que se deben dar en el contexto escolar. La elección de la opción (d) en el problema propuesto en el TIMSS se puede interpretar a partir de la creencia de que “para resolver un problema de matemáticas hay que hacer cálculos empleando los datos del enunciado; si no se puede hacer es que falta información”. En las respuestas dadas al problema de la tira de papel pueden subyacer creencias relacionadas con el proceso de abordaje y de verificación de la resolución de un problema, por ejemplo las siguientes: “cuando se lee un problema se aplica la primera idea que viene a la cabeza”, por tanto antes de hacer no se trata de comprender el enunciado y el problema; o “la resolución de una cuestión matemática termina cuando se encuentra la solución”, en consecuencia no hacer falta verificarla. Las creencias de estos alumnos acerca de lo que es un problema, del tipo de respuesta que deben dar y de los procedimientos y estrategias a emplear, explican en parte sus comportamientos.

A continuación exponemos un marco teórico acerca de las creencias, su origen y su formación, su estructura y la relación con las prácticas, para pasar luego a analizar las creencias de un grupo de alumnos.

2 Diferentes aproximaciones a las creencias

El término “creencia” se utiliza en distintas áreas de conocimiento (filosofía, teología, psicología, inteligencia artificial, etc.) con distintos significados; también se emplea en la vida cotidiana con diversas acepciones. Según E. Pehkonen y G. Törner (1996), en la bibliografía específica de investigación en didáctica de las matemáticas, el concepto de creencia es ambiguo. Se encuentran más referencias implícitas que definiciones formales explícitas, aparece en ocasiones en oposición a otros conceptos como conocimiento, actitud, concepción, etc. o como una explicación de determinadas formas de proceder en la actividad matemática.

2.1 Conocimiento, concepción y creencia

Aunque las fronteras entre *conocimiento* y *creencia* están a veces poco claras, es clásica la diferenciación de R.P. Abelson (1979) atendiendo a los siguientes

³Citando a Puig (1996: 43), “cada elemento que introduce [Schoenfeld] (en el transcurso del tiempo y de sus investigaciones) puede verse como el resultado de un intento de explicar por qué los elementos anteriores son incapaces de dar cuenta de por qué los resolutores no tienen éxito al resolver problemas”.

aspectos: el carácter más objetivo de los conocimientos y más subjetivo de las creencias, pues éstas se pueden mantener con diferentes grados de convicción; los conocimientos están consensuados por un determinado grupo humano, sin embargo las creencias no siempre son fruto de un consenso; los conocimientos responden a unos criterios de verdad, que no han de satisfacer las creencias.

En cuanto a las relaciones entre *concepción* y *creencia*, es un tema controvertido, pues mientras algunos autores utilizan ambos términos indistintamente, como sinónimos, otros entienden que estos conceptos están relacionados, pero no significan lo mismo. A.G. Thompson (1992:130) considera que las creencias son un tipo de concepciones, pues define a éstas como “una estructura mental más general, que encierra creencias, significados, conceptos, proposiciones, imágenes mentales y preferencias”. J.P. Ponte (1994:199) define las concepciones como “los esquemas subyacentes de organización de conceptos, que tienen esencialmente naturaleza cognitiva”.

Nuestra postura está más cerca de la de J.P. Ponte que de la de A.G. Thompson, pues reservamos el término *concepción* para referirnos a las ideas del alumnado asociadas a conceptos concretos; por ejemplo, hablaremos de “concepciones de los alumnos sobre la probabilidad”. Y usaremos el término *creencia* para referirnos a las ideas del alumnado asociadas a actividades y procesos matemáticos (ejercicios, problemas, demostración, resolución de problemas...) y a la forma de proceder en el quehacer matemático; por ejemplo, diremos “las creencias del alumnado sobre la forma de abordar problemas de probabilidad”. Pero no circunscribimos el concepto de *creencia* a las ideas acerca de la matemática exclusivamente, sino también a las ideas sobre el sujeto que ejerce la actividad matemática y sobre el aprendizaje.

2.2 Otras aproximaciones

A partir de los rasgos expuestos, vamos a tratar de elaborar una definición de las creencias, acogiendo también otros rasgos que se subrayan en la abundante literatura sobre el tema: su carácter subjetivo, su contenido, su relación con la afectividad y con el contexto y su naturaleza.

D.B. McLeod (1992) define las creencias como las *experiencias y conocimientos subjetivos* (imágenes) del estudiante o del profesor. Pero otras personas, fuera del ámbito escolar, tienen también creencias sobre la matemática, ya sea por la presencia de esta ciencia en la vida cotidiana, en los medios de comunicación o en el trabajo, ya sea por la forma en que aprendieron matemáticas.

Otros autores se refieren a las creencias subrayando su contenido. Por ejemplo F.K. Lester, J. Garofalo y D.L. Kroll (1989) las definen como el conocimiento subjetivo del individuo sobre sí mismo, sobre las matemáticas, la resolución de problemas y los temas relacionados con el planteamiento de los problemas.

Otras definiciones tienen en cuenta aspectos *cognitivos* (comprensión) y *afectivos* (sentimientos), así como la influencia de las creencias en el modo de “hacer

matemáticas”. Por ejemplo, para A.H. Schoenfeld (1992:358) “la comprensión y los sentimientos de un individuo que modelan la forma en que conceptualiza y se implica en la actividad matemática” son sus creencias. Nos parece importante destacar estos tres componentes de las creencias: cognitivo, afectivo y contextual, siendo el componente cognitivo más potente que el afectivo, por eso tienen un alto grado de estabilidad.

Una caracterización más explícita de este concepto es fruto de una discusión en el *Second MAVI-Workshop*, conducida por E. Pehkonen (citado en Carrillo 1996):

- a) Hay diferentes grados de consciencia de las creencias; hay creencias inconscientes, semiconscientes y conscientes, desde un 0 a un 100%.
- b) Las creencias están ligadas a situaciones.
- c) Algo es más conocimiento que creencia cuanto menor es el papel que desempeñan los afectos. No obstante habría que distinguir el conocimiento personal y el que se estima como objetivo.
- d) Hay que caminar hacia concepciones más dinámicas de las creencias.
- e) Más que de creencias básicas debería hablarse de creencias primitivas.
- f) Afectos, creencias y conocimientos son tres conceptos de los que no se sabe bien cuáles son sus inclusiones e intersecciones.

En cuanto a la *naturaleza* de las creencias, S. Llinares (1992) distingue los tres aspectos siguientes:

1. *Dominio*, definido como el “envoltorio” y los compromisos personales de la creencia establecida. Este componente se puede inferir del uso de afirmaciones que describen elecciones personales, decisiones y acciones (es decir, el contenido de la creencia).
2. *Razones* o argumentos que acompañan la elección de la creencia y relacionan las creencias y las acciones. Este componente se infiere del uso de los términos “porque” y “como”, que explican la importancia de la creencia.
3. *Práctica aplicada*, que describe la transferencia individual de las creencias a la práctica. La utilización de este componente ayuda a describir las creencias individuales y a realizar las comparaciones entre los sistemas de creencias de los estudiantes.

A partir de lo expuesto hasta ahora, sintetizamos que las creencias son un tipo de conocimiento subjetivo referido a un contenido concreto sobre el cual versan; tienen un fuerte componente cognitivo, que predomina sobre el afectivo

y están ligadas a situaciones. Aunque tienen un alto grado de estabilidad, pueden evolucionar gracias a la confrontación con experiencias que las pueden desestabilizar: las creencias se van construyendo y transformando a lo largo de toda la vida.

2.3 Origen de las creencias

Otra forma de aproximarse a las creencias es por su origen. J.P. Ponte (1994) las entiende como verdades personales e intransferibles de cada uno que derivan de la experiencia o la fantasía y que tienen un componente afectivo y de valoración.

Las creencias se van modelando según el tipo de actividades, más o menos estereotipadas, repetitivas o creativas, que se proponen en clase de matemáticas y que forman parte de la cultura escolar. También por la propia organización de los contenidos, a veces en compartimentos estancos, de acuerdo con las ramas clásicas de la matemática. A menudo las matemáticas escolares olvidan el lado estético, lúdico o experimental de la matemática, la dimensión histórica y humana de esta ciencia, su aportación al desarrollo de la humanidad, su relación con otras ciencias y con el resto de la cultura o las posibilidades que nos da desarrollar nuestra inteligencia y de disfrutar de ello.

Los diversos espacios de socialización como la familia, los grupos de iguales, los medios de comunicación social, las actividades de ocio y tiempo libre como los clubs matemáticos, y los mitos sociales sobre esta ciencia, originan, refuerzan o contradicen las creencias sobre la matemática. En general la imagen social de la matemática es negativa, se presenta a menudo como una ciencia rígida, aburrida, mecánica, difícil, donde no cabe la creatividad, ni la estética ni el juego, lo que no anima a los alumnos a superar las dificultades que se les vayan presentando.

M. Fishbein e I. Ajzen (1975) señalan tres tipos de creencias, según su origen:

1. *Creencias descriptivas*: Son las que provienen de la observación directa y sobre todo de la experiencia, del contacto personal con los objetos; estas creencias se mantienen con un alto grado de certeza al ser validadas continuamente por la experiencia y suelen tener un peso importante en las actitudes de los individuos.
2. *Creencias inferenciales*: Son las que tienen su origen en relaciones previamente aprendidas o en el uso de sistemas formales de codificación; en cualquier caso, la base de la creencia inferencial es siempre algún tipo de creencia descriptiva.
3. *Creencias informativas*: Como su nombre indica, provienen de informaciones que proceden del exterior: otras personas, medios de comunicación social, etc.

Resumiendo, las creencias tienen su origen en la experiencia, en la observación directa o provienen de informaciones, y a veces son inferidas de otras creencias.

2.4 Sistemas de creencias

Una creencia nunca se sostiene con independencia de otras, por ello se suele hablar más de *sistemas de creencias* que de creencias aisladas. Una definición clásica es la de M. Rokeach (1968:2): “una forma organizada psicológicamente, aunque no necesariamente lógica, de todas y cada una de las incontables creencias personales sobre la realidad física y social”.

No se trata por tanto de una suma o de una yuxtaposición de creencias, sino de una red organizada. E. Pehkonen y G. Törner (1996) se las imaginan como un plato de espaguetis: si se tira de uno de ellos, posiblemente se acabará tirando de muchos más. También podríamos pensar en un frutero con cerezas: si se coge un pequeño racimo de dos o tres suele traer otros enganchados. Estos ejemplos ilustran el enredo y la relación entre ellas.

T.F. Green (1971) afirma que la noción de sistema de creencias es una metáfora para examinar y describir cómo se organizan las creencias de un individuo. Al igual que los sistemas de conocimientos, su potencialidad no reside tanto en su contenido cuanto en sus relaciones: el sistema de creencias de una persona se caracteriza por la forma en que cree y no tanto por lo que cree. Dos personas pueden tener las mismas creencias y distintos sistemas de creencias y por tanto abordarán y desarrollarán de manera diferente la actividad matemática.

T.F. Green ha identificado tres dimensiones de los sistemas de creencias, que no tienen que ver estrictamente con su contenido, sino con el modo en que están relacionadas entre sí dentro del sistema:

1. Algunas creencias se relacionan entre sí al modo de premisas y conclusión, por lo que puede hablarse de creencias *primarias* y *derivadas*. Su relación es cuasilógica, distinta de la de los sistemas de conocimientos donde la relación es de tipo lógico.
2. Las creencias se mantienen con diferente grado de convicción y distinta fuerza. En este sentido cabe hablar de su centralidad psicológica: las que se sostienen con mayor fuerza son *centrales* y las demás son *periféricas*.
3. Las creencias suelen mantenerse “enclaustradas”, sin someterse al contraste con el exterior. El contraste tiene más de confrontación defensiva que de apertura para su enriquecimiento o para su modificación.

Una creencia puede ser a la vez primaria y periférica o también derivada y central, ya que los conceptos de centralidad psicológica y de relación cuasilógica son independientes el uno del otro.

En cuanto a la *coherencia interna*, por una parte es importante destacar que la estructura en racimos (clusters) más o menos aislados e interrelacionados los unos con los otros, puede explicar algunas de las inconsistencias del sistema de creencias: es posible mantener simultáneamente creencias opuestas, protegidas en sus respectivos clusters, sin que ello suponga ningún conflicto; más aún, el propio “escudo protector” puede llegar a convertirse en una nueva creencia (Llinares, 1992). Por otra parte es importante destacar también que la estructura del sistema favorece que puedan ser mantenidas creencias “a pesar de” evidencias contrarias; más aún, estas creencias no pueden ser modificadas simplemente introduciendo las “razones evidentes”.

Dada la diferencia entre conocimiento y creencia, los sistemas de creencias presentan también diferencias con los sistemas de conocimientos (Abelson, 1979:355-360):

1. “Los elementos (conceptos, proposiciones, reglas, etc.) de un sistema de creencias no están consensuados. Esto es, los elementos de un sistema de creencias pueden ser bastante distintos de un segundo que se refieran al mismo contenido (...)
2. Los sistemas de creencias se refieren en parte a la existencia o no de determinadas entidades conceptuales (...)
3. Los sistemas de creencias incluyen a menudo representaciones de “mundos alternativos” (...)
4. Los sistemas de creencias dependen en gran medida de componentes valorativos y afectivos (...)
5. Los sistemas de creencias tienden a incluir una cantidad sustancial de material episódico (...)
6. El contenido a ser incluido en un sistema de creencias suele ser muy “abierto”. Esto es, es difícil delimitar las fronteras del sistema de creencias, excluyendo conceptos irrelevantes (...)
7. Las creencias pueden sostenerse con un grado variable de certeza (...).

En resumen, la estructura del sistema de creencias de un sujeto ayuda a explicar algunos comportamientos, como por ejemplo que sostenga al mismo tiempo creencias contradictorias entre sí o que se resista a cambiar aquellas que no son adecuadas, a pesar de ofrecerle “razones evidentes” para modificarlas. En estos casos la inconsistencia y la estabilidad del sistema de creencias, en mayor o menor grado, se debe a que estén más o menos ligadas entre sí y más o menos agrupadas y enclaustradas.

Pero para poder modificar las creencias es necesario conocer no sólo su forma de relacionarse y de agruparse, sino también el tipo de relación que se da entre ellas, es decir, si son primarias o derivadas, centrales o periféricas, porque en la medida en que se trate de desestabilizar y cambiar las creencias primarias y centrales, se producirá una “crisis” mayor en el sistema de creencias del sujeto, que deberá reestructurarse y reconstruirse para estabilizarse de nuevo.

2.5 Creencias y prácticas

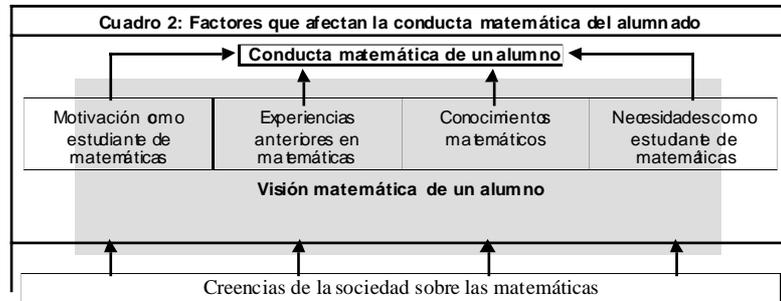
El interés por conocer la estructura de los sistemas de creencias de los estudiantes, del profesorado y, en general, de otros agentes educativos, radica en el hecho de que inciden en sus comportamientos, ayudan a explicarlos y ofrecen pistas para tratar de modificarlos. Las creencias influyen en la forma en que se aprende, se enseña y se aplica la matemática; a su vez, la forma de aprender y utilizar la matemática configura las creencias. Aunque las creencias y las prácticas forman un círculo que a veces es difícil de romper, se puede intentar quebrar por algún lado: se ha constatado que los cambios en las prácticas de la clase pueden modificar las creencias tanto del profesorado como del alumnado.

Según E. Pehkonen y G. Törner (1996:102) “las creencias pueden tener un poderoso impacto en la forma en que los alumnos aprenden y utilizan las matemáticas y, por tanto, pueden ser un obstáculo al aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos que tienen unas creencias rígidas y negativas de las matemáticas y su aprendizaje, fácilmente se convertirán en aprendices pasivos, que cuando aprenden enfatizan la memoria sobre la comprensión”. Añaden que la influencia de las creencias sobre las prácticas se puede entender de distintos modos:

- como un sistema regulador;
- como un indicador;
- como una fuerza inerte;
- como una consecuencia de los aspectos anteriores que llamaremos “carácter pronóstico”.

Las creencias matemáticas de un individuo, su punto de vista matemático, forman un *sistema regulador de su estructura de conocimiento*; dentro de este marco actúa y piensa y a su vez este marco influye fuertemente en su rendimiento. Por ejemplo, si un estudiante considera que la resolución de un problema es un proceso lineal donde no hay lugar para hacer ensayo y error, abandonará un problema cuando se le presente la primera dificultad y como consecuencia sus posibilidades de aprendizaje se verán mermadas.

Para concretar este carácter regulador de las creencias, M.L. Frank (1985) ha señalado algunos factores que afectan a la conducta del alumnado cuando resuelve problemas, que E. Pehkonen y G. Törner (1996) han adaptado e ilustrado con el esquema del cuadro 2.



En él las creencias de un alumno, entendidas como su visión matemática, aparecen como trama de fondo de sus motivaciones, sus experiencias, sus conocimientos y sus necesidades como estudiante, e influyen sustantivamente sobre sus prácticas. Dos aspectos están más estrechamente relacionados con las creencias: las experiencias previas, que influyen a menudo de forma inconsciente, y los conocimientos matemáticos, en los que las creencias están fuertemente involucradas. Sin embargo, la motivación y las necesidades de un alumno no siempre están conectadas con sus creencias.

Por último, las creencias de la sociedad, como pueden ser algunos mitos (matemáticas = cálculo o matemáticas = abstracción y manipulación de números), afectan a la conducta matemática del alumnado a través de su sistema de creencias. Estas creencias se comparten de forma más o menos explícita en distintos ámbitos de socialización, además de la escuela: en la familia, en los grupos de iguales, entre los compañeros, en los medios de comunicación social, etc. En estos espacios las creencias dominantes desde el punto de vista de su frecuencia o de su centralidad psicológica, pueden entrar en conflicto con otras. Por ejemplo, mientras los medios de comunicación social suelen presentar a menudo una imagen de la matemática como una ciencia difícil y aburrida, como un filtro académico de selección y, en el peor de los casos, como un ogro, en un club matemático ésta aparece con un rostro más amable que tiene que ver con la belleza, el juego, la historia de las ideas, etc. Los alumnos viven pues dentro de una compleja red de influencias en las que la matemática está presente, que va modelando sus creencias en torno a la matemática y al quehacer matemático.

En cuanto al segundo aspecto, las creencias juegan un papel de *indicador* de aspectos que no son directamente observables. En el caso del alumnado, nos permiten, por ejemplo, hacer inferencias sobre su experiencia escolar anterior de enseñanza/aprendizaje.

Con relación al *aspecto inercial* (en sentido negativo), las prácticas que han

tenido éxito durante un tiempo prolongado y sus creencias asociadas, están a veces tan profundamente arraigadas que si un alumno tiene una determinada visión de la matemática, por ejemplo una visión rígida, cualquier otro enfoque le confundirá. Ante esta situación algunos alumnos mantienen sistemas de creencias dualistas, otros optan por rechazar como “matemáticas” aquellas actividades que no se adecuan a sus creencias; en fin otros ponen en crisis sus propias creencias. Por tanto si se quieren introducir cambios profundos en la clase de matemáticas, se ha de tener en cuenta pues que las creencias de profesores y alumnos actúan como una fuerza de inercia.

3 Creencias de un grupo de alumnos

Tras exponer qué son las creencias, sus semejanzas y diferencias con otros conceptos y sus relaciones con las prácticas, pasamos a presentar y a comentar ejemplos concretos.

En una investigación reciente (Vila, 2001) hemos identificado los sistemas de creencias predominantes en un grupo de alumnos de Primer curso de Secundaria Obligatoria, de edades comprendidas entre 11 y 12 años, procedentes de distintos centros donde han cursado la educación Primaria, aunque todos ellos en ese momento iniciaban esta etapa educativa en el mismo Instituto de Educación Secundaria (IES). Son 61 alumnos con una capacidad y voluntad de aprendizaje como mínimo en la media. Describiremos el origen y formación de sus creencias y sus consecuencias sobre sus esquemas de actuación cuando resuelven problemas no estándar.

Como elementos descriptores de estos *sistemas de creencias*, se han utilizado los siguientes:

1. la caracterización predominante de la idea de “problema de matemáticas”, de la naturaleza de la *actividad de RP* y de los aspectos que inciden en el aprendizaje y mejora de la RP;
2. el análisis detallado de cada una de las categorías de creencias estudiadas, en función del objeto de la creencia;
3. la identificación de la estructura de estos sistemas de creencias, en particular:
 - los conjuntos (clusters) que delimitaban creencias estrechamente relacionadas entre ellas,
 - las creencias primarias y creencias derivadas, estas últimas establecidas o mantenidas como consecuencia de las primeras,
 - las creencias centrales y periféricas, las primeras mantenidas con mayor potencia o fuerza,

- las incoherencias o contradicciones internas del sistema de creencias.

En este artículo y remitiéndonos al mencionado estudio, expondremos solamente las principales conclusiones de la investigación relacionadas con el apartado (1).

3.1 Creencias sobre la resolución de problemas

Así, hemos encontrado que la tendencia que predomina en el Grupo es la de identificar un “problema de matemáticas” como una categoría de pregunta escolar⁴, de naturaleza aritmética (“las matemáticas son cálculo”), que viene caracterizada por aspectos formales como la presentación, formato,... (p.e. “enunciado verbal es sinónimo de problema”) y cuya respuesta es el resultado de los cálculos que preceptivamente se supone que propone el enunciado. En particular, la diferencia entre problema y ejercicio no se percibe en los conocimientos del resolutor sino en esas características formales que mencionábamos. Otro aspecto identificado de forma relevante en el Grupo es el que hace precisamente referencia a cuál es el papel del enunciado: se trata de una relación de mandatos que hay que saber “descifrar” (consideran que en eso consiste “entender” el problema) para a continuación saber ejecutar; es ésta la dificultad “añadida” al problema, con relación al ejercicio: la explicitación o no de lo que se espera que se haga.

Una parte importante del alumnado del Grupo mantiene fuertemente creencias en torno a la existencia de una categoría diferenciada de tareas, con denominaciones anecdóticas del estilo de “*problemas de ingenio, de lógica ...*”; el acuerdo ya no es unánime con relación a si se trata de “tareas matemáticas” o se trata de tareas que “a veces se plantean en clase de matemáticas”. En cualquier caso, se les niega mayoritariamente la categoría de “*matemáticas importantes*”⁵

En consecuencia, la tendencia dominante es la de caracterizar la RP a la vez como una actividad de *reconocimiento / aplicación* de las técnicas trabajadas en clase y como una actividad de *acreditación* de las técnicas aprendidas. Más concretamente, resolver un problema consiste para la mayoría de los alumnos y alumnas de este Grupo en averiguar cuáles son las operaciones adecuadas para obtener el resultado pedido, resultado que es meritorio obtener a partir del método trabajado recientemente en clase, sin encontrar dificultades ni bloqueos, mediante un proceso lineal que avance directamente de los datos al resultado final. Creencias concretas que nos ilustran y ayudan a explicar esta

⁴Schoenfeld (1992) identificaba ya la creencia de que “las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real”

⁵“Sólo las matemáticas que se preguntan en clase son importantes y dignas de saberse” (Garofalo,1989)

caracterización serían las siguientes⁶ : “solo hay una manera de resolver correctamente cada problema; normalmente es el método que el profesor acaba de mostrar recientemente en clase” (Schoenfeld, 1992); “la primera vez que se lee el enunciado del problema se debería ser capaz de entender inmediatamente qué se pide o qué se pretende que se calcule o se decida” (Woods, 1987); “los problemas de matemáticas son tareas para aplicar reglas aprendidas, por tanto se pueden resolver fácilmente en pocos pasos” (Frank, 1988); “la resolución de un problema se acaba cuando se encuentra la solución” (Callejo, 1994); “el resultado es más importante que el proceso seguido. Si no se encuentra la solución se ha fracasado” (Callejo, 1994).

A pesar de ser ésta la tendencia más acusada en el Grupo, el estudio de algunos casos arroja luz sobre el rango identificado. Así, en un extremo, las creencias rígidas de algunos, en el otro extremo las creencias flexibles y con una amplia visión de otros, y entre ellos una gran casuística, como por ejemplo visiones dualistas de las matemáticas y de la RP: por una parte una visión más bien rígida de la naturaleza de los “problemas habituales” y de la manera de proceder en su resolución; por otra una visión rica, abierta y flexible en cuanto a la manera de proceder en aquellos problemas que se asumen como retos.

En cuanto al aprendizaje y mejora de la actividad de RP, la tendencia subrayada en el Grupo es a centrar las claves que mejoran el *éxito* (reduciendo el significado de éste a la obtención del resultado correcto) en dos aspectos: el aprendizaje de técnicas y conceptos matemático⁷ y la mecanización de métodos-tipo de resolución, dando por supuesto que éstos existen y que es papel del profesorado “enseñarlos”. En particular se supravalora la importancia de la “buena lectura” del enunciado, en tanto en cuanto ésta se cree que permite identificar claramente qué es lo que se tiene que aplicar.

Una conclusión muy importante del estudio (Vila, 2001) es que el rendimiento académico en matemáticas no es una variable que determine diferencias relevantes en el conjunto de los sistemas de creencias identificados. Esta conclusión tiene una razonable explicación, que creemos que cabe buscarla en el hecho de que a menudo los instrumentos y criterios utilizados para evaluar (¿o medir?) los conocimientos en matemáticas se basan en los aspectos más algorítmicos o conceptuales de ésta, siendo por lo tanto la medida del rendimiento matemático una medida sesgada de la auténtica capacidad matemática del alumno en cuestión.

⁶hemos optado por citar redactados documentados bibliográficamente, más que por los redactados identificados de los alumnos, con los cuales se corresponden.

⁷Schoenfeld (1992) ya identificaba la visión simplista de que “los alumnos que han entendido la matemática serán capaces de resolver cualquier problema propuesto en cinco minutos o menos”

3.2 Origen y formación de las creencias

Por otra parte, en cuanto a los aspectos y *agentes* identificados con relación al *origen y formación de las creencias* del Grupo, distinguiremos los más relevantes agrupados en tres grandes categorías: los agentes que inciden o tienen lugar en el propio contexto escolar, los que inciden fuera de él y algunos aspectos afectivos sobre los cuales es importante centrar la atención.

Contexto escolar

En cuanto a los agentes internos al contexto escolar, se han identificado con especial relevancia aspectos relacionados con la naturaleza de las tareas desarrolladas y el papel del profesorado, y con una menor incidencia, pero en absoluto obvia, aspectos relacionados con el papel que juega la evaluación, las actividades de *popularización* de las matemáticas y finalmente los propios compañeros de clase.

En cuanto a la naturaleza de las tareas escolares, el estudio nos permitió distinguir a su vez dos grandes aspectos:

- a) Los que podríamos englobar bajo el denominador de las experiencias vividas en cursos anteriores: se puede tratar de experiencias ricas y personalizadas, con abundancia de tareas de resolución de problemas, con metodologías centradas en trabajos en grupos y actitudes interrogativas, que inciden en la formación de sistemas de creencias muy flexibles y de un amplio rango de visiones, o se puede tratar también de experiencias rutinarias y compartimentadas, y de escaso contenido heurístico, las cuales inciden en la formación de sistemas de creencias rígidos y mecanicistas, de visiones acreditativas e ilustrativas del papel de la RP.
- b) Los que pueden relacionarse con distintas tipologías y naturalezas de trabajo en clase, en función de que se desarrollen en horas de materias comunes (habitualmente rutinarias, explicación-práctica, ...) u optativas (más a menudo participativas, investigativas, ...) o del profesorado que la proponga, o al menos con la percepción de que ello sea así. El estudio permitió asociar esta dualidad a la formación a su vez de sistemas de creencias dualistas, con creencias que conviven contrapuestas, llegando a dicotomizar la actividad de resolución de problemas según el contexto en el que se plantee. Un efecto a añadir es que habitualmente una de estas visiones (la rutinaria, acreditativa) acaba considerándose la "importante", o incluso se llega a negar el carácter matemático de la otra.

En cuanto al papel del profesorado, el estudio identificó una relación poco frecuente pero sí importante entre el hecho de otorgar un papel *normativo* a la conducta matemática del profesorado (principalmente desde la perspectiva *sancionadora*) y un proceso de formación de creencias relacionado con el papel acreditativo de la resolución de problemas, normalmente originado en autoimposiciones por parte del propio alumnado. Por otra parte, las experiencias (agradables y desagradables) vividas con relación a determinados profesores

“especiales”, acaban siendo a menudo modeladoras de creencias de naturaleza muy diversa.

Finalmente, en cuanto a otros aspectos del contexto escolar, la evaluación tiene una incidencia derivada principalmente del papel normativo de los exámenes (las tareas son relevantes en función de si pueden ser susceptibles de formar parte de un examen) y de la componente *sancionadora* de éstos (por la generación de incertidumbre, frustración y en algunos casos de competitividad); las actividades de *popularización* de las matemáticas tienen una incidencia que cabe relacionar parcialmente con un aspecto ya antes mencionado: la distinta naturaleza de tareas en situaciones escolares diversas; y la incidencia de los compañeros de clase cabe relacionarla con aspectos como la competitividad, el espíritu de superación, la cooperación, el individualismo . . .

Agentes externos al contexto escolar

En la segunda de las grandes categorías, los agentes externos al entorno escolar, se identificaron con especial relevancia el papel que juegan los padres y familiares y el papel de los denominados mitos sociales. Con relación al primero de ellos, quisiéramos destacar dos aspectos:

a) El estudio estableció la fuerte influencia de la resolución de problemas junto con familiares directos, fuera del entorno escolar, sobre el proceso que lleva a establecer una visión dualista relacionada con la coexistencia de dos naturalezas de actividad matemática, junto con las inconsistencias en el sistema de creencias que se derivan de ellos.

b) Por otra parte, la presión familiar a la cual pueda estar sometido un alumno puede suponer un agente importante en el proceso de formación de las creencias, especialmente las relacionadas con un papel principalmente acreditativo y mecanicista de la RP. Sin embargo, el grado de presión puede ir ligado con respuestas afectivas, o canalizaciones del estímulo, relacionadas con creencias que se presentan de forma simultánea y contrapuesta a las anteriores.

Y con relación a los mitos sociales, se identificaron dos de incidencia especial, jugando el papel de reforzadores de otros agentes que pueden considerarse más relevantes: la importancia social de las matemáticas y la asociación entre matemáticas e inteligencia.

Aspectos afectivos

La tercera gran categoría identificada hace referencia a aspectos afectivos que guardan relación con la personalidad del alumnado; estos aspectos no pueden considerarse de forma estricta agentes, aunque en cualquier caso están estrechamente relacionados con otros anteriormente mencionados, jugando un papel capital en el proceso de formación de las creencias.

3.3 Consecuencias

Y finalmente, en cuanto a las consecuencias que pueden establecerse con relación a los esquemas de actuación desarrollados cuando se abordan problemas no

estándar y al papel que en ellos han jugado los correspondientes sistemas de creencias, podemos mencionar que principalmente el Grupo desarrolla *esquemas ingenuos, impulsivos o irreflexivos* o bien esquemas (aunque no pueda llamárseles así) que se limitan a dar una *respuesta rápida* a la pregunta formulada en el enunciado. La práctica totalidad de los esquemas de actuación observados toman como punto de partida la manipulación (a menudo ciega) de los datos del enunciado o de aspectos parciales de éste; son minoritarios los esquemas centrados en un análisis global de la situación planteada.

Es relevante destacar que se constatan relaciones importantes entre estos esquemas de actuación y los sistemas de creencias identificados, en términos de que se observan maneras de proceder menos efectivas entre el alumnado con sistemas de creencias más rígidos o “menos adecuados”, y como hemos dicho independientemente del nivel de resultados académicos. Pero es que de forma más precisa, el estudio nos permite también relacionar el sistema de creencias del alumnado con su manera de proceder y su toma de decisiones durante el proceso de resolución. Por ejemplo, ante un problema no rutinario y no estándar, pero con claros referentes numéricos, como es el de las “tiras de papel doblado” que presentamos en las primeras páginas del presente trabajo, simplificando ligeramente las conclusiones nos encontramos por una parte con aquellos alumnos que lo que destacan en él es la identificación en el enunciado de los referentes numéricos, y por otra parte con aquellos alumnos que lo que hacen es identificar y destacar el carácter no estándar del problema. En el primer caso el alumnado intenta aplicar los “métodos-tipo” de resolución, y entendiendo que la resolución del problema proviene del adecuado “descifrado” del enunciado, y por supuesto de la utilización de las últimas técnicas aprendidas en clase, es donde observamos unas interpretaciones absurdas de la situación (“descifrados ingenuos del enunciado”, supervalorando su aritmeticidad). En el segundo caso, nos hallamos mayoritariamente ante alumnos que ante una situación que acaban de identificar como un no-problema de matemáticas o bien un problema de no-matemáticas, en tanto en cuanto no se requiere la aplicación de los “métodos-tipo”, se limitan a dar una respuesta rápida, obviamente irreflexiva. Sin embargo, una minoría de los alumnos estudiados, reaccionan en un sentido opuesto al identificar que se hallan ante un problema no estándar: su sistema de creencias, más flexible, más rico, les induce a buscar recursos más heterodoxos (estudiar casos concretos, realizar esquemas o tablas, buscar pautas,...) lo cual les lleva a abordar las eficaces de la situación planteada.

Por último, es importante destacar que el estudio nos permite afirmar que estas conclusiones pueden establecerse también si centramos el análisis en el alumnado de mayor rendimiento académico en matemáticas. ¿Qué relevancia tiene este hecho? Creemos que mucha, y más si lo relacionamos con una conclusión anteriormente mencionada en relación a que el rendimiento matemático no determina diferencias relevantes en la identificación de los sistemas de creen-

cias. Es posible que visiones críticas hacia el planteamiento de este trabajo consideren que la importancia y el papel de las creencias matemáticas es mucho menor que la que aquí le otorgamos, y lo es en el sentido siguiente: aprendiendo matemáticas (conceptos, técnicas, procedimientos,...) ya se irá modelando la adecuada visión de qué son las matemáticas, y consecuentemente se asume que “aprendiendo más matemáticas, ya se aprende cuándo y cómo hay que utilizarlas”. Creemos que el propio planteamiento teórico del trabajo en particular y de toda la bibliografía al respecto reduce a simplista, sino a completamente errónea, esta visión; pero es que además los datos citados anteriormente nos muestran que incluso los “mejores” alumnos tienen creencias inadecuadas e incluso ellos cometen errores absurdos y difícilmente explicables por otras vías, cuando sin embargo alumnos con menor “rendimiento matemático” tienen creencias más adecuadas y abordan de manera más eficaz los problemas no estándar.

Conclusión

En este artículo hemos tratado de iluminar un concepto que ayuda a explicar los comportamientos de los estudiantes y que es ambiguo y resbaladizo. También hemos presentado las creencias de un grupo de alumnos que inician la Educación Secundaria y hemos visto que las que dominan no son precisamente las más adecuadas para resolver problemas. Este mismo Grupo nos ha dado luz para conocer cómo se han ido modelando y forjando estas creencias.

Con la clarificación de este concepto y desde el contraste con una realidad concreta nos preguntamos: ¿Cómo podemos diagnosticar y evaluar las creencias del alumnado? ¿Cómo podemos crear ambientes y entornos de aprendizaje que ayuden a los alumnos a abordar la actividad matemática con espíritu abierto, crítico y flexible? ¿Cómo podemos educar a las jóvenes generaciones iniciándoles en los rudimentos de una ciencia con la que pueden disfrutar y constatar sus potencialidades y capacidades para comprender, definir o demostrar? Son preguntas que hemos abordado en otro trabajo (Vila y Callejo, en imprenta) e invitamos al lector a encontrar sus propias respuestas.

Referencias

- ABELSON, R.P. (1979): Differences Between Belief and Knowledge Systems. *Cognitive Science*, 3; pp. 355-366.
- CALLEJO, M.L. (1994): *Un Club Matemático para la diversidad*. Narcea. Madrid.
- CARRILLO, J. (1996): *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más*

- de 14 años. *Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
- FISHBEIN, M. y AJZEN, I. (1975): *Belief, Attitude, Intention and Behavior: An Introduction to Theory and Research*. Addison Wesley. Reading.
- FRANK, M.L. (1985): *Mathematical Beliefs and Problem Solving*. Tesis doctoral. Purdue University. University Microfilms International
- FRANK, M.L. (1988): Problem Solving and Mathematical Beliefs. *Arithmetic Teacher*, 35 (5), pp. 32-34.
- GAROFALO, J. (1989): Beliefs and Their Influence on Mathematical Performance. *Mathematic Teacher* 82 (7), pp. 502-505.
- GREEN, T.F. (1971): Teaching and the Formation of Beliefs. En: *The Activities of Teaching*. NY. McGraw Hill, Book Co (Cap. 3)
- LESTER, F.K. (1987): *Why is problem solving such a problem? Reactions to a Set of Research Papers*. PME, Montreal 1987.
- LESTER, F.K., GAROFALO, J. y KROLL, D.L. (1989): Self-Confidence, Interest, Beliefs and Metacognition: Key Influences on Problem Solving Behavior. En: *MCLEOD y ADAMS (eds.) Affect and Mathematical Problem Solving*. Springer-Verlag, NY.
- LLINARES, S. (1992): Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En: *MARCELO (ed): La investigación sobre la formación del profesorado: métodos de investigación y análisis de datos*. pp. 57-95. Cincel, Buenos Aires.
- LÓPEZ, A. y MORENO, M.L. (1997): *Resultados de Matemáticas. Tercer estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, Madrid.
- MCLEOD, D.B. (1992): Research on Affect in Mathematics Education: A reconceptualization. En: *GROUWS, D.A. (ed.) Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. pp. 575-596. MacMillan, New York.
- PEHKONEN, E. y TÖRNER, G. (1996): Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *ZDM*, 96(4); pp. 101-108.
- PONTE, J.P.(1994): Mathematics teacher's professional knowledge. En: *PONTE, J.P. y MATOS, J.F. (eds.): Proceedings of 18th PME Conference*, vol I, pp. 195-210. Lisboa.
- PUIG, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas*. Comares. Granada.
- ROKEACH, M. (1968): *Beliefs, Attitudes and Values*. Jasssey-Bass, San Francisco.
- SCHOENFELD, A.H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Orlando.
- SCHOENFELD, A.H. (1992): Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics, En: *GROUWS, D.A. (eds): Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. pp. 334-389. MacMillan, New York.

THOMPSON, A.G. (1992): Teacher' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En: *Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning*. MacMillan-NCTM, NewYork, pp. 127-146.

VILA, A. (1998): La idea de problema entre l'alumnat. Reflexions per a la creació d'un ambient de resolució de problemes a l'aula. *BIAIX*, 11; pp. 16-22.

VILA, A. (2001): *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. Versión PDF en www.tdcat.cesca.es/TDCat-0925101-170122/

VILA, A. y CALLEJO, M.L. (en imprenta). *Pensar en clase de matemáticas. El papel del las creencias en la resolución de problemas*. Col. Educación hoy. Narcea, Madrid

WOODS, D.R. (1987): Misconceptions about Problem Solving. *Teaching Thinking and Problem Solving*. Vol. 9(4), pp. 8-9.

MARÍA LUZ CALLEJO
INSTITUTO DE ESTUDIOS PEDAGÓGICOS SOMOSAGUAS.
MADRID

ANTONI VILA
I.E.S. GABRIEL FERRATER.
REUS