Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos

Luz Manuel Santos Trigo*

Resumen

Reformas recientes sobre el currículo matemático destacan la importancia del empleo de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de los estudiantes. ¿Qué procesos del quehacer matemático se favorecen a través del empleo sistemático de este tipo de herramientas? En este trabajo se presentan ejemplos de problemas o actividades donde se ilustra que algunas representaciones que se producen con el empleo de un software dinámico (Cabri-Geometry) pueden ayudar a los estudiantes en procesos de resolución de problemas que incluyen la búsqueda de distintas soluciones, la necesidad de plantear conjeturas, el análisis de casos particulares y la importancia de buscar conexiones y significados de las ideas matemáticas.

Abstract

What aspects of mathematical practices can be enhanced through the systematic use of technological tools in students learning of mathematics? This paper illustrates a set of activities in which the utilization of dynamic software (Cabri-Geometry) might help students generate distinct types of representations that are crucial in problem solving practices. In particular, thinking of several ways to solve the problems, analyzing particular cases, relaxing particular conditions, looking for patterns, and searching for extensions or connection of the problems are activities that students have opportunity to exhibit in their approaches to the problems via the use of the software.

*Terminé de escribir este trabajo durante mi estancia académica en la Universidad de la Laguna con el grupo de Didáctica de las Matemáticas en el Departamento de Análisis Matemático. Agradezco al Dr. Matías Camacho por la invitación y ofrecerme la oportunidad de participar en varias tareas de la agenda de trabajo de su grupo de investigación.

Introducción

En una sociedad cambiante y exigente, el estudio de las matemáticas es una necesidad importante de todos los estudiantes; sin embargo, como lo mencionan Romberg y Kaput:

> ...los cambios hacen imperativo que cualquier respuesta a la pregunta ¿qué matemáticas vale la pena enseñar? sea revisada periódicamente... independientemente del contenido específico, el propósito de enseñar matemáticas puede describirse en términos de enseñar a los estudiantes a usar las matemáticas para construir y comunicar ideas, usarlas como una herramienta poderosa para analizar y resolver problemas, y quedar fascinados con los patrones que ellas abarcan y exponen (pp. 15-16).

En esta dirección resulta necesario identificar aspectos del quehacer matemático que los estudiantes deben desarrollar en sus experiencias de aprendizaje. En los últimos años se ha reconocido que el aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Se acepta que en el proceso de aprender la disciplina, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar donde constantemente busquen y examinen diferentes tipos de relaciones, planten conjeturas, utilicen distintos sistemas de representación, establezcan conexiones, empleen varios argumentos y comuniquen sus resultados. Además el desarrollo de herramientas tecnológicas está influyendo notablemente la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas. Aquí resulta relevante plantear algunas interrogantes:¿Cuándo un artefacto tecnológico llega a transformarse en una herramienta para resolver problemas? ¿Qué procesos de apropiación de la herramienta exhiben los estudiantes en sus experiencias de resolución de problemas? ¿Qué tipo de recursos y estrategias necesitan los estudiantes para transformar un artefacto en una herramienta de resolución de problemas? ¿Qué tipo de representaciones se destacan con el empleo de la tecnología? La discusión de estas preguntas ayuda a entender que el empleo de herramientas tecnológicas por parte de los estudiantes es un proceso en donde paulatinamente se apropian de la herramienta y eventualmente la utilizan en actividades matemáticas que involucren el planteamiento de conjeturas, la construcción y uso de distintas representaciones, la búsqueda sistemática de relaciones y la presentación o comunicación de resultados.

Se reconoce que el uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma de cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Balacheff & Kaput (1994) afirman que una característica única de los ambientes de aprendizaje basados en la computadora es su carácter cognitivo intrínseco. “La interacción entre un estudiante y una computadora se basa en responder a la demanda de los estudiantes vía una representación simbólica o de cálculo, donde la retroalimentación se realiza a través de un registro propio que permite leerse como un fenómeno matemático" (pp. 469-470). El National Council of Teachers of Mathematics NCTM (2000) identifica el uso de la tecnología como un principio que le debe dar soporte a las propuestas curriculares:

> Las calculadoras y computadoras son herramientas esenciales para la enseñanza, aprendizaje, y desarrollo de las matemáticas. Generan imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y realizan cálculos de manera eficiente y precisa...Cuando las herramientas tecnológicas están disponibles, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento, y resolución de problemas (p.24).

Un aspecto notable en el uso de la tecnología es que permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas (Santos, 2002). Aquí los estudiantes tienen la oportunidad de mover partes de estas configuraciones y observar cambios o invariantes. La identificación de invariantes en una representación resulta fundamental en el desarrollo de conjeturas y en el proceso de argumentación y comunicación de esas conjeturas por parte del estudiante. En particular, el uso de software dinámico como Cabri Geometry, Sketchpad o Geometry Inventor ofrece una herramienta poderosa para examinar relaciones geométricas desde diversos ángulos o caminos (Goldenberg & Cuoco,1998). Por ejemplo, en algunos casos resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto cuando se mueve dentro de una configuración. El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triangulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. Arcavi & Hadas (2000) afirman que:

> Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones (pp. 26).

Es decir, el uso de este tipo de software puede funcionar como una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes participen en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas o relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas. ¿Qué características poseen las actividades de aprendizaje donde el uso de la tecnología propicie en los estudiantes el desarrollo de procesos inherentes del quehacer de las matemáticas? ¿Qué tipo de preguntas consideran o formulan los estudiantes como resultado de utilizar la tecnología en el tratamiento de problemas o situaciones matemáticas? Específicamente, ¿a qué nivel el uso de software dinámico ofrece o funciona como una herramienta útil para que los estudiantes visualicen, exploren, y construyan relaciones matemáticas? Estas son algunas preguntas que sirven de referencia para presentar y discutir actividades que ilustran el potencial de este tipo de software en el tratamiento de situaciones. Algunas de las tareas que aquí se presentan han sido utilizadas en seminarios con profesores y alumnos del nivel bachillerato (grados 11 y12). El desarrollo de este trabajo se centra en documentar fases importantes que aparecen durante el uso de estas actividades y en algunos casos se suman comentarios y observaciones que emergieron durante la implementación. En particular interesa destacar la importancia de la tecnología en los procesos que enfrentan los estudiantes al visualizar, conjeturar, formular y utilizar argumentos matemáticos.

> Es improbable que los estudiantes dirijan su experimentación de manera fructífera desde el inicio. Las actividades curriculares, como las situaciones problema, deben diseñarse de tal manera que las clases de preguntas que se les planteen a los estudiantes puedan desempeñar un papel importante en la profundidad e intensidad de las experiencias de aprendizaje...Los estudiantes necesitan explicitar sus predicciones acerca del resultado de un cierto fenómeno o acción. (Arcavi & Hadas, 2000, p.26).

Las actividades o problemas que se presentan intentan ilustrar el potencial de las herramientas tecnológicas en los procesos de resolución donde se destacan: (i) la búsqueda de distintas formas de resolver un problema; (ii) la utilización de estrategias y representaciones fundamentales en el quehacer matemático; y (iii) la búsqueda de significados y conexiones en el estudio de la disciplina.

1 La importancia de buscar distintas formas de solución de un problema

¿Qué información es relevante que permita entender y diseñar un plan de solución de un problema? ¿Qué tipo de representaciones favorecen la identificación y exploración de relaciones alrededor del problema? ¿Qué tipo de herramienta tecnológica puede utilizarse como medio para representar y analizar la información importante del problema? Estas son preguntas que los estudiantes deben considerar y discutir en sus formas de interacción con el problema a resolver. En particular el empleo del software dinámico se puede transformar en una herramienta que permita a los estudiantes generar representaciones que permiten visualizar elementos claves alrededor de la solución. Los estudiantes no sólo pueden mirar, sino también medir, comparar y cambiar figuras de manera directa. Además, con el software dinámico tienen oportunidades de aprender a experimentar y detectar los casos que son susceptibles de un análisis matemático (Santos, et. al, 2003). Un ejemplo, ayuda a ponderar la importancia del empleo de distintas representaciones y la búsqueda de distintos caminos de resolver un problema. Este problema aparece en un libro clásico sobre resolución de problemas (Polya, 1945) y aquí es abordado a través del uso del software dinámico.

El problema: Construir un triángulo dado un lado a, su altura h, perpendicular al lado a, y el ángulo α, opuesto al lado .

Es importante mencionar que este problema aparecía como parte del material a discutir en un curso de resolución de problemas. Los estudiantes inicialmente mostraron dificultades para resolverlo; sin embargo, durante las sesiones de trabajo en grupos pequeños surgieron ideas que eventualmente se materializaron en los tres acercamientos que a continuación se presentan. Sin duda que el uso del software dinámico fue crucial en las fases de representación, plan de trabajo y solución del problema.

Primer Acercamiento: ¿Cómo representar los datos del problema? ¿Qué representaciones nos permiten visualizar relaciones entre los datos? Este tipo de preguntas sirvieron de marco para realizar la siguiente construcción:

1. Dibuje un segmento AB que representa el lado a.
2. Dibuje una recta L que pasa por B y realice una rotación de la recta L alrededor del punto B de un ángulo de medida α. Identifique esa recta como L'.
3. Dibuje una recta paralela a L que pase por el punto A. Esta recta interseca a L' en el punto C. El ángulo ACB tiene la medida del ángulo α. (figura 1).

¿Cuál es el lugar geométrico del punto C cuando la recta L gira alrededor del punto B?

Se observa que el lugar geométrico es una circunferencia (figura 2). En esta representación se traza el segmento $AP = h$ perpendicular a AB y una recta M paralela al segmento AB que pase por el punto P. Esta recta corta a la circunferencia en los puntos Q y Q' (figura 3).

Cuando el punto C coincide con los puntos Q y Q', entonces los triángulos ABQ y ABQ' satisfacen las condiciones del problema (figura 4).

Segundo Acercamiento. Otro método de solución se basa en dibujar inicialmente el ángulo α e identificar un punto P sobre uno de los rayos del

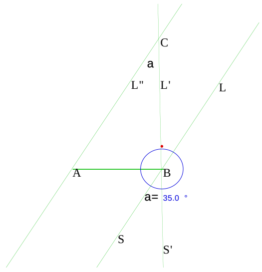

Figura 1. Representación del problema, ubicación del segmento y ángulo

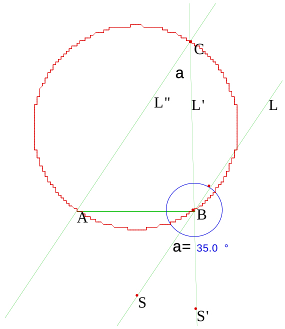

Figura 2. Generación de un lugar geométrico

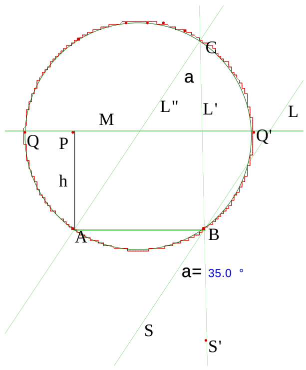

Figura 3. Ubicando la altura del triángulo en la construcción

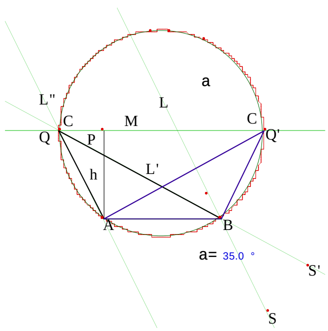

Figura 4. Construcción del triángulo pedido, dos soluciones

ángulo. Posteriormente, se construye una circunferencia con centro en P y radio la longitud del segmento a. Con estos elementos se identifica el triángulo RQP (figura 5).

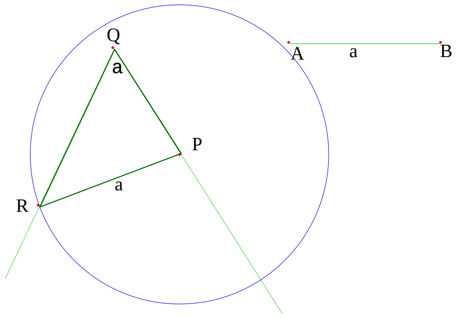

Figura 5. Construcción de dos datos del problema, el lado y un ángulo

El siguiente paso es construir una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo RQP (su centro se determina con la intersección de sus mediatrices) (figura 6).

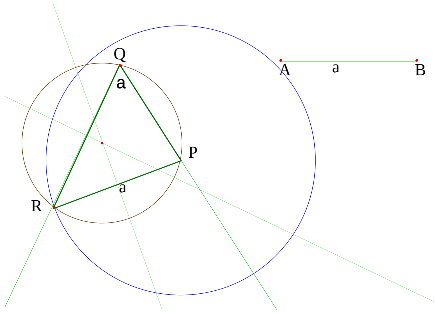

Figura 6. Inscribir el triángulo, un paso importante hacia la solución

Se construye una recta L paralela al segmento a (lado RP) a una distancia h. Esta recta L corta a la circunferencia en los puntos S y T. Así los triángulos SRP y TPR representan la solución del problema (figura 7).

Tercer Acercamiento. Esta forma de solución se basa en utilizar la relación que existe entre el ángulo central e inscrito en una circunferencia. Así se construye un triángulo isósceles con un ángulo C de medida 2α (figura 8). Se observa que los ángulos A y B son congruentes ya que AC y BC son iguales. Con esta información se tiene que si la medida del ángulo C es 2α entonces la medida del ángulo A es $90 - \alpha$.

Para completar la construcción del triángulo se realiza la siguiente construcción:

1. Dibuja el segmento AB que representa al segmento a.

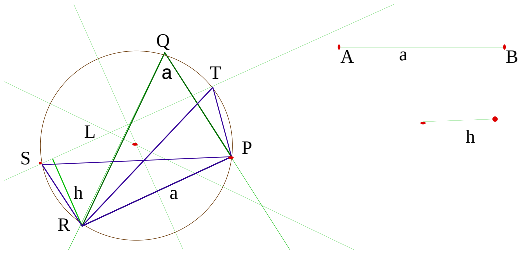

Figura 7. Construcción del triángulo, dos soluciones

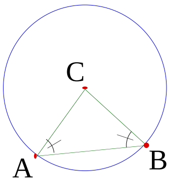

Figura 8. Construcción de un ángulo central

2. Se gira el segmento AB alrededor del punto A un ángulo de $90 - \alpha$.

3. Construye la mediatriz del segmento AB y se localiza el punto C (la intersección entre la mediatriz y segmento AB). El punto C es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos A y B (figura 9).

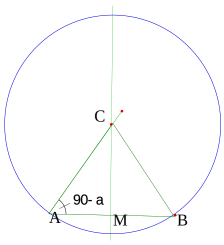

Figura 9. Determinación del centro de la circunferencia

4. Sobre la recta MC, se dibuja el segmento MP igual a la altura h y se dibuja una recta paralela al segmento AB que pase por el punto P. Esta recta corta a la circunferencia en los puntos Q y Q' (figura 10).

5. Así, existen dos soluciones que cumplen las condiciones requeridas, estos son los triángulos ABQ y ABQ' (figura 11).

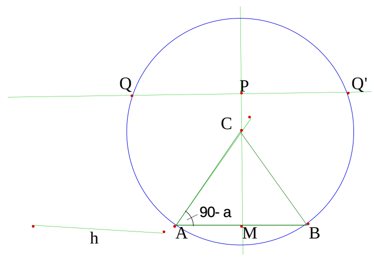

Figura 10. Ubicación de la altura

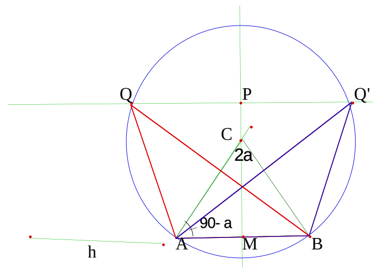

Figura 11. Construcción del triángulo, dos soluciones

Se observa que en el primer acercamiento, el empleo de la herramienta fue importante en determinar el lugar geométrico del punto asociado con el vértice del ángulo, mientras que en los otros acercamientos la precisión y la forma fácil de mover objetos resultó crucial en el diseño de un plan que eventualmente permitió resolver el problema. Contenidos y procesos matemáticos que se destacan en los diferentes métodos de solución se relacionan con propiedades del ángulo central e inscrito de una circunferencia, propiedades de la mediatriz, visualización y determinación de lugares geométricos, y la observación de patrones y el planteamiento de conjeturas.

2 Uso de Casos Particulares y Relajamiento de Condiciones Iniciales.

Existen diversas estrategias de resolución de problemas que cuando se trabajan con el uso de la tecnología adquieren una dimensión notable en el proceso de solución o tratamiento de situaciones. La siguiente actividad ilustra el uso de estrategias como la consideración de casos particulares, el relajamiento de consideraciones iniciales, y el uso de diversas representaciones durante las fases de entendimiento y diseño de un plan de solución. Con el empleo del software se puede generar representaciones dinámicas donde se visualice el comportamiento de ciertos parámetros que generen información o elementos suficientes para el planteamiento de alguna conjetura (Goldenberg & Cuoco, 1998).

La Actividad: Inscribir un Triángulo Equilátero en un Triángulo Dado. ¿Qué significa inscribir un triángulo particular en un triángulo dado? ¿Puedo iniciar la construcción con un triángulo equilátero con sólo dos de sus vértices en el triángulo dado? ¿Qué ocurre con el otro vértice cuando se mueve uno de los otros dos vértices sobre un lado? En atención a estas preguntas los estudiantes pueden inicialmente proponer la construcción de un caso particular y emplear las propiedades del software dinámico para completar la construcción. En este caso, los puntos A, B, y C representan los vértices del triángulo dado y el triángulo equilátero que se inscribe en el triángulo ABC es VWT (figura 12). Una estrategia importante al abordar la construcción del triángulo inscrito es que inicialmente se construye un triángulo equilátero con vértices sobre dos lados del triángulo dado (relajamiento de las condiciones iniciales). Los pasos para realizar esta construcción y demostrar que se trata del triángulo pedido se muestran a continuación.

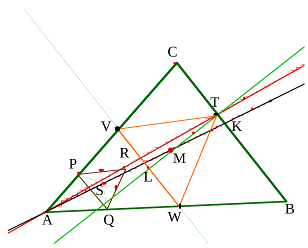

Figura 12. Inscribir un triángulo equilátero en un triángulo dado

(i) Se da el triángulo ABC, se construye un punto P sobre el lado AC. Del punto P se traza el segmento PQ paralelo al lado BC. Tomando al segmento PQ como un lado se construye el triángulo equilátero PQR.

(ii) Con la ayuda del software se puede determinar el lugar geométrico o rastro del vértice R cuando el punto P se mueve a lo largo del lado AC. Se observa que el lugar geométrico es una recta que corta al lado BC en el punto T. Este punto de intersección es candidato a ser un vértice del triángulo inscrito.

(iii) Se determina el centro S del triángulo equilátero PQR y se encuentra el lugar geométrico del punto S cuando el punto P se mueve a lo largo del lado AC. Este lugar geométrico es también una recta que corta al lado BC en el punto K.

Justificación o Prueba Se dibuja una línea perpendicular al segmento PQ que pase por T. La intersección (M) de esta línea con la recta que describe el centro del triángulo PQR será el centro del triángulo inscrito. En virtud de que este centro se localiza a una distancia de $2/3$ del vértice T, entonces L se encuentra sobre la línea TM a una distancia de $1/3$ desde M. Se dibuja una recta paralela a PQ que pase por L, los puntos de intersección de esta recta con los lados del triángulo determinan los otros dos vértices del triángulo inscrito. Así, el triángulo inscrito en el triángulo dado es el triángulo VWT.

3 La importancia de conectar contenidos y significados

Una meta fundamental en el estudio de las matemáticas es que los alumnos establezcan conexiones y significados de los conceptos matemáticos no solamente dentro de la misma disciplina sino también con otras áreas del conocimiento. La tecnología puede ayudar a que los estudiantes exploren y conecten diversos temas y áreas de las matemáticas (Santos, 2001).

En la geometría euclidiana, los alumnos examinan con detalle distintas propiedades de los triángulos (tipos, formas de construcción, propiedades, etc.). En la siguiente actividad, la construcción de un triángulo sirve como plataforma para discutir propiedades de una elipse.

> Dados dos segmentos, uno representa el lado de un triángulo y el otro la suma de los otros dos lados. ¿Puedes construir un triángulo a partir de esta información? Al efectuar la construcción, ¿es ese triángulo único?

¿Cómo puedo construir un triángulo? ¿Qué información es necesaria? Si AB representa uno de los lados del triángulo y DE representa la suma de los dos lados, entonces ¿dónde debo ubicar al punto C para poder construir el triángulo? ¿Cuál es la relación entre el lado AB y el segmento de la suma DE? ¿Cómo puedo representar este problema a través del software? Estas fueron algunas preguntas iniciales que sirvieron de base para plantear un plan de solución. El trabajo y las ideas que mostraron los estudiantes al trabajar esta actividad se describe en las siguientes fases:

(i) El segmento AB representa un lado de un triángulo. El segmento $DE = DC + CE$ representa la suma de sus otros dos lados (figura 13).

(ii) Con la ayuda del software, en particular la herramienta del compás, los alumnos dibujaron dos circunferencias. Uno con centro en A y radio DC y otro con centro en B y radio CE. Estas circunferencias se cortan en los puntos P y Q (figura 14).

Los estudiantes observaron que los triángulos ABP y ABQ satisfacían las condiciones del problema. También notaron que cuando el punto C se aproxima a alguno de los extremos D o E, las circunferencias no se intersecan (figura 15).

¿Cuál es el camino o la huella que dejan los puntos P y Q (intersección de los circunferencias) cuando se mueve el punto C sobre el segmento DE? (figura 16).

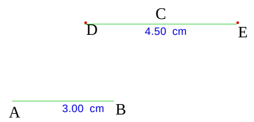

Figura 13. Representación de dos segmentos, AB el lado de un triángulo y DE la suma de los otros dos lados

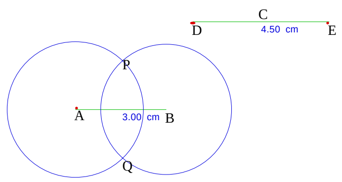

Figura 14: Construcción de un triángulo con las condiciones establecidas

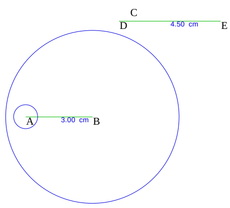

Figura 15: Cuando un lado es mayor que la suma de los otros dos el triángulo no existe

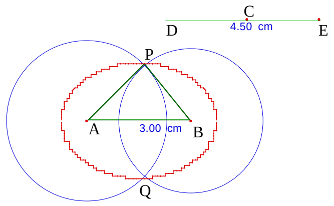

Figura 16: La construcción de una elipse

Con la ayuda del software los estudiantes observaron que el lugar geométrico se trataba de una elipse, definida como el conjunto de puntos en un plano cuya distancia a dos puntos fijos es una suma constante y cuyos focos eran los puntos A y B. De aquí observaron que era posible construir muchos triángulos que satisfacen las condiciones pedidas. También reportaron que había algunos puntos sobre la elipse donde la construcción del triángulo no era posible. En particular, observaron que cuando el punto C (el cuál es un punto sobre el lugar geométrico) se mueve a lo largo del segmento DE, existe una parte del segmento en donde al pasar el punto C, el triángulo desaparece. Los estudiantes le asignaron medidas a los lados del triángulo y documentaron que en este caso (cuando el triángulo desaparece) la suma de los lados es menor que la longitud del otro lado del triángulo. Reafirmaron que una condición necesaria para la construcción del triángulo es que la suma de las longitudes de dos de sus lados siempre debe ser mayor que la longitud del tercer lado (figura 17).

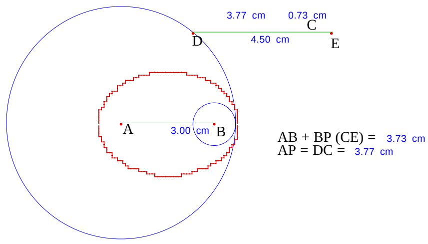

Figura 17: Verificando la desigualdad del triángulo, para justificar su construcción

Después de la discusión sobre la existencia de triángulos con las condiciones iniciales dadas, se orientó a los estudiantes a realizar la siguiente construcción.

Sobre la figura de la elipse realizar las siguientes construcciones:

(i) Trazar la recta que pasa por los focos A y B. Localizar un punto P sobre la recta y el punto O que es el punto medio del segmento AB. También seleccionar un punto Q sobre la elipse y Q' que es el punto reflejado de Q con respecto a la recta AB (figura 18).

(ii) Trazar la recta PQ y $Q'O$, estas se cortan en un punto S (figura 19).

¿Cuál es el lugar geométrico del punto S cuando el punto Q se mueve sobre la elipse? Describir el lugar geométrico o la huella que deja un punto cuando se mueve otro en una configuración resulta ser una acción difícil, sin embargo, con la ayuda del software esta tarea es inmediata (figura 20). Otra vez, el software se convierte en una poderosa herramienta para el estudiante ya que le ayuda a visualizar el comportamiento de algunas partes dentro de una configuración geométrica.

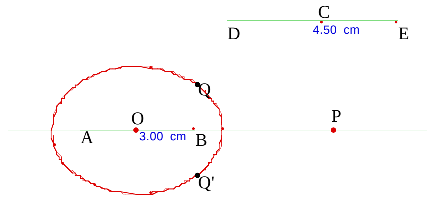

Figura 18: Ensamblando otra configuración

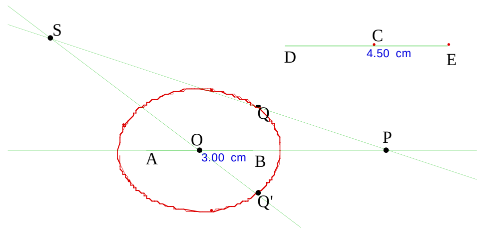

Figura 19: Conectando puntos y rectas

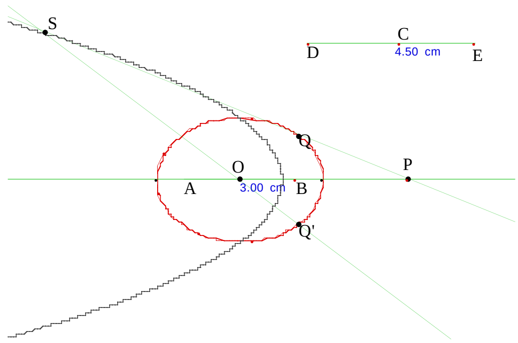

Figura 20: Generación de otros lugares geométricos

Por los rasgos del lugar geométrico parece que se trata de una parábola. De hecho, la tarea aquí se traduce en buscar argumentos geométricos o algebraicos que sustenten la afirmación. En realidad los estudiantes demostraron que cuando el punto P coincide con el punto simétrico del punto O (centro de la elipse) con respecto a uno de los vértices de la elipse, entonces el lugar geométrico se trata de una parábola.

Partiendo de la construcción anterior, los estudiantes observaron que cuando el punto P se mueve a lo largo de la recta AB, el lugar geométrico produce otras figuras. Por ejemplo, cuando P está cerca de uno de los vértices de la elipse aparece la figura 21.

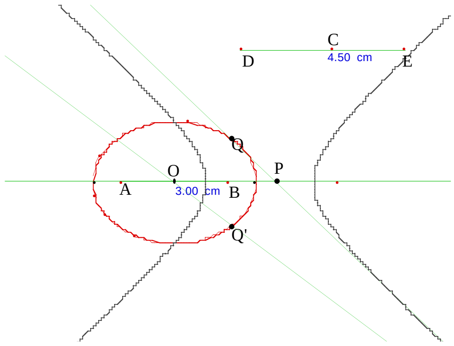

Figura 21: El lugar geométrico de una hipérbola

Cuando P se aleja a cierta distancia de uno de los vértices de la elipse, se produce lo siguiente (figura 22).

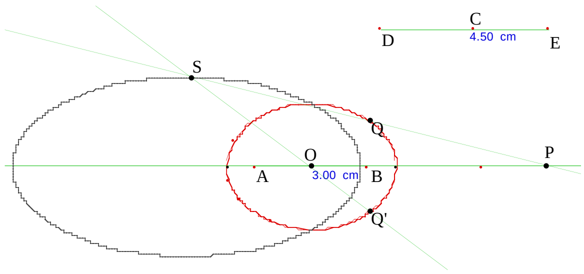

Figura 22: La generación de una elipse

Para demostrar que los lugares geométricos generados a partir de mover el punto P sobre la recta AB, los estudiantes establecieron un sistema de referencia (figura 23) y determinaron elementos asociados a cada uno de las figuras (focos, directriz, vértices, centro, etc.). Esto también les ayudó a verificar propiedades que ellos conocían acerca de esos lugares.

4 Comentarios Finales.

El desarrollo de la tecnología ha influido notablemente en la forma de hacer y aprender matemáticas. En particular el empleo del software dinámico ofrece claras ventajas a los estudiantes para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas. Cuando los estudiantes interactúan con las construcciones, pueden

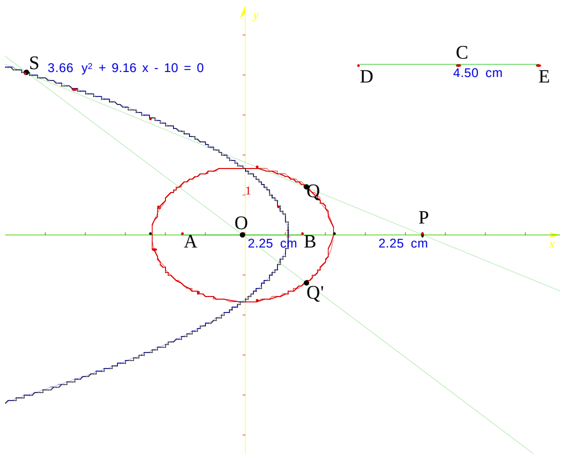

Figura 23: La necesidad de presentar un argumento que justifique las propiedades de las cónicas

resultar que existe demasiada información que inicialmente podría ser relevante para ellos. ¿Qué tipo de recursos necesitan los estudiantes para que el resultado de sus exploraciones incluya relaciones o resultados propios de la disciplina? Es una pregunta que se relaciona con la disposición matemática que los estudiantes posean y está ligada con los valores y creencias que se fomenten en sus experiencias con la disciplina. Una meta importante es que los estudiantes eventualmente identifiquen el uso de la computadora o calculadora como una herramienta que les permite ampliar sus capacidades cognitivas. En este sentido, la tecnología funciona como una lente que le permite al estudiante observar y explorar situaciones desde diversos ángulos.

Aquí el papel del profesor resulta fundamental para dirigir la atención de los estudiantes hacia comportamientos particulares de la configuración o figura (invariantes, por ejemplo). Además, es evidente que para que el estudiantes reconozca elipses, hipérbolas o parábolas este debe conocer cierta información relacionada con estas figuras. De hecho, en algunos casos las figuras que aparecen en la interacción con el software pueden servir para verificar propiedades que ellos recordaban de estos lugares geométricos. De manera general, el software funciona como una herramienta útil para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las soporten. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de software.

Nota: Este trabajo resulta del desarrollo de un proyecto (#42295-S) financiado por el Conacyt, México. Se agradece el apoyo recibido durante las

distintas fases de producción de este artículo.

Referencias

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp.25-45.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. In A. Bishop, K. Clement, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*, pp..469-501. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? In R.Leher & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp. 351- 367. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton NJ: Princeton University Press.

Romberg, T. A. & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promote understanding*, pp. 3-17. Mahwah, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

Santos, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, pp.247-258.

Santos, M. (2002). Enhancing students cognitive systems via the use of technology in mathematical problem solving. En F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*, pp. 158-174. Mexico: PMENA.

Santos, M, Agüero, E., Borbón, A., & Páez, C. (2003). Students' use of technology in mathematical problems solving: Transforming technological artifacts into mathematical tools. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, vol. 4, pp. 119-126.* International Group for the Psychology of Mathematics Education. University of Hawai, Honolulu, HI, USA.

Luz Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
msantos@mail.cinvestav.mx