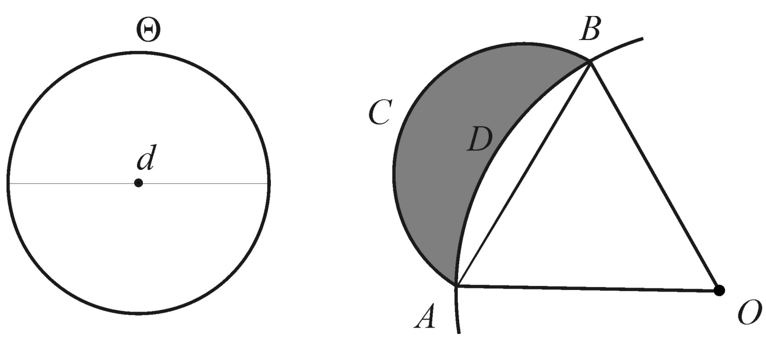

“Cuadratura” del círculo *(Ver D. Jiménez, p. 103)*

Vol. XI • No. 1 • Año 2004

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XI, Número 1, Año 2004
I.S.S.N. 1315–4125

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet o escribir a su dirección postal.

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
amv@usb.ve http://amv.ivic.ve/

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs. 10.000 (US$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history or philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance.

All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsability of the author.

All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs. 10.000 (US$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: http://boletinamv.ma.usb.ve/

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XI, Número 1, Año 2004

Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041 – A, Venezuela

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Vol. XI • No. 1 • Año 2004

Presentación

En este Boletín ofrecemos al lector los artículos de investigación de Wilmer Arzolay y Julio Ramos, Edgar E. Enochs, Mahmoud M. El-Borai, João Luiz Martins y Adilson J. V. Brandão. Todos artículos de gran calidad, aceptados por nuestro comité editorial luego de riguroso arbitraje por expertos en cada uno de los temas de estas investigaciones. En la sección de Historia, Claudio Gutiérrez y Flavio Gutiérrez nos presentan la vida y obra del matemático chileno Carlos Grandjot, y José María Sigarreta y Pilar Ruesga Ramos analizan la evolución histórica de la Geometría. En la sección *Matemáticas Recreativas*, Douglas Jiménez, nos relata de forma muy amena las maneras de "cuadrar" figuras geométricas, en particular el círculo cuyo primer intento se atribuye a Hipócrates con una demostración basada en la figura que ilustra la portada de este Boletín.

Las secciones habituales de nuestro Boletín están cargadas de información que no pueden dejar de leer: resoluciones de la última reunión de la AMV, los nuevos logros de nuestros campeones de olimpiadas matemáticas y reseña de lo más reciente en la literatura matemática.

A. A.

Conjuntos donde se alcanza la norma de Besov

Wilmer ARZOLAY y Julio RAMOS

Resumen

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario complejo y denotemos por $B_p = B_p(\mathbb{D})$, al espacio de Besov, donde $p > 1$. En este artículo damos condiciones necesarias y suficientes para que la norma de funciones $f \in B_p$ se alcance por integración sobre un subconjunto medible G del disco unitario.

1 Introducción

Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario en el plano complejo $\mathbb{C}$, para $1 < p < \infty$, el espacio de Besov $B_p = B_p(\mathbb{D})$, es el espacio de las funciones analíticas f sobre $\mathbb{D}$ tal que

$$\|f\|_{B_p} := \left(\int_{\mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

donde $dA(z) = \dfrac{1}{\pi} r dr d\theta$, $z = re^{i\theta}$ es la medida bidimensional normalizada de Lebesgue. Es conocido que B_p es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{B_p}.$$

En este artículo damos condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto medible G del disco unitario $\mathbb{D}$ sea *dominante* para el espacio de Besov B_p, $p > 1$, esto es, para que se verifique

$$\|f\|_{B_p}^p < C \int_G \left(1 - |z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z),$$

donde la constante $C > 0$ no depende de las funciones $f \in B_p$.

Nuestro interés proviene de un artículo de D. Luecking [Lu] donde se aborda este tipo de problema para los espacios de Bergman (sin peso) clásico $A^p(\mathbb{D})$; pero bajo otra perspectiva, como lo es tratar de dar condiciones a un conjunto $G \subset \mathbb{D}$ para que el operador $f \mapsto f|_G$ de $A^p(\mathbb{D})$ en $L^p(G)$ tenga rango cerrado.

Hemos seguido el esquema de demostración de Luecking haciendo énfasis en las modificaciones necesarias debido a la presencia de la derivada f' y de la función radial $\left(1-|z|^2\right)^{p-2}$ y hemos caracterizado los conjuntos dominantes en el espacio de Besov B_p con $p>1$. El resultado que tenemos lo podemos formular como sigue, donde $|F|$ denotará la medida normalizada de un subconjunto medible F del disco $\mathbb{D}$.

Teorema 1.1 *Sea G un conjunto medible del disco unitario $\mathbb{D}$, sea $p>1$. Existe una constante $C>1$ tal que*

$$\|f\|_{B_p}^p < C \int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z), \tag{1}$$

para toda $f \in B_p$, si y sólo si existe una constante $\delta>0$ tal que

$$|G \cap D| > \delta \, |\mathbb{D} \cap D| \tag{2}$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z|=1$.

La demostración del Teorema 1.1 se reparte a lo largo del trabajo. En la Sección 2, esbozamos, a manera de preliminares, algunos lemas donde se establece que la condición (2) es equivalente a condiciones similares pero con discos seudo-hiperbólicos y discos euclídeos $D(a)$ con centro en $a \in \mathbb{D}$ y radio $\eta\,(1-|a|)$ contenidos en $\mathbb{D}$; también se demostrará una acotación integral que nos permitirá concluir el teorema. En la Sección 3 se completa la prueba del teorema donde se hace intervenir la condición (1) propia de los conjuntos dominantes.

2 Preliminares

Sea $a \in \mathbb{D}$ y fijemos $\eta \in (0,1)$, denotaremos por $D(a)$ al conjunto:

$$D(a) = D(a,\eta) = \{z \in \mathbb{D} : |z-a| < \eta\,(1-|a|)\},$$

entonces $D(a)$ es un disco euclídeo totalmente contenido en $\mathbb{D}$ y por tanto, para todo $z \in D(a)$ se cumple $|a|-\eta\,(1-|a|) < |z| < |a|+\eta\,(1-|a|)$; luego, podemos afirmar que existe una constante $C_0 = C_0(\eta,p) > 0$ tal que

$$\left(1-|a|^2\right)^{p-2} \leq C_0 \left(1-|z|^2\right)^{p-2} \tag{3}$$

para todo $z \in D(a)$.

Los discos $D(a)$ serán un buen sustituto de los disco con centro en la frontera, tal como se muestra en el siguiente lema.

Lema 2.1 *Supongamos que existe una constante $\delta > 0$ tal que*

$$|G \cap D| > \delta\, |\mathbb{D} \cap D| \tag{4}$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z| = 1$. Entonces existen constantes $\delta_0 > 0$ y $\eta \in (0, 1)$, que dependen sólo de δ tal que

$$|G \cap D\,(a)| > \delta_0\, |D\,(a)| \tag{5}$$

para todo $a \in \mathbb{D}$.

Demostración. Supongamos que el conjunto G satisface la condición en (4) y sea $a \in \mathbb{D}$. Denotemos por b al punto de la frontera que es extremo del radio que pasa por a y consideremos el disco D con centro en b y radio $\dfrac{\delta}{4\pi}\,(1 - |a|)$. Sea

$$\eta = 1 - \frac{3\delta}{4\pi},$$

entonces $|D \cap D(a)| > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta^2}{32\pi^2}\,(1 - |a|)^2$ y $|D \cap \mathbb{D}| \leq \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta^2}{32\pi^2}\,(1 - |a|)^2$. De aquí se obtiene $|D \cap \mathbb{D} \setminus D\,(a)| < \dfrac{\delta}{2}\,|D \cap \mathbb{D}|$, y por tanto

$$\begin{aligned} |G \cap D(a)| &\geq |G \cap D| - |G \cap D \setminus D(a)| \\ &> \delta\,|\mathbb{D} \cap D| - \frac{\delta}{2}\,|D \cap \mathbb{D}| \\ &= \frac{\delta^2}{8\,(4\pi - 3\delta)^2}\,|D(a)|\,, \end{aligned}$$

donde hemos usado (4) en la segunda desigualdad. ∎

Sea $a \in \mathbb{D}$ y $r \in (0, 1)$, definimos el disco seudo-hiperbólico

$$\Delta(a, r) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| < r \right\},$$

entonces tenemos el siguiente lema que usaremos en la primera parte de la demostración del teorema principal:

Lema 2.2 *Supongamos que existen constantes $\delta_1 > 0$ y $\eta_1 \in (0, 1)$, tal que*

$$|G \cap \Delta\,(a, \eta_1)| > \delta_1\, |\Delta\,(a, \eta_1)| \tag{6}$$

para todo $a \in \mathbb{D}$. Entonces, existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$|G \cap D| > \delta\, |\mathbb{D} \cap D| \tag{7}$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z| = 1$.

Demostración. Supongamos que existe $\eta_1 \in (0,1)$ tal que (6) se cumple. Sea D un disco con radio r, centro en $|z| = 1$ y consideremos $a \in \mathbb{D}$ tal que $\Delta(a, \eta_1)$ está contenido tangencialmente en D. Obsérvese que D tiene radio $r = 1 - |C| + R$, donde C es el centro euclídeo de $\Delta(a, \eta_1)$ y R es el radio euclídeo. Por hipótesis podemos escribir

$$\begin{aligned}
|G \cap D| &> |G \cap \Delta(a, \eta_1)| > \delta_1 |\Delta(a, \eta_1)| \\
&= \delta_1 \eta_1^2 r^2 \left[\frac{1 - |a|^2}{1 - \eta_1^2 |a|^2 - (1 - \eta_1^2)|a| + \left(1 - |a|^2\right)\eta_1} \right]^2 \\
&> \frac{1}{9} \delta_1 \eta_1^2 |D \cap \mathbb{D}| \qquad (8)
\end{aligned}$$

y (7) es cierto con $\delta = \dfrac{1}{9}\delta_1 \eta_1^2$. ∎

Para un subconjunto F del disco $\mathbb{D}$, denotaremos por $\mathbf{1_F}$ a la función característica de F. Otro lema que usaremos repetidamente en la demostración del teorema principal es el siguiente:

Lema 2.3 *Dado $\eta \in (0,1)$, existe una constante $C_1(\eta) > 0$ tal que*

$$I = I(z, \eta) := \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|D(a)|} \mathbf{1}_{D(a)}(z) dA(a) \le C_1(\eta) \qquad (9)$$

para todo z en $\mathbb{D}$.

Demostración. En efecto, sea $s \in D(a)$, entonces dado que $|1 - \overline{a}s| \ge 1 - |a|$, $D(a) \subset \Delta(a, \eta)$ y $\mathbf{1}_{D(a)}(z) \le \mathbf{1}_{\Delta(a,\eta)}(z) = \mathbf{1}_{\Delta(z,\eta)}(a)$, donde en la última desigualdad hemos usado que $z \in \Delta(a, \eta)$ si y sólo si $a \in \Delta(z, \eta)$; luego

$$I \le \int_{\Delta(z,\eta)} \frac{1}{|D(a)|} dA(a); \qquad (10)$$

pero si $a \in \Delta(z, \eta)$ entonces de la identidad

$$\frac{\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |a|^2\right)}{|1 - \overline{a}z|^2} = 1 - \left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right|^2,$$

encontramos

$$|D(a)| > \frac{1}{16} \eta^2 (1 - \eta^2)^2 (1 - |z|)^2;$$

luego, sustituyendo en (10) obtenemos

$$I < \frac{16}{\eta^2 (1 - \eta^2)^2} \frac{|\Delta(z, \eta)|}{(1 - |z|)^2} < \frac{64}{(1 - \eta^2)^4} = C_1(\eta),$$

que da (9). En la última desigualdad hemos usado la acotación

$$|\Delta(z,\eta)| \leq \frac{4\eta^2}{\left(1-\eta^2\right)^2}\left(1-|z|\right)^2 \tag{11}$$

y la prueba del lema está completa. ■

3 Demostración del Teorema Principal

Supongamos primero que existe una constante $C>1$ tal que

$$\|f\|_{B_p}^p < C\int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2}|f'(z)|^p\,dA(z)$$

para toda $f\in B_p$. Dado que $(p-1)\int_{\mathbb{D}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z)=1$ podemos seleccionar $0<\eta_1<1$ tal que

$$(p-1)\int_{\Delta(0,\eta_1)}\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z) > 1-\frac{1}{2C}. \tag{12}$$

Sea $a\in\mathbb{D}$ y hagamos el cambio de variables $z\to\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}=\varphi_a(z)$, entonces la desigualdad en (12) queda

$$(p-1)\int_{\Delta(a,\eta_1)}\frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z) > 1-\frac{1}{2C}; \tag{13}$$

donde se ha usado la identidad

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 = \left(1-|z|^2\right)\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}.$$

Por otra parte, como

$$(p-1)\int_{\mathbb{D}}\frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z)=1 \tag{14}$$

(ver [HKZ, pag. 7]) podemos usar la estimación (13) para obtener:

$$(p-1)\int_{\mathbb{D}\setminus\Delta(a,\eta_1)}\frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}}\left(1-|z|^2\right)^{p-2}dA(z) < \frac{1}{2C}. \tag{15}$$

Ahora, aplicando la hipótesis de (1) a la función

$$f(z)=\frac{1-|a|^2}{\overline{a}\left(1-\overline{a}z\right)},$$

podemos escribir

$$\int_G \frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) > \frac{1}{C\,(p-1)},$$

donde hemos usado nuevamente (14). De esta última relación y (15) obtenemos

$$\int_{G\cap\Delta(a,\eta_1)} \frac{\left(1-|a|^2\right)^p}{|1-\overline{a}z|^{2p}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} dA(z) > \frac{1}{2C\,(p-1)}; \tag{16}$$

pero de la identidad

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2},$$

es fácil deducir que existe una constante $C_2 = C_2(\eta_1, p) > 0$ tal que

$$\frac{\left(1-|a|^2\right)^{p-2}}{|1-\overline{a}z|^{2p-4}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} \leq C_2 \tag{17}$$

para todo $z \in G\cap\Delta(a,\eta_1)$. Además, dado que $|a|<1$ se tiene la relación

$$\frac{\left(1-|a|^2\right)^2}{|1-\overline{a}z|^4} \leq \frac{4}{(1-|a|)^2},$$

luego combinando esta última desigualdad, (17) y (16) resulta que

$$\frac{4C_2}{(1-|a|)^2}\,|G\cap\Delta(a,\eta_1)| > \frac{1}{2C\,(p-1)},$$

es decir,

$$|G\cap\Delta(a,\eta_1)| \geq \frac{1}{8CC_2\,(p-1)}\,(1-|a|)^2 > \delta_1\,|\Delta(a;\eta_1)|,$$

donde hemos usado (11) nuevamente, esto último junto con el Lema 2.2 implica la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$|G\cap D| > \delta\,|\mathbb{D}\cap D|$$

para todo disco D cuyo centro está sobre $|z|=1$. Entonces por el Lema 2.1 existen constantes $\delta_0 > 0$ y $\eta \in (0,1)$ tal que $|G\cap D(a)| > \delta_0\,|D(a)|$ para todo $a \in \mathbb{D}$.

Sea $a \in \mathbb{D}$, dada una función analítica f y $0 < \lambda < 1$, definimos el conjunto

$$G_\lambda(a) = G_\lambda(f, a) = \{z \in D(a) : |f'(z)| > \lambda |f'(a)|\}.$$

Para $f \in B_p$ definimos el operador, de tipo maximal,

$$T_\lambda f(a) = \frac{1}{|G_\lambda(a)|} \int_{G_\lambda(a)} |f'(z)|^p \, dA(z).$$

Entonces podemos descomponer el disco unitario en dos conjuntos disjuntos B y $M = \mathbb{D} \setminus B$, donde

$$B \quad = \quad \left\{ a \in \mathbb{D} : |f'(a)|^p > r_0^3 T_\lambda f(a) \right\},$$

y $r_0 \in (0, 1)$ es una constante que seleccionaremos después.

Probaremos que existe una constante C_3 que depende sólo de δ_0 y λ tal que la integral sobre el conjunto B es menor que esa constante por la integral sobre el conjunto dominante G; pero antes necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.1 *Sea $a \in B$ y $\lambda < r_0^{\frac{6}{\delta_0}}$, entonces*

$$|G_\lambda(a)| > \left(1 - \frac{\delta_0}{2}\right) |D(a)|.$$

Demostración. Dado que la función $\log |f'|$ es subarmónica, por la desigualdad del valor medio y la definición de $G_\lambda(a)$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
|D(a)| \, log\, |f'(a)| &\leq \int_{D(a)} log\, |f'(z)| \, dA(z) \\
&\leq (|D(a)| - |G_\lambda(a)|) \, log\, (\lambda |f'(a)|) + \frac{1}{p} |G_\lambda(a)| \, log T_\lambda f(a) \\
&\leq \left(\frac{6}{\delta_0} log\,(r_0) + log\, |f'(a)| \right) |D(a)| \\
&\quad - 3 \left(\frac{\delta_0 + 2p}{p\delta_0} \right) log\,(r_0) \, |G_\lambda(a)|,
\end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad hemos usado la concavidad de la función log. Luego sin más que despejar obtenemos

$$|G_\lambda(a)| \geq \frac{2p}{\delta_0 + 2p} |D(a)| \geq \left(1 - \frac{\delta_0}{2}\right) |D(a)|$$

y la prueba del lema está completa. ■

Proposición 3.2 *Existe una constante* $C_3 = C_3(\delta_0, \lambda) > 0$ *tal que*

$$\int_B \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) < C_3 \int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z)$$

Demostración. Sea $a \in B$, por el Lema 3.1, podemos escribir

$$|D(a)| - |G_\lambda(a)| < \frac{\delta_0}{2} |D(a)|;$$

luego, dado que $G_\lambda(a) \subset D(a)$, sigue del Lema 2.1 y de esta última desigualdad que para $a \in B$,

$$\begin{aligned} |G \cap G_\lambda(a)| &> \delta_0 |D(a)| - |D(a) \setminus G_\lambda(a)| \\ &> \frac{1}{2}\delta_0 |D(a)|. \end{aligned}$$

Esto es, para $a \in B$ se cumple

$$\frac{1}{|D(a)|} \int_G \mathbf{1}_{D(a)}(z) \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) \geq \frac{1}{2C_0} \delta_0 \lambda^p \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p,$$

donde hemos usado la acotación (3). Integrando sobre B, y usando el teorema de Fubini obtenemos

$$\int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \left[\int_B \frac{1}{|D(a)|} \mathbf{1}_{D(a)}(z) dA(a)\right] dA(z) \geq \frac{1}{2C_0} \delta_0 \lambda^p \int_B \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^2 \, dA(a);$$

por tanto, usando el Lema 2.3, podemos concluir

$$\int_B \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z) \leq \frac{2C_0 C_1(\eta)}{\delta_0 \lambda^p} \int_G \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \, dA(z)$$

y la prueba de la proposición está completa. ∎

Ahora debemos acotar adecuadamente la integral sobre el conjunto M; con este fin lo descomponemos en dos subconjuntos disjuntos M_B y $M_M = M \setminus M_B$, donde

$$M_B = \left\{ a \in M : |f'(a)|^p \leq \frac{r_0}{|D(a)|} \int_{D(a)} |f'(z)|^p dA(z) \right\}.$$

Entonces se tiene la siguiente acotación de la integral sobre el conjunto M_B:

Proposición 3.3 *Existe una constante $C_4(\eta) > 0$ tal que*

$$\int_{M_B} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq r_0 C_4(\eta) \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z).$$

Demostración. En efecto, por la acotación (3), para todo $a \in M_B$, se cumple

$$\left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p \quad \leq \quad \frac{r_0 C_0}{|D(a)|} \int_{\mathbb{D}} \mathbf{1}_{D(a)}(z) \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

por tanto, integrando sobre M_B y usando Fubini concluimos

$$\begin{aligned} &\int_{M_B} \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p dA(a) \\ &\quad \leq \quad r_0 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \left(\int_{M_B} \frac{1}{|D(a)|} \mathbf{1}_{D(a)}(z) dA(a) \right) dA(z) \\ &\quad \leq \quad r_0 C_2(\eta) \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z), \end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente el Lema 2.3 en la última desigualdad. ∎

En la próxima proposición probaremos una estimación similar a la de la Proposición 3.3 para el conjunto M_M; pero antes necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.4 *Sea $\lambda < 1/2$, entonces para todo $a \in M_M$, existe una constante universal $C_5 > 0$ tal que*

$$|G_\lambda(a)| \geq C_5 r_0^2 |D(a)|.$$

Demostración. Sea $a \in M_M$ y $R = \frac{1}{32} r_0 \eta (1-|a|)$. Probaremos que $D(a,R) \subset G_\lambda(a)$. En efecto, consideremos $r = \frac{1}{2}\eta(1-|a|)$ y $z \in D(a,R)$ entonces por la fórmula integral de Cauchy, podemos escribir

$$|f'(z) - f'(a)| \leq \frac{1}{8} r_0 C_r, \tag{18}$$

donde $C_r := \sup\{|f'(t)| : |t-a| = r\}$. Dado que $|f'|$ es subarmónica tenemos

$$C_r \leq \frac{4}{|D(a)|} \int_{D(a)} |f'(w)| dA(w),$$

donde hemos usado que $D(t,r) \subset D(a)$, la definición de r, la desigualdad de Hölder y la definición de M_M. Luego, sustituyendo en (18) encontramos

$$|f'(z) - f'(a)| < \frac{1}{2} |f'(a)|$$

para todo $z \in D(a,R)$. Por la desigualdad triangular concluimos

$$|f'(z)| > \frac{1}{2}|f'(a)| > \lambda |f'(a)|$$

para todo $z \in D(a,R)$ y $D(a,R) \subset G_\lambda(a)$. Por tanto, podemos concluir

$$|G_\lambda(a)| \geq |D(a,R)| = \frac{r_0^2}{2^{10}}|D(a)|$$

como lo afirmamos. ■

Ahora podemos acotar la integral sobre el conjunto M_M.

Proposición 3.5 *Existe una constante $C_6(\eta) > 0$ tal que*

$$\int_{M_M} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq r_0 C_6(\eta) \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z).$$

Demostración. Sea $a \in M_M$, entonces, en particular $a \in M$ y por tal motivo,

$$\left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p \leq \frac{C_0 r_0^3}{|G_\lambda(a)|} \int_{G_\lambda(a)} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

donde hemos usado la estimación (3), luego, integrando sobre M_M y usando Fubini podemos escribir:

$$\begin{aligned} &\int_{M_M} \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p dA(a) \\ &\qquad \leq C_0 r_0^3 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p \left(\int_{M_M} \frac{1}{|G_\lambda(a)|} \mathbf{1}_{G_\lambda(a)}(z) dA(a) \right) dA(z). \end{aligned}$$

Por tanto, usando el Lema 3.4, $G_\lambda(a) \subset D(a)$ y el Lema 2.3 obtenemos

$$\int_{M_M} \left(1-|a|^2\right)^{p-2} |f'(a)|^p dA(a) \leq \frac{C_1(\eta) C_0}{C_5} r_0 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

y la prueba de la proposición está completa. ■

Ahora podemos finalizar la prueba del Teorema 1.1 ya que de las Proposiciones 3.3 y 3.5 tenemos

$$\int_{M} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq (C_4 + C_6)\, r_0 \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

por tanto, al seleccionar

$$r_0 \leq \frac{1}{2\,(C_4 + C_6)}$$

y por supuesto, $\lambda < \min\left\{\frac{1}{2}, r_0^{\frac{6}{\delta_0}}\right\}$, encontramos

$$\int_M \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z) \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^{p-2} |f'(z)|^p dA(z),$$

que junto con la Proposición 3.2 implica la conclusión del teorema. ■

Referencias

[HKZ] Hedenmalm, H., Korenblum B. and Zhu, K., *Theory of Bergman Spaces.* Springer-Verlag, New York, 2000

[Lu] D. Luecking, Inequalities on Bergman spaces, *Illinois J. Math.*, **25**, (1981), 1-11.

Wilmer ARZOLAY y Julio RAMOS
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Oriente
Venezuela

Binomial coefficients

Edgar E. Enochs

Abstract

Among some of the most interesting natural numbers are the binomial coefficients. They have uses not only in combinatorics but in other branches of mathematics such as algebra, analysis and topology. In this article we give some of the basic properties of binomial coefficients and their generalizations.

This article is based on the inaugural address given at the XVI Escuela Venezolana de Matemáticas on September 8, 2003 at the Universidad de los Andes in Mérida, Venezuela. I take this opportunity to thank the organizers of the congress for the honor of having invited me to give this address.

Definitions of the binomial coefficients

We will give three different ways of defining the binomial coefficients. Each method has its own uses. One is algebraic, one is combinatorial and one is arithmetic.

Definition 1. Consider the polynomial $(1+x)^n$ in $Q[x]$ (the ring of polynomial with rational coefficients) and where $n \geq 0$ is an integer. If we expand $(1+x)^n$ then we let $\binom{n}{k}$ be the coefficient of x^k for any integer $k > 0$

We have

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

So easily $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ and $\binom{n}{k} = 0$ if $k > n$.

We now consider the combinatorial approach. Let $n, k \geq 0$ be integers. Let $C(n,k)$ be the number of subsets A having k elements of a set X with n elements.

So, for example, let $X = \{1, 2, ..., n\}$ when $n \geq 1$. So $C(n,k)$ is the number of $A \subset X$ with $|A| = k$ ($|A|$ denotes the cardinality of A.)

Then it is clear that $C(n, 0) = 1$ for any $n \geq 0$ ($A = \emptyset$ is the only possibility), that $C(n, n) = 1$ ($A = X$ is the only possibility) and that $C(n, k) = 0$ if $k > n$ (there is no such A).

Our third and arithmetic approach to defining the binomial coefficients is initially given by the formula $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. But the formula only makes sense for $0 \leq k \leq n$ since we do not have a definition of $(n-k)!$ if $n - k < 0$ (but recall that $0! = 1$). But canceling we have:

$$k!\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

The formula on the right makes sense for any natural numbers $k,\ n > 0$. If we interpret an empty product as 1 we see the formula gives 1 when $k = 0$. Then the formula also gives 1 when $k = n$ and gives 0 when $k > n$ since we get a factor of 0 in the numerator in this case.

Pascal's Identity

We now argue that we have the so-called Pascal's identity for our three versions of the binomial coefficients. Then using this fact and the fact that the three definitions agree when $k = 0$, when $k = n$ and when $k > n$ we will get that they agree for all $k,\ n \geq 0$.

Given $n \geq 0$ we have

$$(1+x)^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{k} x^k$$

$$= (1+x)^n(1+x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k\right)(1+x).$$

But in the last product it is clear that the coefficient of x^k is $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$. Hence we have

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

for all $n \geq 0$ and $k \geq 1$.

Now we consider the numbers $C(n+1, k)$. So we want to find the number of subsets $A \subset \{1, 2, ..., n, n+1\}$ where $|A| = k$. These include all the $A \subset \{1, 2, ..., n\}$ with $|A| = k$ and there are $C(n, k)$ of these A's. If $A \not\subset \{1, 2, ..., n\}$ then $n+1 \in A$ and $A = B \cup \{n+1\}$ with $B \subset \{1, 2, ..., n\}$ and with $|B| = k-1$. There are $C(n, k-1)$ such B's. So we get

$$C(n+1, k) = C(n, k) + C(n, k-1)$$

for all $n \geq 0$ and $k \geq 1$.

Note that we are tacitly assuming $k \leq n$. We also see that the identity holds if $k = n+1$ (we get $1 = 0+1$) and if $k > n+1$ (we get $0 = 0+0$).

Now we consider the arithmetic version of our coefficients. The formula

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

when $1 \leq k \leq n$ is just a matter of finding a common denominator and adding fractions. But we want the identity

$$\frac{(n+1)n\cdots(n-k)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)!}$$

to hold for all $n \geq 0$ and $k \geq 1$. If $k \leq n$ this follows from the above. If $k = n+1$ the equation becomes $1 = 0+1$ and if $k > n+1$ it becomes $0 = 0+0$. So the equation holds for all $n \geq 0$ and $k \geq 1$.

Now by a double induction on $n \geq 0$ and $k \geq 0$ we use the fact that our three versions agree in case $k = 0$, in case $k = n$ and in case $k > n$ and then use Pascal's identity to get

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

holds for all $n \geq 0$ and $k \geq 0$.

So we can (and will) freely use the most convenient version in any situation. Note (for example) that we immediately get that $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ is an integer for any n, k with $0 \leq k \leq n$.

Computing $\binom{n}{k}$

If $0 \leq k \leq n$ we can compute $\binom{n}{k}$ using the formula $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. But we know $\binom{n}{k}$ is an integer so then we can write $\binom{n}{k}$ as a product of primes. Clearly this can be a hard and tedious procedure. But using a result of Legendre we see we can quickly write $\binom{n}{k}$ as a product of primes. Legendre's result shows us how to write $n!$ for $n \geq 0$ as a product of primes.

Let p be a prime. We want to find the largest power of p that divides $n!$. But

$$n! = (1 \cdot 2 \cdots (p-1))p((p+1 \cdots (2p-1))2p((2p+1)\cdots$$

i.e. we isolate the multiples of p (the only factors among $1, 2, ..., n$ divisible by p. The last such multiple is $\left[\frac{n}{p}\right] p$ where $\left[\frac{n}{p}\right]$ is the greatest integer in the fraction

$\frac{n}{p}$. Dividing out each factor of p we get

$$n! = p^{[\frac{n}{p}]} \left[\frac{n}{p}\right]! \cdot l$$

where $p \nmid l$.

So now our problem is reduced to finding the largest power of p dividing $\left[\frac{n}{p}\right]!$. So we have the same problem with n replaced by $\left[\frac{n}{p}\right]$.

Using the same procedure again we get

$$n! = p^{[\frac{n}{p}]} \cdot p^{\left[\frac{[\frac{n}{p}]}{p}\right]} \cdot \left[\frac{[\frac{n}{p}]}{p}\right]! \cdot m$$

with $p \nmid m$.

Repeating the procedure we see that if e is the largest $e \geq 0$ such that $p^e | n!$ we have

$$e = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{[\frac{n}{p}]}{p}\right] + \cdots$$

Example. If $n = 100,\ p = 7$ then $\left[\frac{100}{7}\right] = 14$ and $e = 14 + 2 + 0 + \cdots = 16$. We note that it is not hard to argue that $\left[\frac{[\frac{n}{p}]}{p}\right] = \left[\frac{n}{p^2}\right]$ and that in fact $e = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$. Also note that $\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ if k is sufficiently large.

So now this makes it easy to write, for example, $\binom{100}{13}$ as a product of primes.

We can argue that for integers a, b, c with $c > 0$ we have

$$\left[\frac{a}{c}\right] + \left[\frac{b}{c}\right] \leq \left[\frac{a+b}{c}\right]$$

Using this and Legendre's result above we can argue that for $0 \leq k \leq n$, $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ is an integer. We argue that for any prime p the largest power of p dividing $k!(n-k)!$ divides $n!$.

We also note that as consequence of the above we get that if $n = p$ with p a prime and if $0 < k < p$ then $p | \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ since

$$\left[\frac{p}{p}\right] = 1 \text{ and } \left[\frac{k}{p}\right] = \left[\frac{n-k}{p}\right] = 0$$

We now use another version of our coefficients and see that this means that

$$(1+x)^p \cong 1 + x^p (\operatorname{mod} p)$$

(two polynomials are congruent if the corresponding coefficients of each x^k are congruent). Then of course for any polynomial $f(x)) \in Z[x]$ with integer coefficients

$$(1+f(x))^p \cong 1 + f(x)^p (\operatorname{mod} p)$$

Letting $f(x) = x^p$ we get

$$(1+x)^{p^2} = ((1+x)^p)^p \cong (1+x^p)^p \cong | + x^{p^2} (\operatorname{mod} p)$$

and so that

$$(1+x)^{p^s} \cong 1 + x^{p^s} (\operatorname{mod} p)$$

for any $s \geq 1$. Since $(1+x)^{p^s} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p^s}{k} x^k$ we get that $p | \binom{p^s}{k}$ if $s > 0$ and if $0 < k < p^s$. This will be useful in the next section.

Remainders

If p is a prime and $0 \leq k \leq n$ we can decide whether $p | \binom{n}{k}$ by using Legendre's procedure. In this section we will find a method for finding the remainder when we divide $\binom{n}{k}$ by p (so whether p divides $\binom{n}{k}$ or not). We will use the $C(n,k)$ version of our binomial coefficients. And we will use a special technique for computing $C(n,k)$. We think of $C(n,k)$ as the number of ways of choosing k balls but where the balls are distributed into two boxes containing n_1 and n_2 of the balls respectively. So $n = n_1 + n_2$. So we can choose k balls by choosing k_1 balls from the first box and k_2 balls from the second where $k_1 + k_2 = k$. This can be done in $C(n_1,k_1) \cdot C(n_2,k_2)$ ways. When we make a choice of some such k_1 and k_2 we will say that we have specified the form of choosing our k balls.

Clearly, this method can be generalized to the situation where we have more than two boxes. But even with two boxes we get something of interest. Namely that if $n = n_1 + n_2$ $(n_1, n_2 \geq 0$ then

$$C(n,k) = \sum_{\substack{k_1 + k_2 = k \\ k_1, k_2 \geq 0}} C(n_1,k_1) \cdot C(n_2,k_2)$$

or the more familiar form

$$\binom{n_1+n_2}{k} = \sum_{k_1=0}^{k} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k-k_1}$$

If we think of $n+1$ as the sum $n_1+n_2=n+1$ we recover Pascal's identity.

Now let p be a prime. Recall that any $n \geq 0$ can be written in a unique manner to the base p, i.e. we can write

$$n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_s p^s$$

with $0 \leq a_i < p$.

Likewise for $k \geq 0$ we have

$$k = b_0 + b_1 p + + \cdots + b_s p^s$$

with $0 \leq b_i < p$. With this notation we have:

Theorem (Lucas).

$$\binom{n}{k} \cong \binom{a_0}{b_0} \cdots \binom{a_s}{b_s} \pmod p$$

Proof. If $k > n$ then $\binom{n}{k} = 0$. But then clearly $b_i > a_i$ for at least one $i = 0, 1, \ldots, s$ and so $\binom{a_i}{b_i} = 0$ for this i. Hence we assume $0 \leq k \leq n$. We now use our box technique for studying $\binom{n}{k} = C(n,k)$. Since $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_s p^s$ we will suppose our n balls are distributed in $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_s$ boxes with each of the first a_0 boxes having a single ball, then each of the next a_1 boxes having p balls each and so forth (of course some a_i may be 0 and so then there are no such boxes). We now consider all the possible forms for choosing k balls from our n balls distributed inour a boxes. This corresponds to writing

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_a$$

where we are required to choose k_j balls from the j-th box. If the corresponding box has p^l balls with $l \geq 1$ and $0 < k_j < p^l$, we know from the last section that $p | \binom{p^l}{k_j}$. This gives us that in this case the number of ways of choosing k balls of this particular form is divisible by p. Hence when computing the remainder when we divide $\binom{n}{k} = C(n,k)$ by p we only need concern ourselves with the special forms where from each box we choose either none of the balls or all of the balls (for the boxes with a single ball this is already necessarily so).

So choosing the balls in the special forms just means we pick the boxes from which we choose all the balls. Consider one such form. This means we pick c_0 of the first a_0 boxes, c_1 of the next a_1 boxes etc. But then $0 \leq c_i < p$ for each i and we must have

$$k = c_0 + c_1 p + \cdots + c_s p^s$$

Since $k = b_0 + b_1 p + \cdots + b_s p^s$ this means we must have $c_0 = b_0, \ldots, c_s = b_s$. But then $\binom{a_0}{b_0} \cdot \binom{a_1}{b_1} \cdots \binom{a_s}{b_s}$ is the number of ways of choosing our k balls from the

n balls in our special forms (all or none from each box). Then with what was noted above we get that $\binom{n}{k}$ and $\binom{a_0}{b_0}\cdots\binom{a_s}{b_s}$ have the same remainder when divided by p and so they are congruent modulo p. Note that if $b_i > a_i$ for some $i,\ 0 \le i \le s$ then $\binom{a_i}{b_i} = 0$ and so p divides $\binom{n}{k}$.

Example. If we divide $\binom{87}{31}$ by 5 we have

$$87 = 2 \cdot 2.5 + 5^2$$

$$31 = 0 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2$$

But $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1} = 6$ and so the remainder when we divide $\binom{87}{31}$ by 5 is 1.

Exercise 1. Find a way to find the last digit of $\binom{n}{k}$ when $\binom{n}{k}$ is written as a decimal integer (use the Chinese remainder theorem).

Exercise 2. Argue that

$$\binom{pn}{pk} \cong \binom{n}{k} \pmod p$$

for any $k, n \ge 0$.

Exercise 3. Find all $n \ge 0$ such that all the binomial coefficients $\binom{n}{k}$ with $0 \le k \le n$ are odd.

Pascal's Formula and Discrete Derivatives

If we consider functions f defined on the natural numbers N (with $f(n)$ say any integer) then since $\delta = 1$ is the smallest of all positive integers we define the discrete derivative Δf of f to be such that

$$(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n)$$

for all $n \ge 0$. Then we see that $\Delta f = 0$ if and only if $f = c$ (i.e. $f(n) = c$ for all $n \ge 0$ for some constant c), that $\Delta f = \Delta g$ if and only if $f = g + c$ for some constant and then that if $k \ge 1$ and if $f(n) = \binom{n}{k}$ for all $n \ge 0$ then $(\Delta f)(n) = \binom{n}{k-1}$.

This means that

$$\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$$

which is just Pascal's identity. So by abuse of notation we write $\Delta\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$. Since $\Delta\binom{n}{1} = 1$ we see that $\Delta^{k+1}\binom{n}{k} = 0$ for $k \ge 0$. Recall that from Calculus

$f^{(k+1)}(x) = 0$ for a real valued function $f(x)$ (with suitable hypotheses on $f(x)$) implies $f(x)$ is a polynomial function of degree at most k i.e. $f(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_k x^k$ for some $r_0, ..., r_k \in \boldsymbol{R}$. Here we get that if $\Delta^{k+1} f = 0$ then

$$f(n) = a_0 + a_1 \binom{n}{1} + \cdots + a_k \binom{n}{k}$$

for all $n \geq 0$ for some $a_0, ..., a_k \in \boldsymbol{Z}$. And we see that to find the a_k we only need note that

$$f(0) = a_0 + a_1 \binom{0}{1} + \cdots + a_k \binom{0}{k} = a_0,$$

$$(\Delta f)(0) = a_1 + a_2 \binom{0}{1} + a_3 \binom{0}{2} + \cdots + a_k \binom{0}{k-1} = a_1$$

and similarly $(\Delta^2 f)(0) = a_2, ..., (\Delta^k f)(0) = a_k$. For example if $f(0) = 0$ and $f(n) = 1 + 2 + \cdots + n$ for $n \geq 1$ then $(\Delta f)(n) = n + 1$ for all n. So $(\Delta^2 f)(n) = 1$ and $\Delta^3 f = 0$. using the above we find that

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$$

for all $n \geq 1$ and in fact for $n = 0$ if we interpret the empty sum as 0. In a similar manner we can find formulas for the sums $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ and $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$. Note that $\Delta(2^n) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$. So in some sense the function 2^n is the discrete version of the function e^x of Calculus.

The Binomial Polynomial $\binom{x}{k}$

Using the fact that

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n+1-k)}{k!}$$

we can define polynomials $\binom{x}{k}$ where

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x+1-k)}{k!}$$

if $k \geq 1$ and where $\binom{x}{0} = 1$. Then the degree of $\binom{x}{k}$ is k and the coefficients of $\binom{x}{k}$ are rational numbers.

We have the identity

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}$$

since the polynomials on each side of the equation have the same values for an infinite number of values of x, namely $x = 0, 1, 2, ...$

One advantage of now having the binomial polynomials $\binom{x}{k}$ is that we can now give a meaning to the symbol $\binom{n}{k}$ for any $n \in Z$ (so also for $n \leq 0$). So, for example, $\binom{-1}{k} = \dfrac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$. But of course we also have a meaning for $\binom{z}{n}$ for any complex number z. So now the original binomial theorem

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$$

for these more general n becomes Newton's binomial theorem.

For example, if $n = -1$ we get $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ i.e. that $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$.

Here we are operating in the ring $Z[[x]]$ of formal power series with coefficients mZ so with no concern about questions of convergence. If we consider $(1+x)^z$ for $z \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ the field of complex numbers) then we operate in $\mathbb{C}[[x]]$.

Noting that deg $\binom{x}{k} = k$, we see that if $P(x) \in Q[x]$ is any polynomial of degree k, then for some rational number $q \in Q$, $P(x)$ and $q\binom{x}{k}$ have the same dominant coefficient, or equivalently that

$$\deg\,(P(x) - q\binom{x}{k}) \leq k - 1$$

(for $k \geq 1$).

From this it follows that we get $P(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + \cdots + a_k\binom{x}{k}$ for some rational numbers $a_0, a_1, ..., a_k$.

Now noting that $P(0) = a_0$

$$P(1) = a_0 + a_1, \quad P(2) = a_0 + 2a_1 + a_2, ...$$

$$P(k) = a_0 + \binom{k}{1}a_1 + \cdots + \binom{k}{k}a_k$$

we see that if the polynomial $P(x) \in Q[x]$ is such that $P(n) \in Z$ for all $n \geq 0$ then in fact $a_0, ..., a_k \in Z$. And also if $a_0, ..., a_k \in Z$ and if $P(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + \cdots + a_k\binom{x}{k}$ then $P(n) \in Z$ for all $n \geq 0$.

We let $Z\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]$ denote the set all such polynomials

$$a_0 + a_1\binom{x}{1} + \cdots + a_k\binom{x}{k} \quad (\text{with } a_0, ..., a_k \in Z)$$

By the above $Z\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]$ consists of all the $P(x) \in Q[x]$ such that $P(m) \in Z$ for $m = 0, 1, 2, ...$ These are called the integer valued polynomials. Using this characterization of the $P(x) \in Z\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]$ we see that $Z\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]$ is a ring. So, for example, if $k \geq 1$ then $\binom{x}{1} \cdot \binom{x}{k} \in Z\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]$.

To write $\binom{x}{1}\binom{x}{k}$ as $a_0 + a_1\binom{x}{1} + \cdots +$ we revert to the viewpoint of combinatorics. If $n \geq 0$, to compute $\binom{n}{1}\binom{n}{k}$ means to compute $C(n,1) \cdot C(n,k)$. This is the number of ways to simultaneously choose two subsets of X where $|X| = n$ with the first subset T having one elements and the second subset S having n elements. The number of ways of choosing T and S with $T \subset S$ is $C(k,1)C(n,k)$ (i.e. choose S and choose one of its elementss to form T) and the number of ways with $T \not\subset S$ is $C(k+1,1) \cdot C(n,k+1)$ (so first choose $T \cup S$) then choose T). So

$$C(k,1)C(n,k) = kC(n,k) + (k+1)C(n,k+1)$$

or

$$\binom{n}{1}\binom{n}{k} = k\binom{n}{k} + (k+1)\binom{n}{k+1}.$$

This gives the polynomial identity

$$\binom{x}{1}\binom{x}{k} = k\binom{x}{k} + (k+1)\binom{x}{k+1}$$

In a similar manner $\binom{x}{k}\binom{x}{l}$ can be computed for any $k, l \geq 0$.

Remark. Given a formal sum $U(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + a_3\binom{x}{3} + \cdots$ we can make sense of the expression $U(n)$ for any $n \geq 0$ since $\binom{n}{m} = 0$ for $m > n$. So such a $U(x)$ can be used to define a function $N \to \mathbb{Z}$. In fact each such function $N \to \mathbb{Z}$ is given by a unique such $U(x)$. The functions $N \to \mathbb{Z}$ can be made into a ring, so the set of such $U(x)$ can be made into a ring. This ring is denoted

$$\mathbb{Z}\left[\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, \binom{x}{3}, ...\right]\right]$$

Then $Z\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]$ as above is a subring of $Z\left[\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]\right]$.

But we also have elements such as $U(x) = 1 + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \cdots$ If $n \geq 1$ then $U(n) = 1 + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$. So this $U(x)$ is denoted 2^x.

The notion of the discrete derivative Δ can easily be extended to the ring $Z\left[\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]\right]$. The simplest way to define it is so that

$$\Delta(a_0 + a_1\binom{x}{1}a_2\binom{x}{2} + \cdots) = a_1 + a_2\binom{x}{1} + a_3\binom{x}{2} + \cdots$$

So then $\Delta(2^x) = \Delta(1 + \binom{x}{1} + a_3\binom{x}{2} + \cdots) = 1 + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \cdots = 2^x$ as expected. Note that for any $U(x) \in \mathbb{Z}\left[\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]\right]$ we can associate the symbol $2^{U(x)}$ with the function $N \to \mathbb{Z}$ that maps n to $2^{U(n)}$.

Such a function in turn gives us an elements $V(x) \in \left[\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]\right]$. So we write $2^{U(x)} = V(x)$. This raises the interesting question of the existence of a natural logarithm in this setting.

As an exercise one could try to write 0^x as a series

$$a_0 + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \cdots \quad (\text{where } 0^0 = 1 \text{ and } 0^n = 0 \text{ if } n \geq 1)$$

Final Remarks

The first proof of the binomial theorem (in the form $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$) for $n \geq 1$ was given by Jakob Bernoulli in his posthumously published "Ars Conjectandi" (1713). In 1676 Newton had stated the more general $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$ for arbitrary n in a letter, but without proof. In 1878 Lucas gave a method for finding the remainder when $\binom{n}{k}$ is divided by a prime p. The study of integer valued polynomials with rational coefficients goes back to the seventeen century. A study of them in their own right was initiated by Pólya and Ostrowski in 1919. In 1936 Skolem began the study of the set of integer valued polynomials with rational coefficients as a ring. The association of a function defined on N with a series $a_0 + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \cdots$ is widely used in the field of p-adic analysis and naturally leads to the extension of Skolem's approach and to the definition of the ring $Z\left[\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]\right]$ or in fact to $R\left[\left[\binom{x}{1}, \binom{x}{2}, ...\right]\right]$ for any ring R. A study of these rings and of the many intriguing questions about them has been initiated by Todorka Nedeva.

References

1. Paul-Jean Cahen and Jean Luc Chabert, *Integer-Valued Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, volume **48**, American Mathematical Society, 1996.

This book has full treatment of ring of integer valued polynomials with rational coefficients and of many other related topics.

2. Andrew Granville, *Arithmetic Properties of Binomial Coefficients I: Binomial coefficients modulo prime powers*, Comadian American Mathematical Society Conference Proceedings, volume **20** (1977), 253-275.

This article has a nice list of references, but many more can be found on the website:

http://www.DMS.UMontreal.CA/~Andrew/Binomial/index.html

3. Kurt Mahler, *Introduction to p-adic Numbers and their Functions*, Cambridge University Press, 1973.

This beautifully written book has a treatment of the symbols

$$a_0 + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \cdots$$

thought of as functions of the variable $n \in N$.

4. Todorka Nedeva, *Rings of power series in the* $\binom{x}{k}$*'s.*

This is a work in progress but as far as I know is the only treatment of the ring

$$Z\left[\left[\binom{x}{1},\binom{x}{2},\ldots\right]\right]$$

mentioned in the last section.

E. E. ENOCHS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF KENTUCKY
LEXINGTON, KENTUCKY 40506-0027
EEUU
e-mail: enochs@ms.uky.edu

The fundamental solutions for fractional evolution equations of parabolic type

Mahmoud M. El-Borai

Abstract

In this paper, we treat the fractional integral equation of the form

$$u(t) = u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} [A(\theta)u(\theta) - f(\theta)] d\theta,$$

where $0 < \alpha \leq 1, \Gamma(\alpha)$ is the gamma function, $\{A(t) : t \geq 0\}$ is a family of linear closed operators defined on a dense set $D(A)$ in a Banach space E into E, u_0 is an element of $D(A)$ and f is a given E-valued function defined on an intervall $[0, T]$. The existence and uniqueness of the solution of the considerd integral equation is studied for a suitable class of the family of operators $\{A(t) : t\epsilon[0, T]\}$. The continuous dependence of solutions on f and u_0 is also studied. An application is given to a mixed problem of general parbolic partial differential equations with fractional order.

Keywords and phrases: Fractional integral and diferential equations, closed operators, fundamental solutions.
AMS Subject Classification: 26A 33; 45 N 05; 34 G10; 47D03; 47D06

1. Introduction

In this paper, we consider the following fractional integral evolution equation,

$$u(t) = u_0 \quad - \quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} [A(\theta)u(\theta) - f(\theta)] d\theta, \tag{1.1}$$

where $0 < \alpha \leq 1, \Gamma(\alpha)$ *is the gamma function*, $\{A(t) : t \in [0, T]\}$ is a family of linear closed operators defined on dense set $D(A)$ in a Banach space E into E, u is the unknown E-valued function , $u_0 \in D(A)$ and f is a given E-valued function defined on $[0, T]$.
It is assumed that $D(A)$ is independent of t. Let $B(E)$ denote the Banach space of all linear bounded operators in E endowed with the topology defined by the operator norm.

We need the following conditions;

($\mathbf{A_1}$): The operator $[A(t)+\lambda I]^{-1}$ exists in B(E) for any λ with Re $\lambda \geq 0$ and

$$\| [A(t) + \lambda I]^{-1} \| \leq \frac{C}{\mid \lambda \mid +1}, \tag{1.2}$$

for each $t \in [0, T]$, where C is a positive constant independent both of t and λ.

($\mathbf{A_2}$): for any t_1, t_2, s $\in [0, T]$,

$$\| [A(t_2) - A(t_1)]A^{-1}(s) \| \leq C \mid t_2 - t_1 \mid^{\gamma} \tag{1.3}$$

where $0 < \gamma \leq 1$, $C > 0$ and the constants C and γ are independents of t_1, t_2 and s
($\mathbf{A_3}$): The function f satisfies a uniform Holder condition (with exponent β) in [0,T], i.e.,

$$\| f(t_2) - f(t_1) \| \leq C \mid t_2 - t_1 \mid^{\beta},$$

for all $t_1, t_2 \in [0, T]$, where C and β are positive constants and $0 < \beta \leq 1$,(The constants C and β are independent of t_1 *and* t_2)
Under condition (A_1) each operator - A(s) , s $\in [0, T]$, generates an analytic semigroup $exp(-tA(s))$, $t > 0$ and there exists a positive constant C independent both of t and s such that

$$\| A^n(s) exp(-tA(s)) \| \leq \frac{C}{t^n}, \tag{1.4}$$

where n = 0,1 , $t > 0, s \in [0, T]$, [1], [2]

In section 2, we shall construct the fundamental solution of the homogeneous fractional differential equation

$$\frac{d^{\alpha} v(t)}{dt^{\alpha}} + A(t)v(t) = 0, t > 0 \tag{1.5}$$

We shall prove the existence and uniqueness of the solution of equation (1.5), with the initial condition

$$v(0) = u_0 \in D(A). \tag{1.6}$$

The continuous dependence of the solutions of equation (1.1) on the elements u_0 and the function f is proved.
In section 3, we give an application to a mixed problem of a parabolic partial differential equation of fractional order.

2. The fundamental solution

We say that u is a strong solution of the fractional integral equation (1.1), if $u(t) \in D(A)$ for each $t \in [0,T], u, u^*$are continuous in $t \in [0,T]$and u satisfies equation (1.1), where $u^*(t) = A(t)u(t)$.

Let h be an E-valued function defined on [0,T]. If $\frac{dh(t)}{dt}$ and the integral $\int_\tau^t (t-\theta)^{-\alpha} \frac{dh(\theta)}{d\theta} d\theta$ exist in the abstract sense, then we use the following definition of the fractional derivative ${}_\tau D_t^\alpha h(t)$;

$$
{}_\tau D_t^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\tau^t (t-\theta)^{-\alpha} \frac{dh(\theta)}{d\theta} d\theta \quad , \tag{2.1}
$$

[3], [4], [5].

If u is a strong solution of (1.1), then the fractional derivative

$$
\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = {}_0 D_t^\alpha u,
$$

exists and continuous in $t \in [0,T]$. In this case we notice that

$$
\frac{d}{dt} \int_0^t (t-\theta)^{-\alpha} F(\theta) d\theta = \int_0^t (t-\theta)^{-\alpha} \frac{dF(\theta)}{d\theta} d\theta, \tag{2.2}
$$

where

$$
F(t) = \int_0^t (t-\theta)^{\alpha-1} [f(\theta) - u^*(\theta)] d\theta.
$$

Using (1.1), (2.1) and (2.2), we get

$$
\begin{aligned}
\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \int_\theta^t (t-s)^{-\alpha} (s-\theta)^{\alpha-1} (f(\theta) - u^*(\theta)) ds d\theta \\
= -A(t)u(t) + f(t), \qquad (2.3) \\
u(0) = u_0. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

The converse is also true. In other words if $\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}$ is continuous in $t \in [0,T]$ and u represents a solution of the Cauchy problem (2.3), (2.4), then u represents a strong solution of (1.1), (this means that the integral equation (1.1) is equivalent to the Cauchy problem (2.3), (2.4)).

We shall consider integrals of oprerator -valued functions. these integrals are defined in the sense of Riemann with respect to the strong topology. We shall denote by $\psi(t \;\; , s)$ the following integral,

$$
\psi(t,s) = \alpha \int_0^\infty \theta t^{\alpha-1} \zeta_\alpha(\theta) exp(-t^\alpha \theta A(s)) d\theta,
$$

where ζ_α is a probability density function defined on $[0,\infty)$, such that its Laplace transform is given by

$$\int_0^\infty e^{-\theta x}\zeta_\alpha(\theta)d\theta = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-x)^j}{\Gamma(1+\alpha j)},$$

where $0<\alpha\leq 1, x>0$, [5], [7].

Lemma 2.1. The improper integral $\int_0^\infty \theta\zeta_\alpha(\theta)A(t)exp(-\eta^\alpha\theta A(s))d\theta$ exists for $\eta>0,\ t,s\in[0,T]$ and represents a uniformly continuous function in the uniform topology (that is in the norm of B (E)) in the variables t,η,s, where $t,s\in[0,T], \epsilon\leq\eta\leq T$ and ϵ is any positive number.

Proof: The existence of the considered improper integral is clear for $\eta>0, t,s\in[0,T]$. If $0\leq t_1<t_1+\Delta t_1=t_2\leq T$, $\epsilon\leq\eta_1<\eta_1+\Delta\eta_1=\eta_2\leq T$, and $0\leq s_1<s_1+\Delta s_1=s_2\leq T$, then

$$\int_0^\infty \theta\zeta_\alpha(\theta)A(t_2)exp(-\eta_2^\alpha\theta A(s_2))d\theta - \int_0^\infty \theta\zeta_\alpha(\theta)A(t_1)exp(-\eta_1^\alpha\theta A(s_1))d\theta$$

$$= \int_0^\infty \theta\zeta_\alpha(\theta)P(t_1,t_2,s_2)A(s_2)exp(-\eta_2^\alpha\theta A(s_2))d\theta$$

$$+\int_0^\infty \theta\zeta(\theta)_\alpha A(t_1)[exp(-\nu_2\theta A(s_2))-exp(-\nu_1\theta A(s_2))]exp(-\nu_1\theta A(s_2))d\theta$$

$$+\int_0^\infty \theta\zeta_\alpha(\theta)A(t_1)[exp(-\eta_1^\alpha\theta A(s_2))-exp(-\eta_1^\alpha\theta A(s_1))]d\theta, \tag{2.5}$$

where $P(t_1,t_2,t_3)=[A(t_2)-A(t_1]A^{-1}(t_3), \nu_1=\eta_1^\alpha/2, \nu_2=\eta_2^\alpha-\eta_1^\alpha/2$.
It can be proved under conditions $(A_1)$and (A_2)that

$$\| A(t)[exp(-\eta A(s))-exp(-\eta A(\tau))\ \|\leq \frac{C}{\eta}\mid s-\tau\mid^\gamma, \tag{2.6}$$

$$\| A(t)[exp(-\eta A(s))-exp(-\tau A(s))]A^{-1}(s)\ \|\leq \frac{C\mid\eta-\tau\mid}{Min(\eta,\tau)}, \tag{2.7}$$

for all $\eta>0,\tau>0,t,s\in[0,t]$, where the positive constant C is independent of $t,s,\eta\ and\ \tau$.
We estimate the norm of the first term on the right of (2.5) by using condition $(A_2)$and (1.4), the norm of the second term by using (2.7) and (1.4). We estimate the norm of the last term on the right (2.5) by using (2.6). We thus find that the norm of the left side of (2.5) is bounded by

$$C[\frac{(\Delta t_1)^\gamma}{\epsilon^\alpha}+\frac{1}{\epsilon^{2\alpha}}\{(\eta_1+\Delta\eta_1)^\alpha-\eta_1^\alpha\}+\epsilon^{1-\ \alpha}(\Delta s_1)^\gamma].$$

This completes the proof.
Corollary. The operator - valued function $\psi(t-\eta,\eta)$ and $A(t)\psi(t-\eta,\eta)$are uniformly continuous in the uniform topology in the varaibles t,η, where $0 \leq \eta \leq t-\epsilon, 0 \leq t \leq T$, for any $\epsilon > 0$. Clearly

$$\| \psi(t-\eta,\eta) \| \leq C(t-\eta)^{\alpha-1}, \tag{2.8}$$

where C is a positive constant independent of t,η
Lemmma 2.2. If

$$w_1(t,\tau) = \int_\tau^t \psi(t-\eta,\eta)f(\eta)d\eta, t > \tau,$$

then

$${}_\tau D_t^\alpha w_1(t,\tau) = f(t) - \int_\tau^t A(\eta)\psi(t-\eta,\eta)f(\eta)d\eta.$$

Proof. Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions defined by

$$f_n(t) = [I + \frac{1}{n}A(t)]^{-1}f(t), t \in [0,T].n = 1,2,...$$

Let us consider the integrals ;

$$w_{1n}(t,\tau) = \int_\tau^t \psi(t-\eta,\eta)f_n(\eta)d\eta,$$

$$w_{2n}(t,\eta) = f_n(\eta) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\eta^t (t-\theta)^{\alpha-1}A(\eta)w_{2n}(\theta,\eta)d\theta.$$

Since $f_n(t) \in D(A)$ for all $t \in [0,T]$, it follows from [8] that

$$w_{2n}(t,\eta) = \int_0^\infty \zeta_\alpha(\theta)[exp(-(t-\eta)^\alpha\theta A(\eta))]f_n(\eta)d\theta, \tag{2.9}$$

where $0 \leq \eta \leq t$. Thus

$${}_\eta D_t^\alpha w_{2n}(t,\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\eta^t (t-s)^{-\alpha}\frac{dw_{2n}(s,\eta)}{ds}ds$$

$$= \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha}\int_\eta^t\int_0^\infty (t-s)^{-\alpha}(s-\eta)^{\alpha-1}\theta\zeta_\alpha(\theta)A(\eta)[exp(-(s-\eta)^\alpha\theta A(\eta))]f_n(\eta)d\theta ds$$

$$= -A(\eta)w_{2n}(t,\eta). \tag{2.10}$$

Using (2.9) and (2.10), we get

$$\begin{aligned} {}_\tau D_t^\alpha \omega_n(t,\tau) &= \frac{d}{dt}\int_\tau^t\int_0^\infty \zeta_\alpha(\theta)[\exp(-(t-\eta))^\alpha\theta A(\eta))]f_n(\eta)d\theta d\eta \\ &= f_n(t) - \int_\tau^t A(\eta)\psi(t-\eta,\eta)f_n(\eta)d\eta \end{aligned}$$

According to lemma (2.1), we notice that $A(\eta)\psi(t-\eta,\eta)$ is uniformly continouous function in the uniform topology in the variables $t, \eta \in [0,T]$ where $t-\eta \geq \epsilon$. Since f satisfies condition (A_3), it follows that the integral $\int_\tau^t A(\eta)\psi(t-\eta,\eta)f(\eta)d\eta$ exists (comp [8]). We notice that;

$$\| A(\eta)\psi(t-\eta,\eta) \| \leq \frac{C}{t-\eta}, \tag{2.11}$$

for all $t, \eta \in [0,T], t-\eta \geq \in$. Clearly

$$\| [I + \frac{1}{n}A(t)]^{-1} - I \| \leq C+1, \tag{2.12}$$

where as for $\quad x \in D(A)$;

$$\| [I + \frac{1}{n}A(t)]^{-1}x - x \| \leq \frac{C}{n} \| A(t)x \| .$$

Using (2.12) and noticing that f satisfies condition (A_3), we deduce that the sequence $\{f_n\}$uniformly converges to f with respect to $t \in [0,T]$. Using (2.11), we get for any positive number ϵ, the following inequality

$$\| \int_\tau^{t-\epsilon} A(\eta)\psi(t-\eta,\eta)[f_n(\eta) - f(\eta)]d\eta \| \leq C\epsilon[ln(t-\tau) - ln\epsilon],$$

for sufficiently large n. Consequently.

$$\lim_{n \to \infty} {}_\tau D_t^\alpha w_{1n}(t,\tau) = f(t) - \int_\tau^t A(\eta)\psi(t-\eta,\eta)f(\eta)d\eta,$$

uniformly with respect to $t \in [0,T], t > \tau$. This completes the proof.
Let

$$\phi_1(t,\tau) = [A(t) - A(\tau)]\psi(t-\tau,\tau),$$

$$\phi_{k+1}(t,\tau) = \int_\tau^t \phi_k(t,s)\phi_1(s,\tau)ds, k = 1,2,...$$

Using condition (A_2), we get

$$\| \phi_1(t,\tau) \| \leq \int_0^\infty \| S(t,\tau,\theta) \| \| \| A(\tau)exp(-(t-\tau)^\alpha\theta A(\tau)) \| d\theta \leq C(t-\tau)^{\gamma-1} \ , \tag{2.13}$$

where

$$S(t,\tau,\theta) = \alpha\theta(t-\tau)^{\alpha-1}\zeta_\alpha(\theta)P(t,\tau,\tau).$$

Using lemma (2.1), we conclude that $\phi_1$is uniformly continuous in t, τ in the uniform topology, provided that $t-\tau \geq \epsilon > 0$. Now one verifies by induction that all the functions $\phi_k, k = 1, 2, \ldots$ are uniformly continuous in t, τ in the uniform topology for $t - \tau \geq\in t, \tau, \in [0, T]$, and

$$\| \phi_k(t, \tau) \| \leq \frac{C^k (t-\tau)^{\gamma k - 1}}{\Gamma(\gamma k)}. \tag{2.14}$$

Using inequalities (2.14), one can justify the relation

$$\int_\tau^t \phi(t, s)\phi_1(s, \tau) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\tau^t \phi_k(t, s)\phi_1(s, \tau) ds \quad ,$$

where

$$\phi(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(t, \tau),$$

It is easy to see that

$$\| \phi(t, \tau) \| \leq C(t - \tau)^{\gamma - 1}. \tag{2.15}$$

The function ϕ is uniformly continuous in the uniform topology in t, τ provided that $0 \leq \tau \leq t - \epsilon, \epsilon \leq t \leq T$ for any $\epsilon > 0$. Using Fubini's theorem, we deduce that ϕ is the unique solution of the integral equation

$$\phi(t, \tau) = \phi_1(t, \tau) + \int_\tau^t \phi(t, s)\phi_1(s, \tau) ds. \tag{2.16}$$

Lemma 2.3. For any $0 < \delta < \gamma, \ 0 \leq \tau < t_1 < t_2 \leq T$;

$$\| \phi(t_2, \tau) - \phi(t_1, \tau) \| \leq C(t_2 - t_1)^{\gamma - \delta}(t_1 - \tau)^{\delta - 1} \tag{2.17}$$

where the positive constant C does not depend on t_1, t_2 and τ.
Proof. from (2.13), we get

$$\| \phi_1(t_2, \tau) - \phi_1(t_1, \tau) \| \leq 2C(t_1 - \tau)^{\gamma - 1}. \tag{2.18}$$

Writting

$$\phi_1(t_2, \tau) - \phi_1(t_1, \tau) = P(t_1, t_2, \tau)A(\tau)\psi(t_2 - \tau, \tau) +$$
$$P(t_1, \tau, \tau)A(\tau)[\psi(t_2 - \tau, \tau) - \psi(t_1 - \tau, \tau)],$$
$$\Lambda(t_1, t_2, \tau) = P(t_1, \tau, \tau)A(\tau)[\psi(t_2 - \tau, \tau) - \psi(t_1 - \tau, \tau)],$$

we get

$$\| P(t_1, t_2, \tau)A(\tau)\psi(t_2 - \tau, \tau) \| \leq C(t_2 - t_1)^{\gamma}(t_1 - \tau)^{-1},$$
$$\| \Lambda(t_1, t_2, \tau) \| \leq 2C(t_1 - \tau)^{\gamma - 1}.$$

We can write

$$\Lambda(t_1, t_2, \tau) = \int_0^\infty P_1(t_1, t_2, t_3, \tau, \theta) d\theta + \int_0^\infty P_2(t_1, t_2, t_3, \tau, \theta) d\theta,$$

where

$$P_1(t_1,t_2,\tau,\theta)=\alpha\theta\zeta_\alpha(\theta)[A(t_1)-A(\tau)]P_3(t_1,t_2,t_3,\tau,\theta)exp[-(t_1-\tau)^\alpha\theta A(\tau)],$$

$$P_3(t_1,t_2,t_3,\tau,\theta)=(t_2-\tau)^{\alpha-1}exp[-\{(t_2-\tau)^\alpha-(t_1-\tau)^\alpha\}\theta A(\tau)]-(t_2-\tau)^{\alpha-1}I,$$

We can find t_3 and t_4 such that $t_1<t_3<t_2, t_1<t_4<t_2$ and

$$P_3(t_1,t_2,t_3,\tau,\theta)=$$
$$(t_2-\tau)^{\alpha-1}exp[-\alpha(t_2-t_1)(t_3-\tau)^{\alpha-1}\theta A(\tau)]-(t_2-\tau)^{\alpha-1}I,$$
$$P_2(t_1,t_2,t_3,\tau,\theta)=$$
$$\alpha\theta\zeta_\alpha(\theta)[A(t_1)-A(\tau)][(t_2-\tau)^{\alpha-1}-(t_1-\tau)^{\alpha-1}]exp[-(t_1-\tau)\theta A(\tau)]$$
$$=\alpha(\alpha-1)\theta\zeta_\alpha(\theta)(t_2-t_1)(t_4-\tau)^{\alpha-2}[A(t_1)-A(\tau)]exp[-(t_1-\tau)\theta A(\tau)].$$

We notice that

$$P_3(t_1,t_2,t_3,\tau,\theta)=$$
$$-\alpha\theta(t_2-\tau)^{\alpha-1}(t_3-\tau)^{\alpha-1}\int_0^{t_2-t_1}A(\tau)exp[-\eta\alpha\theta(t_3-\tau)^{\alpha-1}A(\tau)]d\eta.$$

Now it is easy to see that

$$\parallel \Lambda(t_1,t_2,\tau)\parallel\leq C(t_1-\tau)^{\gamma-2}(t_2-t_1).$$

Using the two bounds of $\parallel \Lambda(t_1,t_2,\tau)\parallel$ we get

$$\parallel \Lambda(t_1,t_2,\tau)\parallel=\parallel \Lambda(t_1,t_2,\tau)\parallel^\gamma\parallel \Lambda(t_1,t_2,\tau)\parallel^{1-\gamma}$$
$$\leq C(t_1-\tau)^{-1}(t_2-t_1)^\gamma$$

consequently

$$\parallel \phi_1(t_2,\tau)-\phi_1(t_1,\tau)\parallel\leq C(t_1-\tau)^{-1}(t_2-t_1)^\gamma. \tag{2.19}$$

Using (2.18) and (2.19), we get

$$\parallel \phi_1(t_2,\tau)-\phi_1(t_1,\tau)\parallel^{\delta_1+\delta_2}\leq C^{\delta_1+\delta_2}(t_2-t_1)^{\gamma\delta_1}(t_1-\tau)^{\delta_2\gamma-\delta_1-\delta_2},$$

where $\delta_1>0,\delta_2>0$. Thus

$$\parallel \phi(t_2,\tau)-\phi_1(t_1,\tau)\parallel\leq C(t_2-t_1)^{\gamma-\delta}(t_1-\tau)^{\delta-1}, \tag{2.20}$$

where $\delta=\frac{\delta_2\gamma}{\delta_1+\delta_2}<\gamma$
Using (2.16), we get

$$\phi(t_2,\tau)-\phi(t_1,\tau)=\phi_1(t_2,\tau)-\phi_1(t_1,\tau)+$$

$$+\int_{\tau}^{t_1}[\phi_1(t_2,s)-\phi_1(t_1,s)]\phi(s,\tau)ds+\int_{t_1}^{t_2}\phi_1(t_2,s)\phi(s,\tau)ds. \quad (2.21)$$

We estimate the norm of the first term on the right of (2.21) by using (2.20), the norm of the second by using (2.13) and (2.15). After simple calculations, the required result follows.
We shall make use of the inequality

$$\| A(t)A^{-1}(s) \| \leq C,$$

which follows from condition (A_2) where $t, s \in [0,T]$ and C is a positive constant independent both of t and s.
Theorem 2.1. There exists an operator - valued function Q(t) with values in B(E), defined and strongly continuous in t for $0 \leq t \leq T$ such that:
(B_1) The fractional deivative $\frac{d^\alpha Q(t)}{dt^\alpha}$ exists in the strong topology and belongs to B(E) for $0 \leq t \leq T$ and is strongly continuous in t for $0 \leq t \leq T$,
(B_2) The range of Q (t) is included in D(A) for $0 \leq t \leq T$,
(B_3) For any $u_0 \in E$, $Q(t)u_0$ satisfies the fractional differential equation

$$\frac{d^\alpha Q(t)}{dt^\alpha}u_0+A(t)Q(t)u_0=0, \quad 0<t\leq T, \quad (2.22)$$

(B_4) $\qquad Q(0)=A^{-1}(0)$
(B_5) A solution of the Cauchy problem (1.5), (1.6) is given by
$v(t)=Q(t)A(0)u_0, \ \ for \ \ any \ \ u_0 \in D(A).$
Proof. We set

$$Q(t)=A^{-1}(0)+\int_0^t \psi(t-\eta,\eta)U(\eta)d\eta. \quad (2.23)$$

We shall determine the operator valued function $U(t)$ such that $Q(t)u_0$ satisfies equation(2.22). Using formally lemma (2.2), we get

$$U(t)u_0+\int_0^t \phi_1(t,\eta)U(\eta)u_0 d\eta=-A(t)A^{-1}(0)u_0, \quad (2.24)$$

(Comp [9] , [10] , [11]).
The operator- valued function $U(t)$ can be obtained by successive approximations, that is we put

$$U(t)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(t),$$

where $U_0(t)=-A(t)A^{-1}(0)$,

$$U_{k+1}(t)=-\int_0^t \phi_1(t,s)U_k(s)ds. \quad (2.25)$$

Using the properties of ϕ_k and Fubini's theorem one easily shows by intduction that

$$U_k(t) = -\int_0^t \phi_k(t,s)A(s)A^{-1}(0)ds. \tag{2.26}$$

Using (2.15), (2.25) and (2.26) we deduce that the series $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)$ uniformly coverges on $[0,T]$. It is clear that $U(t)$ is given by

$$U(t) = -A(t)A^{-1}(0) - \int_0^t \phi(t,s)A(s)A^{-1}(0)ds. \tag{2.27}$$

Using (2.15) , we get

$$\| U(t) \| \leq C + Ct^{\gamma}. \tag{2.28}$$

It is easy to see that

$$U(t_2) - U(t_1) = [A(t_1) - A(t_2)]A^{-1}(0)$$

$$-\int_0^{t_1} [\phi(t_2,s) - \phi(t_1,s)]A(s)A^{-1}(0)ds - \int_{t_1}^{t_2} \phi(t_2,s)A(s)A^{-1}(0)ds.$$

Using condition $(A_2)$and lemma (2.3), we fined

$$\| U(t_2) - U(t_1) \| \leq C(t_2-t_1)^{\gamma} + \frac{c}{\delta}(t_2-t_1)^{\gamma-\delta}t_1^{\delta} + \frac{c}{\gamma}(t_2-t_1)^{\gamma}, \tag{2.29}$$

where $t_2 > t_1, t_1, t_2 \in [0,T]$ and C is positive constant independent of t_1, t_2. Recalling that $\psi(t-\eta,\eta)$ is uniformly continuous in t,η provided $t-\eta \geq \epsilon > 0$ and using (2.8), (2.29), one can verify without difficulty that $\int_0^t \psi(t-\eta,\eta)U(\eta)d\eta$ is uniformly continuous (in the norm of B (E))in $t \in [0,T]$. Using (2.28), we get $\| Q(t) \| \leq C$, for all $t \in [0,T]$, where C is a positive constant independent of t. It is also obvious that $Q(0) = A^{-1}(0)$ and $Q(t)u_0$ is contiuous in $t \in [0,T]$ for every $u_0 \in E$. Let us prove now that the range of $Q(t)$included in $D(A)$ for $0 < t \leq T$.

Using (2.29) and lemma (2.1), we deduce that $A(t)\psi(t-\eta,\eta)U(\eta)$ is uniformly continuous in the uniform tolpology in the variables $t,\eta \in [0,T]$, provided that $t-\eta \geq \epsilon$ where ϵ is any positive number.

The operator - valued function $A(t)\psi(t-\eta,\eta)U(\eta)$ can be written in the form

$$A(t)\psi(t-\eta,\eta)U(\eta) = A(t)[\psi(t-\eta,\eta) - \psi(t-\eta,t)]U(\eta)$$

$$+A(t)\psi(t-\eta,t)[U(\eta) - U(t)] + A(t)\psi(t-\eta,t)U(t). \tag{2.30}$$

By using (2.6) and (2.28), we find that the norm of the first term on the right of (2.30) is bounded by $C(t-\eta)^{\gamma-1}$. By using (1.4) and (2.29), we find that the norm of the second term on the right of (2.30) is bounded by $C(t-\eta)^{\gamma-\delta-1}$, (where C is a generic positive constant independent both of t *and* η). Using these estimations and noticing that;

$$\int_0^t A(t)\psi(t-\eta,\eta)U(\eta)u_0d\eta = \int_0^t A(t)[\psi(t-\eta,\eta)-\psi(t-\eta,t)]U(\eta)u_0d\eta +$$

$$\int_0^t A(t)\psi(t-\eta,t)[U(\eta)-U(t)]u_0d\eta - \int_0^\infty \zeta_\alpha(\theta)[exp(-t^\alpha\theta A(t)]U(t)u_0d\theta + U(t)u_0.$$

One can deduce that the integral $\int_0^t A(t)\psi(t-\eta,\eta)U(\eta)u_0d\eta$ is continuous in $t\in[0,T]$, for every $u_0\in E$. Consequently the range of Q (t) is included in D(A) for every $t\in[0,T]$. It can be proved that there are two positive constants C and δ such that

$$\| A(t)Q(t)u_0 \| \leq C + Ct^\delta, t\in[0,T],$$

where $0<\delta<1$ and C is independent of t, $u_0\in E$. Using (2.23), (2.29) and lemma (2.2), one can easily show that $\frac{d^\alpha Q(t)}{dt^\alpha}u_0$ exists and represents a continuous function in $t\in[0,T]$ for every $u_0\in E$.
It is clear also that $Q(t)u_0$ satisfies equation (2.22). The function $v(t) = Q(t)A(0)u_0$ represents a solution of the Cauchy problem (1.5) (1.6), if $u_0\in D(A)$. This completes the proof of the properties $B_1,\ldots,B_5$

Theorem 2.2. A solution of the Cauchy problem (2.3) , (2.4) is given by

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \psi(t-\eta,\eta)U(\eta)A(0)u_0d\eta$$

$$+\int_0^t \psi(t-\eta,\eta)f(\eta)d\eta + \int_0^t\int_0^\eta \psi(t-\eta,\eta)\phi(\eta,s)f(s)dsd\eta, \tag{2.31}$$

or

$$u(t) = u_0 - \int_0^t \psi(t-\eta,\eta)A(\eta)u_0d\eta - \int_0^t\int_0^\eta \psi(t-\eta,\eta)\phi(\eta,s)A(s)u_0dsd\eta$$

$$\int_0^t \psi(t-\eta,\eta)f(\eta)d\eta + \int_0^t\int_0^\eta \psi(t-\eta,\eta)\phi(\eta,s)f(s)ds,d\eta, \tag{2.32}$$

where $u_0\in D(A)$ and f satisfies condition $(A_3), t\in[0,T]$.
Proof. We set $u(t) = A^{-1}(0)u_0 + \int_0^t \psi(t-\eta,\eta)V(\eta)d\eta$. Then we determine the abstract function V such that u satisfies equation (2.3). The Proof is carried out similar to Theorem 2.1.
Theorem 2.3. The strong solution of the Cauchy problem (1.5), (1.6) is unique.
Proof: We introduce the bounded operators $A_n(t) = A(t)[I+\frac{1}{n}A(t)]^{-1}$. It is known that

$$\| (A_n(t)-\lambda I)^{-1} \| \leq \frac{C}{|\lambda|+1}, \tag{2.33}$$

$$\| (A_n(t) - A_n(\tau))A_n^{-1}(s) \| \leq C \mid t - \tau \mid^{\gamma}, \tag{2.34}$$

where $s, t, \eta \in [0, T]$ and C is a positive constant independent of t, τ, s and n.
Consider the following Cauchy problem

$$\frac{d^{\alpha} v_n(t)}{dt^{\alpha}} + A_n(t)v_n(t) = 0, n = 1, 2, ... \tag{2.35}$$

$$v_n(0) = u_0. \tag{2.36}$$

The function $w_n(t) = v(t) - v_n(t)$, then satisfies

$$\frac{d^{\alpha} w_n(t)}{dt^{\alpha}} + A_n(t)w_n(t) = g_n(t), t \in [0, T] \tag{2.37}$$

$$w_n(0) = 0, \tag{2.38}$$

where $g_n(t) = [A_n(t) - A(t)]v(t)$.
The solution of the Cauchy problem (2.37), (2.38) is unique. To prove this fact, suppose $g_n(t) = 0$, then $w_n(t)$ satisfies

$$\| w_n(t) \| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \theta)^{\alpha - 1} \| A_n(\theta)w_n(\theta) \| d\theta$$

$$\leq \frac{C_n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \theta)^{\alpha - 1} \| w_n(\theta) \| d\theta,$$

for every n, where C_n is a positive constant. It follows that $w_n(t) = 0$ for all $t \in [0, T]$.
Noticing that g_n is continuous in $t \in [0, T]$ for every $n = 1, 2, \ldots$ and $A_n(t)$ is bounded operator that varies continuously in $t \in [0, T]$ (in the uniform topology), then it is easy to see with the help of (2.3) that the unique solution of the Cauchy problem (2.37), (2.38) is given by

$$w_n(t) = \int_0^t \psi_n(t-\eta, \eta)g_n(\eta)d\eta + \int_0^t \int_0^{\eta} \psi_n(t-\eta, \eta)\phi^{(n)}(\eta, s)g_n(s)dsd\eta, \tag{2.39}$$

where

$$\psi_n(t - \eta, \eta) = \alpha \int_0^t \theta(t - \eta)^{\alpha - 1}\zeta_{\alpha}(\theta)exp[-(t - \eta)^{\alpha}\theta A_n(\eta)]d\theta,$$

$\phi^{(n)}(t, \tau)$ is the unique solution of the integral equation

$$\phi_1^{(n)}(t, \tau) = \phi_1^{(n)}(t, \tau) + \int_{\tau}^t \phi^{(n)}(t, s)\phi_1^{(n)}(s, t)ds,$$

$$\phi_1^{(n)}(t, \tau) = [A_n(t) - A_n(\tau)]\psi_n(t - \tau, \tau)$$

It can be shown that the sequence $\{g_n\}$ uniformly converges to zero in E with respect to $t \in [0, T]$.
Consequently by using (2.8), (2.15), (2.23), (2.34) and (2.39), we get $v(t) = lim_{n\to\infty} v_n(t)$ uniformly with respect to $t \in [0, T]$ since $v_n(t)$ is defined uniquely as the solution of the Cauchy problem (2.35), (2.36), also $v(t)$ is unique.
The continuous dependence of solution of the Cauchy problem (2.3), (2.4) on f and u_0 is obtained from formula (2.32), (Comp [12]).
It must be noticed that the fractional differential equations have many important applications in different branches of applied mathamatics (see [13], [14], [15]).

3. Application

Let Ω be a bounded domain in the real n - dimensional Euclidean space R^n.For any
$0 < T < \infty$, denote by Q_T the cylinder $\{(x, t) : x \in \Omega, 0 < t < T\}$ and by $\partial\Omega$ the bounday of Ω.
We consider the differential operator

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} + A^*(x, t, D) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} + \sum_{|q|\le 2m} a_q(x, t) D^q,$$

where $A^*(x, t, D)$ is said to be uniformly elliptic in $\overline{Q_T}$ if the coefficients $a_q(x, t)$ are bounded in $\overline{Q_T}$ and $(-1)^m Re \sum_{|q|=2m} a_q(x, t)\xi^q \ge C \mid \xi \mid^{2m}$, for all $(x, t) \in \overline{Q_T}$ and for all real ξ, where C is a positive constant independent of x, t, ξ and

$$\mid \xi \mid^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2 \ (\overline{Q_T} = \{(x, t) : x \in \Omega \cup \ \partial\ \Omega, 0 \le t \le T\}),$$

$(D^q = D_1^{q_1}...D_n^{q_n} \quad , \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad |q| = q_1 + ... + q_n, q = (q_1, ..., q_n)$ is a multi-index)

We consider the Cauchy problem of the fractional evolution equation

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} + A^*(t)u = f(t), 0 < t \le T, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{3.2}$$

in the Hilbert space $L^2(\Omega)$, where for each t , f(t) is the function f(x,t) belonging to $L_2(\Omega)$ and $A^*(t)$is the operator with domain $D(A^*) = H^{2m}(\Omega) \bigcap H_0^m(\Omega)$ given by $A^*(t) = A^*(x, t, D)$. And u_0 is a function in $H^{2m}(\Omega) \bigcap H_0^m(\Omega)$ (see [8] , [16]).
$(H^m(\Omega))$ is the completion of the space $C^m(\Omega)$ with respect to the norm

$$\parallel f \parallel_m = [\sum_{|q|\le m} \int_\Omega [D^q f(x)]^2 dx]^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

$C^m(\Omega)$ is the set of all continuous function define on Ω , which have continuous partial derivatives of order less than or equal to m, $H_0^m(\Omega)$ is the complation of $C_0^m(\Omega)$ with respect to the norm $\| f \|_m$ and $C_0^m(\Omega)$ is the set of all function $f \in C^m(\Omega)$ with compact supports in Ω).
It is assumed that
(I) All the coefficients $a_q(x,t)$ are continuous in $\overline{Q_T}$
and $| a_q(x,t_2) - a_q(x,t_1) | \leq C | t_2 - t_1 |^\gamma$,
$0 < \gamma \leq 1, t_1, t_2 \in [0,T]$ and C is a positive constant independent of $t_1, t_2$and $x \in \Omega$.
(II) $[\int_\Omega | f(x,t_2) - f(x,t_1) |^2 \, dx]^{\frac{1}{2}} \leq C | t_2 - t_1 |^\beta, 0 < \beta \leq 1, C$ is a positive constant independent of t_1 and t_2.
Theorem 3.1. Assume that $A^*(x,t,D)$ is uniformly elliptic in $\overline{Q_T}$, that (I), (II) hold and $\partial\Omega$ is of class C^{2m}, then there exists a unique strong solution of the problem (3.1), (3.2).
Proof. Writting equation (3.1) in the form

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} + [A^*(t) + kI]u = f(t) + ku \tag{3.3}$$

we see that for some constant k, the operator $A^*(t) + kI$ satisfies the conditions (A_1) and (A_2)
Using formula (2.32), we get

$$u(t) = u_0 - \int_0^t \psi(t-\eta,\eta)A(\eta)u_0 d\eta - \int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta,\eta)\phi(\eta,s)A(s)u_0 ds d\eta$$

$$+ \int_0^t \psi(t-\eta,\eta)[f(\eta) + ku(\eta)]d\eta + \int_0^t \int_0^\eta \psi(t-\eta,\eta)\phi(\eta,s)[f(s) + ku(s)]ds d\eta,$$

$$A(t) = A^*(t) + kI$$

It can be proved that u satisfies a uniform Holder condition, then the last integral equation has the unique required solution u(t). This completes the proof.

Acknowledgments
I would like to thank the referees and Prof. Argimiro Arratia for their careful reading of the manuscript and their valuable comments.

References

[1] El-Borai M.M. Some characterization of an abstract differential equation. Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 48, (1979).

[2] El-Borai M.M. Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolution equations. Choos, Solitons and Fractals, 14 (2002).

[3] Feller W. : An introduction to probability theory and its applications, vol II. New York. Wiley, (1971).

[4] Friedman A. Partial differential equation. Holt, Rinehart and Winston, New York. (1969).

[5] Friedrich Ch. Linear viscoelastic behaviour of branched polybutadience: a fractional calculus approch. Acta polym, 46, (1995).

[6] Gelfand I.M. and Shilove G.E. Generalized functions vol I. Moscow Nauka, (1959).

[7] Gorenflo R, Mainardi F. Fractional calculus and stable probability distribution. Arch Mech., 50, (1995).

[8] Hille E, Philips R.S. Functional analysis and semigroup. Americal Mathematical Society colloquium puplication, Vol.31. Providence(RI), (1957).

[9] Kato T. and Tanabe H. On the abstract evolution equation. Osaka Math. J., 14 (1962). 107-133.

[10] Koeller R.C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. Trans ASME J App. Mech, 51, (1984).

[11] Riedrich Chand Braun H. Linear viscoelastic behaviour of complex materials: a fractional mode representation. Colloid polym Su. (1994).

[12] Shneider W.R. and Wayes W. Fractional diffusion and wave equation. J. Math. Phys. (1989).

[13] Soholevski P.E. On equations of parabolic type in a Banach space, Trudy Moscow Math., 10 (1961).

[14] Showji Kawatzu. Cauchy problem for abstract evolution equations of parabolic type. J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 30, (1990).

[15] Tanabe H. On the equation of evolution in a Banach space, Osaka Math. J. 12 (1960).

[16] Wayes W. The fractional diffusion equation .J. Math. Phys.(1986).

Mahmoud M. El-Borai
Faculty of Science, Alexandria University
Alexandria, Egypt
e-mail: m_m_elborai@yahoo.com

Uma classe de séries infinitas envolvendo termos de seqüências generalizadas

João Luiz Martins e Adilson J. V. Brandão

Resumen

In this article we introduce a recurrence formula for certain infinite series whose terms include factors that belong to a generalized Horadam-type sequence. This recurrence formula is used to calculate the sum of the series $\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n$ without the need of derivatives and at a lower computational cost. Some results are apresented below which were obtained by numerical implementation of the recurrence formula for some particular values of k and x.

1 Introdução

Neste artigo, considera-se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n \tag{1}$$

em que x é um número real, k é um inteiro não-negativo e $\{W_n\}_{n=0}^{+\infty}$ é uma seqüência numérica arbitrária. Aplicando-se o critério da razão [6] a (1), observa-se que sua convergência está diretamente ligada ao caráter (comportamento) da seqüência $\{W_{n+1}/W_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Uma questão que se coloca é a seguinte: a partir da escolha de seqüências $\{W_n\}_{n=0}^{+\infty}$ que venham possibilitar que expressões do tipo $\{W_{n+1}/W_n\}_{n=1}^{+\infty}$ sejam seqüências convergentes, é possível obter uma fórmula para a soma da série (1)?

A finalidade deste trabalho é responder essa questão para o caso em que $\{W_n\}_{n=0}^{+\infty}$, são seqüências dadas recursivamente por

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n\,, \quad n \geq 0; \tag{2}$$

sendo $W_0 = 0$, $W_1 = 1$ valores iniciais, p e q inteiros arbitrários.

Usando-se a forma de Binet [3] e o método das diferenças finitas [1], mostra-se, mediante o fato de que $p^2 \geq 4q$ que a seqüência $\{W_{n+1}/W_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge para o limite $\alpha_+ = (p + \sqrt{p^2 - 4q})/2$ se $p > 0$ e para $\alpha_- = (p - \sqrt{p^2 - 4q})/2$ se $p < 0$.

Em seguida, obtém-se a identidade

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n x^n = \frac{x}{1 - px + qx^2} \tag{3}$$

sempre que $x \in (-1/\alpha_\pm, 1/\alpha_\pm)$.

É possível encontrar uma fórmula de recorrência para a soma da série (1), mediante a utilização da identidade (3), do desenvolvimento binomial de Newton [6] e de alguns rearranjos dos termos dessa série.

A importância da fórmula para a soma dessa série está no fato de que a implementação numérica fica facilitada pela sua característica de recursividade. Algumas somas para a série (1), utilizando-se essa fórmula, são apresentadas para os casos especiais em que os coeficientes são as seqüências de Fibonacci, Pell, das Médias Aritméticas e dos Naturais.

2 Preliminares

Considere a seqüência $\{W_n = W_n(0, 1, p, q)\}_{n=0}^{\infty}$, estabelecida em [3], [4] e [5], dada pela fórmula de recorrência

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n; \tag{4}$$

onde p e q são inteiros arbitrários.

A forma de Binet [3] para W_n é dada por,

$$W_n = \left(\alpha_+^n - \alpha_-^n\right)/\sqrt{\Delta}; \tag{5}$$

onde $\Delta = p^2 - 4q$,

$$\alpha_+ = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_- = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{6}$$

são as raízes distintas da equação $x^2 - px + q = 0$.

Considerando $p^2 \geq 4q$ e fazendo uso das expressões (5) e (6), é fácil ver que a seqüência

$$\left\{\frac{W_{n+1}}{W_n}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{7}$$

converge para α_+ se $p > 0$ e α_- se $p < 0$.

A próxima seção é destinada ao estabelecimento de uma fórmula de recorrência para a soma da série

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k W_n x^n; \tag{8}$$

sendo $\{W_n\}$ a seqüência (4), x um número real e k um inteiro não-negativo.

3 Fórmula de Recorrência

Antes de apresentarmos a soma da série (8), vamos estabelecer alguns resultados que deverão ser úteis na especificação dessa soma.

A série

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n x^n, \tag{9}$$

converge sempre que $|x| < 1/\alpha_{\pm}$ (α_+ se $p > 0$ e α_- se $p < 0$).

Além disso, sua soma é a função

$$S(x) = \frac{x}{1 - px + qx^2}. \tag{10}$$

De fato, a convergência da série (8) pode ser vista mediante o uso do teste da razão [6] e do fato de (7) ter como limite $\alpha_{\pm}$. Para mostrar que (10) é a soma de (9), considere

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} W_n x^n \\ &= W_1 x + W_2 x^2 + \ldots + W_n x^n + \ldots. \end{aligned} \tag{11}$$

Multiplicando (11) por $-px$, obtém-se

$$-pxS(x) = -pW_1x^2 - \ldots - pW_nx^{n+1} - \ldots. \tag{12}$$

Depois, multiplicando (11) por qx^2, tem-se

$$qx^2 S(x) = qW_1x^3 + qW_2x^4 + \ldots + qW_nx^{n+2} - \ldots. \tag{13}$$

Finalmente, somando as expressões (11), (12) e (13) e fazendo uso da fórmula de recorrência (4), obtém-se

$$S(x) = \frac{x}{1 - px + qx^2}\,, \tag{14}$$

que é a soma da série (9).

É óbvio que, dentro do intervalo de convergência, a série (8) pode ser obtida através da aplicação na série (9) do teorema de derivação termo a termo [6].

De fato, tal fórmula é obtida aplicando-se o operador $D = \frac{xd}{dx}$, k vezes na conhecida série (9).

Definindo

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n \,, \tag{15}$$

uma fórmula de recorrência pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S(x,0) &= \frac{x}{1-px+qx^2}, \\ S(x,j) &= D[S(x,j-1)] \quad j=1,2,\ldots,k. \end{aligned} \tag{16}$$

O problema do algoritmo (16) é o alto custo de, em cada passo, obter a derivada de uma função. Por isso, encontrar uma soma para a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nW_n}{2^n}$ não parece difícil, a partir do algoritmo (16). Entretanto, para determinar a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{100}W_n}{2^n}$, aplicando-se esse algoritmo, a obtenção do resultado torna-se bem exaustivo e computacionalmente muito caro.

Um dos propósitos deste artigo é obter uma outra fórmula de recorrência para a série (8) sem o uso de derivadas e a um custo computacional mais baixo.

Inicialmente, apresenta-se uma expressão para a soma

$$R(x,k) = \sum_{n=k}^{+\infty} W_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n x^n - \sum_{n=1}^{k-1} W_n x^n. \tag{17}$$

Utilizando a identidade (9), tem-se

$$\begin{aligned} R(x,k) &= \frac{x}{1-px+qx^2} - \\ &- (W_1 x + W_2 x^2 + W_3 x^3 + \ldots + W_{k-1} x^{k-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

Efetuando a soma em (18) e usando a fórmula (4), obtém-se

$$R(x,k) = \sum_{n=k}^{+\infty} W_n x^n = \frac{W_k x^k + W_{k-1} x^{k+1}}{1-px+qx^2}. \tag{19}$$

Através do uso do teste da razão [6] e do fato estabelecido em (5), (6) e (7), é fácil ver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k W_n x^n \tag{20}$$

converge sempre que $|x| < \dfrac{1}{\alpha_\pm}$.

Com o intuito de obter uma fórmula de recorrência para a série (8), considera-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \sum_{r=1}^{+\infty} n^k W_r x^r \\ &= 1^k W_1 x + 2^k W_2 x^2 + \ldots + n^k W_r x^r + \ldots . \end{aligned} \tag{21}$$

Mas,

$$\begin{aligned} S(x,k) &= (1^k - 0^k)(W_1 x + W_2 x^2 + \ldots + W_n x^n + \ldots) \\ &+ (2^k - 1^k)(W_2 x^2 + W_3 x^3 + \ldots + W_n x^n + \ldots) \\ &+ (3^k - 2^k)(W_3 x^3 + W_4 x^4 + \ldots + W_n x^n + \ldots) \\ &\vdots \\ &+ (n^k - (n-1)^k)(W_k x^k + \ldots + \ldots). \end{aligned} \tag{22}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} S(x,k) &= (1^k - 0^k) \sum_{r=1}^{+\infty} W_r x^r + \\ &+ (2^k - 1^k) \sum_{r=2}^{+\infty} W_r x^r + \\ &+ (3^k - 2^k) \sum_{r=3}^{+\infty} W_r x^r + \ldots + \\ &\vdots \\ &+ (n^k - (n-1)^k) \sum_{r=n}^{\infty} W_r x^r + \ldots . \end{aligned} \tag{23}$$

Utilizando a identidade (19), segue então que

$$S(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[n^k - (n-1)^k](W_n x^n + W_{n-1} x^{n+1})}{(1 - px + qx^2)} \tag{24}$$

sempre que $|x| < \dfrac{1}{\alpha_\pm}$.

Separando (24) em duas séries e utilizando uma mudança de variável na segunda série do lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \\ &= \frac{1}{1-px+qx^2}\sum_{n=1}^{+\infty}[n^k-(n-1)^k]W_nx^n \\ &+ \frac{1}{1-px+qx^2}\sum_{r=0}^{+\infty}[(r+1)^k-(r)^k]W_rx^{r+2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Usando o desenvolvimento binomial e rearranjando os termos integrantes de (25), encontra-se

$$\begin{aligned} S(x,k) &= \frac{1}{1-px+qx^2} \\ &\times \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j+1}n^{k-j}W_nx^n+\right. \\ &+ \left. x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}n^{k-j}W_nx^n\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Portanto,

$$S(x,k) = \frac{1}{1-px+qx^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}[(-1)^{j+1}+x^2]S(x,k-j)\right) \tag{27}$$

sempre que $|x| < \dfrac{1}{\alpha_\pm}$.

A fórmula de recorrência (27) permite obter a soma de séries do tipo (8) a um custo computacional pequeno em comparação ao algoritmo (16).

4 Somas de Séries Especiais

Esta seção tem a finalidade de apresentar a soma de séries do tipo (8) em que $\{W_n\} = \{F_n\}$, $\{W_n\} = \{P_n\}$, $\{M_n = W_n = (W_{n-1}+W_{n-2})/2\}$ e $\{N_n = W_n = 2W_{n-1} - W_{n-2}\}$, que são as seqüências de Fibonacci, Pell, das médias aritméticas e dos naturais, [2], [3], [4] e [7], respectivamente.

<u>**Soma da Série de Fibonacci**</u>. A seqüência de Fibonacci $\{F_n\}$ é obtida de (4), tomando $p = 1$ e $q = -1$. Para obter a soma da série de Fibonacci

$$S_F(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k F_n x^n, \tag{28}$$

basta substituir $p = 1$ e $q = -1$ em (27). O resultado é dado por

$$S_F(x,k) = \frac{1}{1-x-x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_F(x, k-j), \tag{29}$$

válido para $|x| < \frac{1}{\phi}$; com $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>**Soma da Série de Pell**</u>. A seqüência de Pell $\{P_n\}$ é obtida de (4), agora tomando $p = 2$ e $q = -1$. A soma da série de Pell

$$S_P(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k P_n x^n \tag{30}$$

é dada a partir da substituição de $p = 2$ e $q = -1$ em (27). O resultado é dado por

$$S_P(x,k) = \frac{1}{1-2x-x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_P(x, k-j) \tag{31}$$

sempre que $|x| < \frac{1}{\gamma}$; com $\gamma = 1 + \sqrt{2}$.

<u>**Soma da Série das Médias**</u>. A seqüência das Médias aritméticas $\{M_n\}$ é obtida de (4), agora tomando $p = \frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$. A soma da série das Médias aritméticas

$$S_M(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k M_n x^n \tag{32}$$

é dada a partir da substituição de $p = \frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{2}$ em (27). O resultado é dado por

$$S_M(x,k) = \frac{2}{2-x-x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_M(x, k-j) \tag{33}$$

sempre que $|x| < 1$. Observa-se que, mesmo que p e q sejam números não inteiros, ainda assim é possívell obter uma fórmula de recorrência para a soma da série (1).

Soma da Série dos Naturais. A seqüência dos Naturais $\{N_n\}$ é obtida de (4), agora tomando $p = 2$ e $q = 1$. A soma da série dos Naturais

$$S_N(x,k) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k N_n x^n \tag{34}$$

é dada a partir da substituição de $p = 2$ e $q = 1$ em (27). O resultado é dado por

$$S_N(x,k) = \frac{1}{1-2x+x^2} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} [(-1)^{j+1} + x^2] S_N(x, k-j) \tag{35}$$

sempre que $|x| < 1$.

5 Implementação Numérica

Esta seção tem por finalidade introduzir alguns exemplos númericos gerados pelos algoritmos (29), (31), (33) e (35). As Tabelas (I), (II), (III) e (IV), apresentam certos resultados de somas envolvendo esses algoritmos, para alguns valores especiais de k e de x dentro dos seus respectivos intervalos de convergências.

Tabela (I): Somas da Série de Fibonacci

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	1.041	6.288×10^2	1.656×10^{73}	4.105×10^{175}
$1/3$	1.2	9.688×10^2	6.526×10^{74}	5.932×10^{178}
$1/e$	1.692	2.752×10^3	4.667×10^{78}	2.549×10^{186}
$1/5$	0.360	2.598×10	2.893×10^{61}	2.130×10^{152}
$-1/3$	-0.247	-0.349×10	-1.01×10^{54}	-3.639×10^{137}

Tabela (II): Somas da Série de Pell

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	5.104	1.271×10^5	3.835×10^{93}	1.105×10^{216}
$1/3$	7.5	4.036×10^5	7.042×10^{97}	3.074×10^{224}
$1/e$	25	1.522×10^7	1.771×10^{111}	1.062×10^{251}
$1/5$	0.663	2.848×10^2	1.150×10^{71}	2.749×10^{171}
$-1/3$	-0.153	-0.784	-7.970×10^{48}	-3.594×10^{127}

Tabela (III): Somas da Série das Médias Aritméticas

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	0.561	0.684×10^2	5.417×10^{64}	5.858×10^{158}
$1/3$	0.612	0.898×10^2	5.236×10^{65}	5.232×10^{160}
$1/e$	0.745	1.655×10^3	9.320×10^{67}	1.495×10^{165}
$1/5$	0.268	0.741×10	3.561×10^{56}	3.681×10^{142}
$-1/3$	-0.30	-0.678×10	-1.986×10^{56}	-1.197×10^{142}

Tabela (IV): Somas da Série dos Naturais

x	k=1	k=5	k=50	k=100
$1/\pi$	1.623	2.914×10^3	1.374×10^{79}	2.340×10^{187}
$1/3$	1.875	4.431×10^3	4.596×10^{80}	2.425×10^{190}
$1/e$	2.616	1.169×10^4	1.559×10^{84}	2.345×10^{197}
$1/5$	0.507	1.031×10^2	9.715×10^{66}	2.138×10^{163}
$-1/3$	-0.11	-0.003×10^2	-3.34×10^{46}	-8.275×10^{122}

6 Observações Finais

O leitor pode observar que aplicou-se a fórmula de recorrência (27) para obter a soma da série (32), mesmo sabendo-se que p e q não eram inteiros. Na verdade, estamos investigando novas fórmulas de recorrências para seqüências do tipo (4) em que p e q estejam em outros domínios e as condições iniciais sejam as mais gerais possíveis. Além disso, alguns resultados análogos aos obtidos anteriormente, mediante o uso da seqüência com a notação (4), bem como, séries cujos coeficientes sejam as seqüências Tribonacci, Tetrabonacci, dentre outras, deverão ser objetos de futuros trabalhos.

Referencias

[1] R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira, Equações Diferenciais com Aplicações, Editora Harbra Ltda, 1988.

[2] R. A. Dunlap, The Golden Ration and Fibonacci Numbers, World Scientific, 1997.

[3] P. Filipponi, Evaluation of Certain Infinite Series Involving Terms of Generalized Sequences. *The Fibonacci Quarterly* **38.4** (2000): 310-316.

[4] N. Gauthier, Identities for Class of Sums Involving Horadam's Generalized Numbers $\{Z_n\}$. *The Fibonacci Quarterly* **36.4** (1998): 295-304.

[5] A.F.Horadam, Basic Properties of a certain generalized sequence of numbers. The Fibonacci Quarterly **3.2** (1965): 161-176.

[6] K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, Dover Publications Inc, New York, 1990.

[7] G. Ledin, On a Certain Kind of Fibonacci Sums. The Fibonacci Quarterly **5.1** (1967): 45-58.

[8] E. L. Lima, Curso de Análise, IMPA (Projeto Euclides), 1976.

João Luiz Martins e Adilson J.V. Brandão
Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto,MG, Brasil
jmartins@iceb.ufop.br

HISTORIA

Carlos Grandjot, tres décadas de matemáticas en Chile: 1930-1960

Claudio Gutiérrez y Flavio Gutiérrez

1 Introducción

Si se mira en perspectiva el desarrollo de las ciencias en Chile, en particular el de las matemáticas, se concluye que han tenido que recorrer un largo y pedregoso camino para llegar a su plena madurez. Muchos son los actores que han intervenido en este proceso, entre ellos varios extranjeros que hicieron de Chile su segunda patria. Carlos Grandjot es uno de ellos. Para comprender su aporte a las matemáticas en Chile es necesario tener a la vista un cuadro, aunque sea sinóptico, del desarrollo de esta disciplina en el país. Sus orígenes se remontan a los últimos años de la Colonia, más precisamente a la Cátedra de Matemáticas instalada en 1758 en la Real Universidad de San Felipe, y al Curso de matemáticas de la Academia de San Luis inaugurado en 1799. Con los albores de la Independencia ambas instituciones se integraron al Instituto Nacional, fundado en 1813, de donde egresaron los primeros agrimensores de la República en 1824. Los contenidos de estos cursos dependían del criterio del profesor y se dictaban en base a apuntes redactados por él mismo. Correspondió a Andrés Antonio Gorbea, ingeniero español que llegó a Chile en 1826, organizar la enseñanza de las matemáticas al estilo europeo. Redactó un programa que se oficializó en 1831 y adoptó para sus clases un texto escrito para la École Polytechnique, institución cuyo espíritu era cultivar las matemáticas como *ciencia "útil"*. Dentro de este espíritu se mantuvieron las matemáticas en Chile hasta fines del siglo diecinueve. Su canal de desarrollo fue la Escuela de Ingeniería.

Con la llegada de los profesores alemanes en 1889 para poner en marcha el Instituto Pedagógico, las matemáticas adquirieron una nueva dimensión. Tafelmacher y Poenisch, ambos doctorados en ciencias exactas, instalan las matemáticas ahora como disciplina autónoma y cultural, como *"corpus" de conocimientos* al servicio de la docencia, carácter que en Europa tenían desde comienzos de siglo. Redactaron los programas y textos de enseñanza y publicaron artículos sobre temas de actualidad en los Anales de la Universidad de Chile. Esta nueva faceta de las matemáticas causó impacto entre algunos intelectuales. Valentín Letelier comentó en 1895 en su libro *La lucha por la cultura*:

"Hacía tantos años que en Chile no se escribía sobre asuntos de matemáticas, que las últimas generaciones escolares se habían educado en la idea de que esta ciencia estaba momificada y no se prestaba a mayor desarrollo."

El impulso de Poenisch y Tafelmacher se centró básicamente en la enseñanza; formaron una legión de abnegados discípulos que se esparció por todos los ámbitos del territorio nacional, lo que hizo decir a Poenisch en 1929, ya jubilado: "la enseñanza del ramo se halla confiada en manos de personas que saben y pueden cumplir con sus deberes [...] su preparación y espíritu de trabajo me dan el derecho de descansar tranquilo." No obstante esta justa satisfacción del Maestro, observemos que una ciencia madura, además de sus facetas como ciencia "útil" y como "corpus" de conocimiento –a la sazón bien organizadas en Chile– requiere de un tercer aspecto para no estancarse y estimular su desarrollo. Este aspecto es la *ciencia como proceso creativo. Correspondió a Carlos Grandjot ser pionero y primer actor en la incorporación de este tercer cauce de desarrollo de las ciencias exactas chilenas.*

Desde su llegada al país, Grandjot participó en la creación de instituciones para el progreso y cultivo de la ciencia nacional. Fue profesor fundador del Instituto de Chile (1930); de la primera Sociedad Matemática de Chile (1953) de la cual fue su primer presidente, y del Instituto de Investigaciones Matemáticas (1957), entre otras. Desde su cátedra dio a conocer y promovió entre sus alumnos la matemática de vanguardia y la física moderna, a veces con éxito y otras sin él, pero siempre con entusiasmo. Colaboró muy de cerca con las autoridades académicas en las institucionalización de la investigación científica y en los necesarios contactos internacionales con centros de exelencia para activarla en Chile.

Si el conocimiento de su trayectoria y de su obra ayudan a esclarecer el desarrollo de las matemáticas en Chile en el período estudiado, entonces este artículo habrá cumplido su objetivo.

El Dr. Grandjot, como le decían sus alumnos, llegó a Chile el 1o. de Mayo de 1929, procedente de Alemania, contratado por el Gobierno para "prestar sus servicios como Profesor de Matemáticas en los establecimientos de instrucción de la República. Tendrá la obligación de servir hasta quince horas semanales de clases, incluídos seminarios."[1] Al llegar, comenzó dictando "clases de Matemáticas Superiores y Elementales, de Filosofía y Física en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile."[2] El contrato tenía una duración de dos años a contar del 9 de Abril de 1929.[3] Renovó contrato sucesivamente, hasta que lo sorprendió en Chile el comienzo de la Segunda Guerra Mundial. Esto de alguna forma

[1] Decreto Supremo No 1764 que aprueba el Contrato celebrado entre el S. Gobierno y el Sr. Karl Grandjot, Santiago, 17 de Mayo de 1929. Boletín del Consejo Universitario, Decretos Gubernativos.

[2] Autobiografía.

[3] Sin embargo, su hija Sigrid recuerda que siempre escuchó decir a su padre que el contrato era por *cinco* años, renovable por otros cinco en forma sucesiva.

selló su destino y decidió quedarse en Chile y nacionalizarse, lo que permitió que otras tres escuelas universitarias, además del Pedagógico, disfrutaran de sus servicios: la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, desde 1933; la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile en su curso Complementos de Matemáticas Superiores, a partir de 1945; y la Escuela de Arquitectura de la mencionada Universidad Católica desde el año 1953.

Las actividades de Karl Grandjot no se limitaron a la docencia. Su amplia cultura, sus dotes de investigador científico y su entusiasmo lo llevaron a participar, además, en sociedades de diverso orden: fue presidente de la Sociedad Chilena de Historia Natural, donde colaboró con varios trabajos originales; miembro del Consejo de la Liga Chileno-Alemana; socio y director de la Sociedad Musical Mozart de Santiago; en su calidad de socio del Club Alemán de Excursionismo, recorrió el territorio chileno en toda su extensión; viajó por Bolivia y el Alto Perú; visitó en diversas ocasiones la región de la Araucanía y, entre sus orgullos personales, cuenta el haber aprendido mapudungún (lengua mapuche) "entre los indios del Sur". De hecho, su cultura lingüística era muy amplia: hablaba correctamente, además del idioma alemán, castellano, inglés, francés, ruso, mapudungún y portugués, junto al latín, griego y holandés. En sus viajes se interesó, además, por el aymará y el quechua. Era buen conocedor de varios dialectos alemanes y poseía también elementos de japonés y chino, cuyos símbolos gustaba comparar.

Venía de Alemania precedido de una merecida fama como estudiante prodigio debido a su colaboración con Landau en cierta mejora en la axiomatización de los números naturales, conocida como "la objeción de Grandjot", y sus numerosas publicaciones en las más prestigiosas revistas europeas de una de las áreas más difíciles de las matemáticas, como es la teoría de números. Entre los estudiantes del Pedagógico de los años cuarenta circulaba la leyenda –no confirmada, pero tampoco desmentida– de que el Gobierno chileno para contratarlo lo habría seleccionado, después de un riguroso concurso de antecedentes, entre 500 postulantes que acudieron al llamado.[4]

El Dr. Grandjot tenía una facilidad asombrosa para comenzar sus clases desde cualquier ángulo. Empezaba estableciendo algunas proposiciones iniciales, y luego de ellas sacaba las conclusiones convenientes para sus objetivos.[5] Decía que la matemática se parece mucho a la construcción de un edificio. Primero son los cimientos y en seguida la edificación. Los cimientos según el terreno pueden ser anchos con gran derroche de material, o bien angostos pero profundos con gasto mínimo. Por analogía, se puede tener una axiomatización con un gran número de axiomas, más de los necesarios, o bien una axioma-

[4] Quienes fuimos sus alumnos, jamás dudamos de la veracidad de esta anécdota. F. Gutiérrez, recuerdos personales, 1951.

[5] Corrobora esto los comentarios del Dr. Benedicto Chuaqui a uno de los autores al mirar conjuntamente el ordenamiento de las materias en los cuadernos que conserva de las clases particulares que Grandjot les daba a él y a Rolando Chuaqui.

tización con un número exacto de proposiciones iniciales para la construcción de una teoría matemática. Ambas opciones son legítimas, según el rigor que quiera dársele a la exposición. Y de aquí el consejo pedagógico: la intuición en la enseñanza escolar es un instrumento valioso cuando es bien administrado y se usa con prudencia. El excesivo rigor o formalismo suele distanciar a los alumnos del gusto por las matemáticas. Hay que proceder con mucha cautela.

A su gran versación científica unía un gran sentido docente. Si notaba en sus alumnos señales de cansancio o agotamiento mental ahí estaba el chiste o la anécdota oportuna. A propósito de la teoría de los colores contó que en cierta ocasión que vestía corbata roja, se encontró en la Sala de Profesores con Abraham Pérez, profesor de Geometría del Pedagógico y de Algebra de la Escuela de Ingeniería; se acercó a él y mostrándole su corbata le preguntó: "¿Que te parece mi corbata, Abraham?" Pérez, sospechando alguna diablura de su colega, cogió la corbata, la palpó entre sus dedos, y respondió lacónicamente: "me parece de buena calidad", respuesta que Grandjot celebraba riendo de buena gana. Luego agregaba que Pérez sufría de daltonismo, y entonces toda la clase celebraba también el ingenio.[6] Recuperada la capacidad de atención de los oyentes, reiniciaba la clase.

A su buen humor[7] unía su velocidad de pensamiento. En otra ocasión, después de haber terminado su conferencia *¿Qué es la vida?*[8], un asistente, tal vez intrigado por las teorías expuestas o intentando un contraejemplo, sacó su reloj de bolsillo y le dijo: "Profesor, yo pienso que mi reloj tiene vida, ¿que opina Ud.?" A lo que Grandjot respondió de inmediato: "Señor, cuando usted publique un tratado sobre la reproducción de los relojes le daré mi opinión."

La vida de Grandjot fue laboriosa, pero relajada, sin faltarle momentos difíciles. Su afición principal era el alto montañismo a lomo de mula y con carpa. Casi siempre salía acompañado de su esposa, Gertrudis Fritsche, con quien contrajo matrimonio en Göttingen en 1926.[9] Ambos eran amantes de la naturaleza y expertos en botánica. En sus excursiones recolectaban plantas y especies autóctonas. Clasificaron muchas de ellas como se desprende de sus publicaciones en la Revista de Historia Natural y en la Revista de la Sociedad Científica Alemana. Otro pasatiempo de Grandjot era la música. En ocasiones especiales, como cumpleaños, bautizos o matrimonios componía música para sus amigos; sentado en su escritorio escribía la partitura que luego comprobaba

[6]Recuerdos de F. Gutiérrez, alumno de Grandjot en 1951 en el curso de Física Teórica.

[7]Otra anécdota contada por B. Chuaqui a los autores: Cuando en su casa recibía una llamada telefónica equivocada, respondía con picardía: tiene sólo tres dígitos buenos...

[8]Año 1947. Publicada en Impulso, Revista del Centro de Ingenieros de la Universidad Católica. Ver Bibliografía de Grandjot.

[9]Gertrudis llegó a Chile en Septiembre de 1929, cinco meses después de Karl, acompañada de Sigrid, hija del matrimonio, nacida en París en Febrero de 1929, de pocos meses cuando Karl se vino a Chile. Sigrid estudió en la Universidad de Chile, titulándose Profesora de Matemáticas y Física en 1953.

en el piano.[10] Le gustaba tocar flauta dulce y en su casa organizaba encuentros donde grupos de estudiantes alemanes venían a tocar con él. Cantaba también regularmente en el coro dirigido por el maestro Jan Sparwaater y otras veces participaba como actor en obras teatrales, ya fuera en el Conjunto de Teatro de Reinhold Olszewski, que venía de Alemania, o en el teatro laico de la familia von Viesling en Las Condes; en otras ocasiones, en el teatro de títeres de la misma familia. Grandjot tenía muchos amigos alemanes y también chilenos con algunos de los cuales salía de excursión los días domingos. Buen jugador de naipes, se entretenía muchísimo con dos tocayos suyos jugando *Skat*[11].

Karl Grandjot Reins nació en Frankenberg, Alemania, el 23 de Agosto de 1900. Era el hijo mayor del Inspector de Correos Konrad Grandjot Blume y de Luise Reins Remhof. Tenía dos hermanos: Erich, ingeniero constructor de vialidad, y Walter, el menor de los tres, Doctor en Física, con especialidad en acústica (audiometría y sonares, etc.). De sus estudios primarios y secundarios nos cuenta en su breve autobiografía que cursó la escuela primaria y el liceo (*Oberrealschule* I) en Kassel. Luego, a los 19 años, ingresó a la Universidad de Göttingen, donde estudió matemáticas puras y aplicadas, física experimental y teórica, y filosofía. Entre sus profesores principales se cuentan los prestigiosos matemáticos Edmund Landau, Richard Courant y David Hilbert; entre los de física, Peter Debye y Max Born, ambos galardonados con el premio Nobel. El 14 de febrero de 1922 obtuvo el grado de Doctor en Filosofía y al mismo tiempo se incorporó como ayudante universitario, y trabajó con Edmund Landau. En 1926 se graduó de *Privatdozent* (Profesor Extraordinario), grado que lo habilitaba para impartir docencia universitaria. Viene luego una fructífera colaboración con Landau y una seguidilla de *papers* publicados en diversas revistas matemáticas europeas entre los años 1922 y 1929. Participó durante aquellos años en diversos congresos científicos, entre otros en el Congreso Internacional de Matemáticas de Bologna en Agosto de 1928. De 1928 a 1929 disfrutó de una beca otorgada por la Fundación Rockefeller para perfeccionar sus estudios universitarios en París. En eso estaba cuando le alcanzó el llamado del Gobierno de Chile, y en Abril de 1929 se embarcó para Santiago y llegó a las costas chilenas el 1o de Mayo de aquel año, como lo indicamos al comienzo.

2 Los años de Göttingen

2.1 Sus años de estudiante

Durante los años que Grandjot estudia y enseña en la Universidad de Göttingen, no sólo las matemáticas alemanas estaban en su cúspide, sino el mismo Göttingen

[10] Recuerdos de su hija Sigrid. Carta a los autores.
[11] Skat es el juego de cartas nacional de Alemania, data de 1810, y es para 3 jugadores.

era el centro de las ciencias exactas a nivel mundial, *der mathematische Mittelpunkt des Universums*.

Aunque antes Göttingen tuvo en su plantel a Gauss, Dirichlet y Riemann, el gran organizador de la Física y las Matemáticas en Göttingen fue Felix Klein. Con una gran iniciativa y un profundo esfuerzo administrativo (creación de institutos, seminarios, bibliotecas, crecimiento del número de alumnos) logró crear la atmósfera que convirtió a Göttingen en la "Meca de las matemáticas". Hay que destacar en este esfuerzo a D. Hilbert, H. Minkowski, E. Laundau y C. Runge, junto al astrónomo K. Schwarzschild y los físicos L. Prandtl, P. Debye y E. Wiechert, quienes sentaron las bases para la época dorada que culmina a fines de la tercera década del siglo XX. Alumnos de todos los lugares del mundo concurrían a estudiar a Göttingen. Grandjot llegó allí en 1919, y todo indica que aprovechó al máximo los recursos que se le ofrecían: el Seminario de física-matemática, la cátedra de Matemáticas aplicadas dirigida por C. Runge, la primera con esa orientación aplicada en Alemania, el Instituto para Matemáticas Aplicadas y Mecánica, el Instituto para Estadística Matemática. Más tarde este patrón modela las actividades y docencia de Grandjot en Chile.

La teoría de números es, sin embargo, lo que atrae a Grandjot, particularmente la *teoría analítica de números*, esto es, el estudio de las propiedades de los números naturales con herramientas de análisis matemático. Esta disciplina, que fue iniciada por Dirichlet, se había transformado en una de las más elegantes y complejas de las matemáticas. En Göttingen en los años 20, el especialista por excelencia en teoría de números era Edmund Landau, un discípulo de Frobenius, que llegó a Göttingen en 1909 como sucesor de Minkowski, y cuyo interés fundamental era la teoría analítica de números y en particular la distribución de los números primos. Su *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (1908) puede considerarse la primera presentación sistemática de la teoría analítica de números. Edmund Landau fue el maestro de toda una generación, no sólo por sus textos, su amplia visión del área, sino también por sus alumnos, entre los cuales se cuenta P. Bernays, G. Doetsch, H. A. Heilbronn, D. Jackson, E. Kamke, A. J. Kempner, L. Neder, A. Ostrowski, W. Rogosinski, W. Schmeidler, C. L. Siegel, A. Walfisz y K. Grandjot.

En 1922 Grandjot presenta su tesis doctoral bajo la dirección de Landau titulada *Convergencia de series de Dirichlet*. Estas series fueron introducidas por Dirichlet y su estudio está asociado al análisis de funciones aritméticas expresadas por medio de ellas, particularmente las propiedades multiplicativas.[12]. A partir de ese momento, Grandjot pasa a ser el ayudante de Landau iniciando una fructífera colaboración que duraría casi una década.

[12]Una serie de Dirichlet tiene la forma $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Una serie *general* de Dirichlet es una serie de la forma $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, donde a_n y s son números complejos, y $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$.

2.2 Grandjot profesor en Göttingen

En 1926 pasa a ser *Privatdozent* en Göttingen[13] con la *Habilitationsschrift*[14] titulada *Investigaciones sobre Series de Dirichlet*, donde trata e investiga resultados sobre órdenes de crecimiento y número de ceros de series *generales* de Dirichlet. En los años que siguen publica importantes trabajos en el área de la teoría analítica de números sobre funciones enteras, series de Dirichlet, series trigonométricas (ver Bibliografía).

La cooperación de Grandjot con Landau fue fructífera. Aparte de algunos resultados como un artículo conjunto con Jarnik y Littlewood, el ayudante fue más allá de sus responsabilidades. Sin duda uno de los resultados más importantes de esta colaboración es el libro *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Lecciones sobre la Teoría de Números) (Leipzig, 1927, 3 vol., 1009 pág.), uno de los más influyentes en teoría de números. Hardy escribió sobre él: “Esta obra notable está completa en sí misma; no supone (como lo hizo en el *Handbuch*) siquiera un poco de conocimiento de teoría de números o álgebra. Abarca desde los comienzos hasta los límites del conocimiento en 1927, de la teorías “aditivas”, “analítica”, y “geométrica”. [...] A pesar de este enorme programa, Landau nunca se desvía ni una pulgada de su ideal de completitud absoluta. [...] Las *Vorlesungen* no son sólo el libro mas fino de Landau sino que, a pesar de la gran dificultad y complejidad de algunos de sus temas, el mejor escrito. El estilo aquí es ese algo informal de sus clases que, persuadido por sus amigos, lo dejó.”[15] Landau es generoso en los agradecimientos en el Prólogo con su ayudante: “Mis agradecimientos van primero a los autores de los bellos trabajos (especialmente aquellos de la década más reciente) cuyos frutos me fue posible cosechar. Pero sobre todo a mi asistente de muchos años, actual colega y *Privatdozent*, el Dr. K. Grandjot que, con su conocimiento minucioso del campo entero, me brindó gran apoyo durante la preparación de mis clases y luego con la revisión del manuscrito completo. En la lectura de las pruebas, gocé, además de la ayuda del Dr. Grandjot, de la colaboración de un extraordinario experto en el campo de la teoría analítica y geométrica de números, mi discípulo Dr. A. Walfisz.” Grandjot confesaría más tarde, orgulloso aunque modestamente, a B. Chuaqui en Chile, que él había escrito al menos un tercio del famoso tratado.[16] Que su nombre apareciera sólo en los agradecimientos no debe sorprendernos debido a las reglas de los asistentes de aquella época: todo lo que producían debía aparecer bajo el nombre de su jefe.

[13]Otros recordados Privatdozent en Göttingen son A. Sommerfeld, E. Zermelo, O. Blumenthal, C. Carathéodory, E. Hecke y R. Courant.

[14]Escrito exigido para lograr la categoría de Docente extraordinario.

[15]En: *Obituario de E. Landau*, por G. H. Hardy y H. Heilbronn, J. London Math. Soc. 13 (1938) 302-310.

[16]Conversaciones con B. Chuaqui.

2.3 La "Objeción de Grandjot"

Entre sus profesores, Grandjot nombra a David Hilbert. Aunque los detalles de esta relación no nos son conocidos, no es difícil trazar esta influencia en la actividad futura de Grandjot. Es una simple y penetrante observación lo que muestra el gran dominio e interés de Grandjot por los sistemas formales y la axiomática.

Cuando a fines del siglo XIX la fiebre por fundamentar las matemáticas estaba en sus inicios, Kronecker afirmó: *los números naturales son obra de Dios, el resto es obra del hombre*. Muchos sostenían, sin embargo, que aun los números naturales podían construirse a partir de elementos más básicos. Es así como Richard Dedekind, basándose en trabajos de Grassmann y Frege, publica en 1888 su famoso *Was sind und was sollen die Zahlen*, donde presenta una "caracterización algebraica" de los números naturales a partir de dos conceptos primitivos, el 1 y *sucesor*. Apoyándose en estas ideas, fue finalmente Giuseppe Peano quien popularizó la axiomatización de los números naturales[17], al darle la forma elegante y entendible que conocemos hoy día:

I. 1 es un número natural.

II. Para cada x existe exactamente un número natural, llamado el *sucesor* de x, que denotaremos x'. Esto es, si $x = y$ entonces $x' = y'$.

III. Para todo x, se tiene que $x' \neq 1$. Esto es, no existe ningún número cuyo sucesor sea 1.

IV. Si $x' = y'$ entonces $x = y$. Esto es, para todo número o bien no existe sucesor o bien ese sucesor es único.

V. (Axioma de Inducción) Sea M un conjunto de números naturales con las siguientes propiedades:

   (a) 1 pertenece a M.

   (b) Si x pertenece a M entonces también x' pertenece a M.

   Entonces M contiene todos los números naturales.

Un par de décadas más tarde, Hilbert se traza como objetivo deducir el análisis matemático a partir de los números naturales. Landau, colega de Hilbert en Göttingen, escribe en 1930 su *Grundlagen der Analysis*, con la expresa intención de proveer un texto que desarrolle explícitamente el análisis a partir de los axiomas de Peano, cosa que hasta ese momento no estaba hecha. Dice Landau: "En toda la literatura no hay un texto que tenga el solo y modesto objetivo de sentar las bases para las operaciones con números" y afirma que debido a que

[17]En *Arithmetica principia nova metodo*, 1890.

nadie ha hecho esta tarea, él se propone hacerla con este libro. Antes de convertirlos en libro, Landau presta sus apuntes a su asistente quien dará el curso de Fundamentos. Grandjot al final del curso le devuelve el manuscrito con una observación escrita, que en esencia dice que *con los axiomas de Peano como están no es posible deducir todo el análisis*, y agrega axiomas que resuelven el problema. Es la llamada "objeción de Grandjot". El problema lo explica Landau con su habitual claridad: "Cuando demuestro algún teorema sobre números naturales, digamos en una clase sobre teoría de números, estableciendo su validez primero para 1 y luego deduciendo su validez para $x+1$ de su validez para x, ocasionalmente algún estudiante objetará que yo no he demostrado primero la afirmación para x. La objeción no está justificada, pero es admisible; ocurre que el estudiante no ha escuchado nunca hablar del axioma de inducción. La objeción de Grandjot suena similar, con la diferencia de que estaba justificada; luego tengo que admitirla también. Sobre la base de sus cinco axiomas, Peano define la suma $x+y$, para x fijo y todo y, como sigue:

$$\begin{aligned} x+1 &= x' \\ x+y' &= (x+y)', \end{aligned}$$

y él y sus sucesores pensaron que $x+y$ estaba definida en general; puesto que el conjunto de los y's para los cuales ella estaba definida contiene 1, y contiene y' cuando contiene y. Pero $x+y$ *no* ha sido definida." Grandjot resuelve el problema agregando axiomas adicionales. Landau finalmente prefiere usar una sugerencia del lógico húngaro Kalmar.[18] La famosa objeción de Grandjot siguió siendo comentada. Entre sus consecuencias más relevantes está la aguda observación sobre las limitaciones de la inducción simple y el rol que definiciones como $\Sigma_i x_i$ y $\Pi_i x_i$ juegan en el edificio axiomático del análisis.[19]

Para finalizar esta sección, observemos que Grandjot durante su época de Göttingen hizo los contactos que durarían el resto de su vida: mencionemos a G. Birkhoff, G. Hardy, F. Hausdorff, entre muchos otros. Estos matemáticos fueron posteriormente los puntos de enlace para que sus estudiantes fuesen desde Chile a los principales centros mundiales a estudiar matemáticas.

3 La llegada a Chile

3.1 El ambiente científico en Chile a su llegada

La década de los veinte fue en Chile de grandes turbulencias políticas, sociales y estudiantiles, que penetraron los muros, siempre sensibles, de los claustros

[18] Los axiomas adicionales de Grandjot no los conocemos. Landau comenta el incidente –lo llama "aventura"– in extenso en el prefacio de su *Grundlagen der Analysis*.

[19] La objeción tiene bastante más interés lógico y matemático. Al lector interesado le sugerimos leer el interesante artículo del Prof. Pi Calleja, *La objeción de Grandjot*, Mathematica Notae, Año X, 1940, pp. 143-151.

universitarios. Los rectores, como los ministerios en el Gobierno, se sucedían a velocidades nunca antes vistas. Entre 1926 y 1930 la Universidad de Chile tuvo cinco rectores: Amunátegui, Matte, Charlín, Martner y Quezada, que "luchan con todos los medios por controlar los desórdenes estudiantiles".[20] La efervescencia se dió en todos los ámbitos: en aquella década hubo un gran despertar de inquietudes por el desarrollo de la ciencia nacional. Contribuyó a esto, tal vez, la expansión y diversificación de la industria nacional, la búsqueda de nuevas fórmulas políticas de representación ciudadana, y la reforma educacional que culminó en 1931 con la dictación de un nuevo Estatuto Orgánico de la Universidad de Chile.

El Rector Martner en su afán de ir más allá de la formación profesional, y acercarse a la creación científica, expresaba en 1928: "La misión cultural de la Universidad no es en lo esencial, como muchos han querido mantenerlo, el proporcionar conocimientos ya adquiridos por la humanidad o demostrar lo ya conocido, sino *servir de fuente de investigación y palanca de progreso de las ciencias*." (itálicas nuestras). Y luego agregaba: "Es menester organizar seminarios y laboratorios de investigación y bibliotecas especializadas, de modo que cada cátedra universitaria tenga su seminario o laboratorio o biblioteca como recurso indispensable de trabajo y éxito en los estudios superiores"[21]

En el interior de las Facultades estas inquietudes se manifestaban en hechos. Así, en 1928 la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas recibió al físico francés Paul Langevin y al lógico italiano Federico Enriques, quienes dieron conferencias de sus respectivas especialidades y luego fueron recibidos solemnemente como miembros honorarios de dicha Facultad.[22] Célebres fueron también en aquel entonces las conferencias que sobre *Teoría de la Relatividad* dió en 1929 el ingeniero Ramón Salas Edwards, todo lo cual indica el interés de aquella Facultad por darle al saber técnico una base científica a tono con el conocimiento de última generación.

Como una evidencia más de aquellas inquietudes por el desarrollo de la ciencia surgidas en aquella década, cabe destacar la creación en 1930 del *Instituto de Ciencias de Chile* "destinado a favorecer y coordinar las investigaciones y estudios científicos puros, que conserven y eleven la cultura, sin finalidad profesional, y a dilucidar los más importantes problemas nacionales."[23] Este Instituto nacía integrado por tres Academias: una de Ciencias Económicas y Sociales, otra de Matemáticas y Ciencias Naturales, y una tercera de Historia, Filosofía y Filología. En la Academia de Matemáticas y Ciencias Naturales se encuentran los nombres de Enrique Froemel, Ricardo Poenisch y Carlos Grand-

[20] Rolando Mellafe, *Reseña histórica del Instituto Pedagógico*, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, 1988, p. 13.

[21] Textos Universitarios, en *Daniel Martner U., Obras Escogidas*, Edic. del Centro de Estudios Políticos Latinoamericanos Simón Bolívar, 1992.

[22] Boletín Universitario, 1928.

[23] Boletín Universitario, 1929, p. 1114.

jot como fundadores, esto es, tres eminencias en el proceso de desarrollo de las Matemáticas en Chile: Poenisch y Froemel en la matemática escolar y universitaria, y Grandjot en la matemática erudita y en la formación de discípulos para su cultivo, y los tres en la matemática útil a las ingenierías.

El ambiente que reinaba en Chile a fines de aquella década de los veinte está bien sintetizado, retrospectivamente, en un discurso académico dado por Juvenal Hernández, ex rector de la Universidad: "El país, como consecuencia de la acción refleja de los acontecimientos que agitaban al mundo [primera guerra mundial, revolución industrial] empezaba a perder sus características de subdesarrollo para transformarse en un vasto campo de germinaciones y de luchas, en una verdadera puja de creaciones, reemplazos y eliminaciones sucesivas."[24] "Al hacerme cargo de la Rectoría en 1933 –recuerda Hernández– la Universidad de Chile era casi exclusivamente profesional y académica [...] necesitaba, pues, transformarse [...] Puse en práctica muchas iniciativas encaminadas al estímulo de la investigación pura, a la aplicación de las conquistas de la ciencia [...] y se crearon por primera vez institutos, seminarios, talleres y laboratorios." En verdad, aquella Rectoría (1933-1953) fue fructífera en la creación de organismos en pro de la investigación científica. Se crearon cerca de treinta institutos en los más diversos campos del conocimiento, pese a la crisis de los años treinta y a los efectos negativos de la Segunda Guerra Mundial sobre los países periféricos como Chile. Antes de aquel entonces las formas organizadas de investigación estaban en sus primeros albores, pero esto no impedía que existiera en el país producción científica de buena calidad. Basta citar, al respecto, como ejemplos de investigación moderna antes de los años treinta, el Instituto de Fisiología de la Universidad de Concepción y el Instituto Bacteriológico de la Escuela de Medicina de la Universidad de Chile que, como dice A. Meyer, "no tienen por qué temer una comparación con las instituciones de la misma índole esparcidas sobre el globo terrestre."[25] Eran instituciones modernas de investigación, pero en ellas predominaba aún el carácter docente como el aspecto más sobresaliente de sus objetivos.

3.2 Sus antecesores

La política del Estado de Chile de contratar "sabios" extranjeros para incorporar ciencia en el país ha sido una práctica constante desde los primeros años de su vida independiente. Luego de la Independencia, el sistema educacional chileno fue estructurado a imagen y semejanza del sistema francés. Los primeros textos de matemática escolar y universitaria fueron traducción fiel de textos franceses y los que se escribieron más tarde por autores nacionales siguieron muy de cerca

[24] Discurso Académico, 27 de Abril de 1978, en *Testimonios Universitarios*, Edit. Universitaria.

[25] Adolph Meyer, *Investigación y Enseñanza*, en Revista Atenea, Febrero 1931, p. 214.

la didáctica gala.[26]

La escuela francesa, que guió la enseñanza de las Matemáticas en Chile desde las primeras décadas del siglo XIX, comenzó a dar paso en 1889 a la escuela alemana. En aquel año llegó a Chile un grupo de profesores alemanes contratados por el Gobierno para poner en funcionamiento el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile, creado por Decreto del 29 de Abril de aquel año con el propósito de formar profesores para la enseñanza secundaria.

La contratación de Grandjot y otros profesores[27] en 1929, obedecía pues al deseo del Gobierno de Chile de fortalecer aquella primera generación ya desgastada después de cuatro décadas de intensa actividad. Los maestros de 1889, dice Enrique Molina, "eran casi sin excepción verdaderos hombres de ciencia laboriosos, sencillos, consagrados por completo a sus estudios"[28] Algunos de ellos, como Federico Johow, Rodolfo Lenz y Ricardo Poenisch, hicieron de Chile su segunda patria. Lo mismo harían más tarde Carlos Grandjot y Ferdinand Oberhauser.[29]

Las matemáticas escolares, así como las universitarias, a la llegada de Grandjot estaban bien organizadas y gozaban de buen prestigio gracias a la labor de Tafelmacher y Poenisch, que desde un comienzo, tuvieron bajo su responsabilidad la elaboración de programas y la redacción de los textos de enseñanza, tanto para la matemática escolar como para la superior.[30] Augusto Tafelmacher fue quien formó los primeros profesores de Matemáticas egresados del Instituto

[26]He aquí algunas evidencias: El *Curso Completo de Matemáticas Puras* de Francoeur, escrito para la École Polytechnique, fue traducido por Gorbea para uso en el Instituto Nacional y más tarde en la Universidad de Chile (1er. tomo, 530 pp., 1833; 2do tomo, 325 pp., 1845). Los textos de Jariez usados en las Escuelas de Artes y Oficios de Francia fueron traducidos para su homónima chilena en 1849; el *Curso de Matemáticas* de Allaize et al., para el uso de las Escuelas Militares de Francia, fue traducido por Ballarna en 1850 para los alumnos de la Academia Militar de Chile.

[27]En 1929, además de Grandjot, arribaron al país contratados por el Gobierno: Ferdinand Oberhauser para Química; Guillermo Goetsch para Biología; Adolph Meyer para Filosofía; Woldemar Voigt para Práctica Pedagógica; Peter Petersen como Técnico en Educación Secundaria, y además, el estadounidense Ovied Hundley como Jefe de Laboratorio de Metalurgia. Boletín Universitario U. Chile, 1929.

[28]E. Molina, *El primer curso del Instituto Pedagógico*, en LXXV Aniversario de su fundación, Universidad de Chile, 1964. Molina fue alumno de aquel curso.

[29]Poenisch, aunque no fue profesor-fundador del Instituto Pedagógico, forma parte también de aquella primera generación. Llegó a Chile en 1889 y antes que el Pedagógico disfrutaron de sus servicios la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile, el Instituto Nacional y el Liceo de Rancagua.

[30]Para la escolar redactaron dos tomos de Geometría, dos de Algebra, uno de Trigonometría y uno de Estereometría, que con las debidas adaptaciones se utilizaron cerca de 70 años en Chile. Para la superior, Tafelmacher escribió *Tratado de Trigonometría esférica*, *Elementos de Geometría Analítica* y *Elementos de Algebra Superior*. Las obras de Poenisch son: un texto de *Geometría Analítica* y otro de *Análisis* que incluye álgebra superior. Los publicó bajo el título de *Introducción a las Matemáticas Superiores* y sirvieron de texto de estudio a los alumnos del Instituto Pedagógico, de la Escuela Militar y de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile por muchas décadas.

Pedagógico. Poenisch le sucedió en la cátedra en 1908.[31] A fines de la década del veinte sus discípulos llevaban las Matemáticas a todo el territorio nacional a través de sus clases en los liceos, en las Escuelas Normales, en los colegios particulares y en otros establecimientos de enseñanza. Las Matemáticas, así, rompían la matriz de ciencia "útil" en que se habían mantenido y adquirían la categoría de disciplina cultural y autónoma, empresa que en Francia, Alemania y otros países europeos se había realizado tempranamente en el siglo XIX.

Más aun, producto del esfuerzo y tenacidad de los profesores de 1889, Chile comenzaba a generar sus propios profesores para la enseñanza superior. En Matemáticas, los discípulos más distinguidos de Poenisch le sucedieron en el Instituto Pedagógico, en la Escuela de Ingeniería y en la Escuela Militar.[32] Otros prestaban sus servicios en las Escuelas Normales, en la Escuela Naval, en la Escuela de Aviación, en la Escuela de Artes y Oficios, en las nacientes universidades particulares y en otras escuelas de la Universidad de Chile como la de Agronomía y la de Arquitectura.

También la Física, otra de las especialidades de Grandjot, consolidaba su enseñanza escolar junto a las Matemáticas. Ziegler y Gostling desde sus cátedras del Instituto Pedagógico velaban por que esta disciplina se impartiera con todas las formalidades y reglas metodológicas de una ciencia experimental. Se cuenta que cada vez que se creaba un liceo en provincia, Ziegler corría al Ministerio de Educación para exigir la instalación del correspondiente laboratorio de Física.[33] Tal era su preocupación por el desarrollo de esta ciencia, aún en los últimos años de su carrera docente. Los textos de *Física Experimental* de Ziegler y Gostling, escritos a comienzos de siglo, alcanzaban en 1952 la décimotercera edición.

En opinión de Carlos Videla, discípulo de Poenisch y uno de sus sucesores, aquellos maestros "supieron adaptar su labor a las necesidades que el país sentía y a las posibilidades que presentaba el grado de cultura que había alcanzado en esa época. [En sus publicaciones[34]] revelaban entusiasmo y dotes para la investigación, información y dominio de extensas partes de las matemáticas."[35] No cabe duda de que su misión de formar profesores para la enseñanza de las Matemáticas fue exitosa. Sin embargo, en el campo de la investigación, no obstante su "entusiasmo y dotes", su labor fue débil, no lograron formar sistemáticamente continuadores, tarea reservada a la nueva "importación" de

[31]El profesor contratado originalmente para Matemáticas en 1889 fue el Dr. Ricardo Von Lilienthal, que estuvo muy corto tiempo en el país. Desde 1890 lo reemplazó Tafelmacher.

[32]He aquí algunos nombres: Carlos Videla, Enrique Froemel, Abraham Pérez, Oscar Marín, Jenaro Moreno, Domingo Almendras, Federico Rutland, Agustín Rivera. Todos colegas de Grandjot hasta los años cincuenta, a los que hay que agregar, con un ligero desfase, a Guacolda Antoine y César Abuauad.

[33]Recuerdos de la Prof. Raquel Martinolli, discípula de Ziegler y su Ayudante en 1929. (Decreto del 11 Febrero de 1929, Boletín Universitario.)

[34]Véase *Anales de la Universidad de Chile*: 1892, 1893, 1894, 1897, 1901 y 1905.

[35]Carlos Videla, *Contribución de la Facultad de Filosofía y Humanidades a la enseñanza de las Matemáticas en Chile*, 1944, en *El Centenario de la Universidad de Chile.*

sabios extranjeros o al despertar de talentos nacionales.[36]

4 Su nueva patria

4.1 Los primeros años: 1929-1945. Axiomática y Algebra abstracta

Al llegar al país, Grandjot captó rápidamente el espíritu de transformación y reformas en que a la sazón se movía la sociedad chilena, en particular el estamento académico interesado en darle a la Universidad el giro necesario a fin de prepararla para la investigación moderna.

Como dice en su breve autobiografía, comenzó en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile con "clases de Matemáticas Superiores y Elementales, de Filosofía y Física", pero junto a ellas ofreció desde el primer momento, un Seminario para leer y discutir artículos matemáticos o para profundizar temas relacionados con la docencia, a cuyas sesiones, que se efectuaban los sábados, asistían varios de los jóvenes profesores de entonces, discípulos de Poenisch: Videla, Marín, Almendras, Pérez, y otros.[37]

Las matemáticas hasta entonces se mantenían en Chile dentro del patrón que podríamos llamar "clásico", nada de teoría de conjuntos, sistemas axiomáticos ni álgebra moderna o abstracta, materias que en los países europeos constituían ya temas dentro de los programas docentes. En los cuatro años que duraban los estudios del Instituto Pedagógico se incluía, además de matemáticas elementales, Geometría analítica, Trigonometría esférica, Algebra superior clásica y Cálculo diferencial e integral. El Cálculo hasta fines del siglo XIX se enseñaba por el texto de Francoeur, escrito a comienzos del siglo dentro de los cánones de Newton o Leibniz, esto es, sin los conceptos de función, límite, continuidad de funciones ni derivada de una función según Cauchy; Poenisch introdujo estos conceptos en su curso de análisis y hacia 1930 estas ideas eran corrientes en el ambiente matemático chileno y los profesores bien informados las manejaban con soltura. Sin embargo, las series infinitas, necesarias para el Cálculo infinitesimal, carecían de un tratamiento riguroso. En un artículo que sobre el particular publicó Grandjot en la *Revista de Matemáticas y Física* que a la sazón circulaba en Chile, escribió: "revisando detenidamente algunos textos (de estudio) se ha llegado a la conclusión que no indican como ha de tratarse la materia [...] Algunos autores han sacrificado la precisión matemática en su afán de ponerse al nivel de la mentalidad del alumno, pero en otros se nota

[36] La inquietud sin embargo existía. En las primeras décadas del siglo XX, los *Anales de la Universidad de Chile* registran publicaciones sobre temas matemáticos por autores formados en el país, relativos a logaritmos neperianos, a la ecuación de 4^o grado, y a integrales múltiples. Véase *Anales* 1925, 1927 y 1930, t. VIII.

[37] Recuerdos de la Prof. Guacolda Antoine en entrevista con los autores. Antoine, titulada en 1928, asistía a aquellas "tertulias" como invitada. Recuerda especialmente las sesiones donde se trató ecuaciones con derivadas parciales.

claramente que el autor no ha comprendido bien la materia.” En su artículo se preocupa de dar definiciones correctas y establecer los teoremas fundamentales en la teoría de tales series, demostrándolos de manera rigurosa y dejando la teoría comprensible “hasta para los principiantes.”

Además de profundizar el Cálculo en sus lecciones, Grandjot introdujo en 1936[38], en los programas del Instituto Pedagógico un curso de Geometría diferencial y otro de Fundamentos de las matemáticas o axiomática, que mantuvo hasta la reforma que hubo en la Facultad de Filosofía y Educación en 1945, Facultad a la que pertenecía el Pedagógico. El curso de Geometría diferencial dio paso a uno de Análisis Vectorial y el de Fundamentos quedó como curso electivo dentro de la carrera de Profesor de Matemáticas y Física. La reforma prolongó la carrera a nueve semestres.

El curso de Fundamentos fue uno de los cursos más novedosos en nuestro incipiente medio científico, semejante –guardando las debidas proporciones– al de Hilbert sobre fundamentos de la geometría en Göttingen en respuesta al intuicionismo. En las teorías axiomáticas la *naturaleza* propia de los entes no interesa; lo que importa son las *relaciones* entre ellos. Este curso vino a llamar la atención de los estudiantes sobre la definición de los términos y de los axiomas con que ordinariamente se parte en la enseñanza de las matemáticas. En aquel entonces era corriente leer en los textos de estudio escolares y aun universitarios definiciones como las siguientes: “Número es el resultado de comparar la cantidad o magnitud con la unidad”. “Recta es la distancia más corta entre dos puntos.” Para ser inteligibles, estas definiciones suponen haber definido previamente “cantidad”, “unidad” y “distancia”, conceptos que a su vez eran definidos usando la idea de “número” en el primer caso y de “recta” en el segundo, es decir, contenían un círculo vicioso. Para romper este círculo, la axiomática comienza por seleccionar ciertos términos que denomina *primitivos*, que se aceptan sin definición y, a partir de ellos, define todos los que sean necesarios. El segundo paso para construir un sistema axiomático consiste en enunciar un conjunto de proposiciones, llamadas *axiomas*, que se aceptan sin demostración y a partir de las cuales se deducen nuevas proposiciones. En tercer lugar es necesario dar *reglas* que permitan deducir de los axiomas las nuevas proposiciones llamadas *teoremas*. Al sistema de axiomas se le exige que cumpla con tres propiedades denominadas *compatibilidad*, *independencia* y *completitud*, que no es del caso analizar aquí, a las cuales Grandjot daba gran importancia y que verificaba cuidadosamente en un *modelo* construído ad-hoc[39]. Recordamos particularmente el curso de Fundamentos de Geometría general (1951) donde uno de los términos primitivos es la relación “entre”. Uno de los ejerci-

[38] Véase su Cartola de trabajo en la Universidad de Chile.

[39] Aunque propiedades como la independencia de un sistema de axiomas son importantes, la lógica moderna centra los requisitos en dos: *corrección*, esto es, el sistema no debe deducir proposiciones indeseadas, y *completitud*, que significa que el sistema debe deducir *todas* las proposiciones deseadas.

cios que Grandjot propuso en aquella ocasión fue el siguiente: "Considerando tales proposiciones (que enumeraba) demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°." Pero no sólo estimulaba a sus alumnos a ejercitarse en matemática pura, también los orientaba hacia los problemas contingentes. En otro de los ejercicios propuso analizar el rigor matemático en los textos de enseñanza en uso a la luz de los principios de la axiomática. Fruto de este análisis es el "descubrimiento" del círculo vicioso en las definiciones de número y recta citadas más arriba. Fruto de este curso son también algunas Memorias sobre sistemas numéricos y geometrías no-euclideanas elaboradas por los egresados del Pedagógico para titularse.

En una perspectiva más amplia, los principios de la axiomática son "útiles" en todos los campos del conocimiento, incluso en la vida diaria: "Si Ud. quiere conversar conmigo –decía Voltaire– defina los términos que emplea." Por eso este curso era muy concurrido por estudiantes de filosofía, derecho y otras disciplinas donde el razonamiento deductivo es fundamental.

En otra esfera docente, en 1933 comenzó a dictar un curso de Complementos de matemáticas superiores puras y aplicadas en la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, curso que desde 1945 hasta 1963 dictó también en forma paralela en la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile. Estas lecciones las publicó en 1950 la Editorial Universitaria en dos tomos de casi trescientas páginas cada uno. Se dividen en cuatro partes: Métodos numéricos y gráficos; Estudios funcionales; Ecuaciones diferenciales y, por último, Ecuaciones con derivadas parciales de la física matemática. Todas destinadas a complementar las matemáticas estudiadas en años anteriores. En el prefacio el autor advierte: "Por la posición intermedia entre las matemáticas puras y aplicadas he tenido que buscar una solución prudente al problema del rigor de las deducciones." La primera parte la trata en base a ejemplos y en ella Grandjot hace gala de la maestría que siempre demostró en el cálculo mental. El resto es un equilibrio entre el uso de la intuición y el "rigor de las deducciones". Es posible que este Curso se haya inspirado en la cátedra de Matemáticas aplicadas creada por C. Runge en Alemania, de quien Grandjot fue un distinguido alumno. El texto tuvo varias ediciones. Para la docencia en Chile fue un aporte de gran valor didáctico.

Su afán de poner a disposición de sus alumnos los temas de última generación lo impulsó a escribir una monografía de Algebra abstracta, que publicó en la Revista Universitaria de la Pontificia Universidad Católica hacia 1940, texto que de haberse divulgado a tiempo habría adelantado, a nuestro juicio, en un par de décadas el estudio oficial de esta "nueva ciencia" en Chile. El álgebra "moderna" o "abstracta" es una disciplina que se origina a principios del siglo XX, y es el desarrollo sistemático de la generalización de las operaciones aritméticas por medio del simbolismo y la axiomatización. Estudia los diferentes tipos de estructuras algebraicas que surgen como generalización (abstracción) de estructuras concretas como grupos de transformaciones, de simetrías, conjuntos de números ideales, de matrices, etc. Los orígenes formales de esta disciplina comienzan con la publicación en 1910 de *Algebraische Theorie der Körper* de Steinitz. Luego en 1926, L. E. Dickson publica su *Modern Algebraic Theories* y en 1937 aparece el clásico *Moderne Algebra* de B. L. van der Waerden que de una u otra forma establece el área. Entretanto, en aquel entonces no existía obra alguna en idioma castellano sobre aquella materia y las que nombramos eran muy poco accesibles. Hagamos notar que el texto clásico en Estados Unidos, *Modern Algebra* de Birkhoff y Mac Lane es de 1941, y su versión castellana data de 1954. Escribe Grandjot: "En las páginas que siguen trataré de enseñar los elementos de esta nueva ciencia matemática. Daré a conocer sus conceptos más fundamentales; pero en lo que se refiere a la vastedad de sus aplicaciones me será imposible demarcarla siquiera." El texto de Grandjot sorprende por su modernidad y visión de futuro. Comienza con una sección sobre conjuntos, un tema que tardaría un par de décadas en introducirse en la enseñanza en Chile. Luego sigue con un tratamiento axiomático de la teoría de anillos y cuerpos, con un enfoque particularmente moderno. La forma de exposición es muy cuidadosa. Antes de cada tema presenta las motivaciones con ejemplos concretos. Grandjot estaba muy consciente que debía presentar el tema a lectores que no estaban particularmente acostumbrados al razonamiento abstracto. Los resultados metodológicos son excepcionales.

Este texto destinado a dar a conocer en Chile una de las disciplinas más abstractas y de mayor futuro en la matemática del siglo XX, tuvo una fría –por no decir nula– recepción en el ambiente universitario chileno. Ni la casa de estudios superiores donde se publicó, ni la Universidad de Chile, encargada de orientar y controlar en ese entonces toda la enseñanza superior, ni sus colegas de disciplina, reaccionaron frente a esta excelente presentación de matemática moderna. Mientras en Argentina y Brasil el Algebra abstracta se incluía en los programas de enseñanza desde mediados de los años treinta,[40] en Chile Grandjot se esmeraba –sin éxito– por dar a conocer esa nueva ciencia en el país. ¿Se impusieron en el desarrollo científico chileno la tradición y el conservatismo? ¿o la rutina? Cualquiera que sea la respuesta a estas preguntas, lo cierto es que hubo que esperar hasta la década del sesenta para que el álgebra moderna se incluyera como ramo regular en nuestros programas de enseñanza, y ello gracias a la pertinacia de Grandjot y al esfuerzo de sus discípulos. Por otra parte, tampoco el Gobierno de la época contaba en sus planes de desarrollo con una política que incorporara en el país ciencia de vanguardia, que protegiera su desarrollo y que lo habilitara para un crecimiento sostenido a largo plazo. El *Algebra Abstracta* de Grandjot quedó así por muchos años olvidada.

[40]Fantanppiè, 1934, en Brasil, y Sagastume Berra, 1937, en Argentina. Véase: Pereira da Silva, *A matemática no Brasil*, Curitiba, Ed. da UFPR, 1992, p. 235. También: Sagastume Berra, *Lecciones de Algebra moderna*, Rep. Argentina, La Plata, 1961, Prefacio.

Pero sus preocupaciones no sólo estaban orientadas al perfeccionamiento de la enseñanza superior. También le preocupaba acortar la brecha entre Chile y Europa en la enseñanza escolar. Al respecto, concibió un curso de Aritmética para los primeros años de la educación media, del cual alcanzó a publicarse sólo el primer Libro en colaboración con el profesor Oscar Marín. El libro está estructurado para facilitar el trabajo personal del estudiante: cada párrafo parte de la práctica en la esfera de intereses juveniles, pasa a la teoría y vuelve a la práctica para servir intereses más amplios sociales o puramente intelectuales, superando viejos métodos memorísticos. Su enfoque metodológico está en la línea del Plan Dalton o del Sistema Winnetka en boga en los años treinta.[41] Este libro, al igual que su Algebra abstracta, ha permanecido por más de medio siglo olvidado.

En el lapso que transcurre entre su llegada a Chile y el término de la Segunda Guerra Mundial, hay hechos en su vida que en algún sentido marcaron su destino. Pero probablemente éste sea el período que más disfrutó junto a su familia y a su esposa Gertrudis, en cuya compañía exploró una gran parte del territorio chileno en busca de plantas y especies autóctonas, e incluso realizó un viaje por Bolivia y el Alto Perú en 1941. Ambos –como se ha dicho– eran expertos en botánica y daban a conocer sus descubrimientos en sesiones de la Sociedad Chilena de Historia Natural, de la cual eran socios, o los publicaban en revistas especializadas. Nibaldo Bahamonde, distinguido con el Premio Nacional de Ciencias, recuerda que siendo estudiante de Química en el Pedagógico en la década del cuarenta, cuando su curso salía a terreno, "el Prof. Grandjot, distinguido matemático, de gran simpatía, amor por la naturaleza y sobresalientes conocimientos de botánica", solía acompañarlo en sus excursiones a diferentes puntos del país junto con el profesor Oberhauser.[42]

Grandjot viajó poco a Alemania. En el período que estudiamos, en los veranos de 1931 y 1938 visitó su tierra natal. En su último viaje encontró las universidades intervenidas, y el "esplendor y la irradiación excepcionales" de que gozó la matemática alemana entre 1920 y 1933 habían sido "truncados de manera brutal".[43] Sin duda, lo más duro fue que su "padre académico", Edmund Landau, había sido separado de su cargo y estaba fuera de Alemania, hechos por cierto dolorosos, a los que vino a sumarse la desconexión de Grandjot con sus pares alemanes a causa de la guerra. En Chile a él mismo te tocó vivir momentos difíciles como secuela de aquel gran conflicto. A pesar de no

[41] En Santiago de Chile, en el Instituto Inglés, ubicado en el mismo sitio que funcionó el Pedagógico de la Universidad de Chile y hoy la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, el Plan Dalton funcionó con éxito por algún tiempo a partir de 1929. Es muy probable que el libro de Grandjot y Marín tenga relación con este experimento Dalton en Chile.

[42] Nibaldo Bahamonde, *Discurso de incorporación como Profesor Emérito a la UMCE*, 1998. Detalles adicionales en entrevista con los autores.

[43] J. Dieudonné, *La matemática del siglo XX*, en *La Ciencia Contemporánea*, editado por R. Taton, tomo 4, p. 145, Edit. Destino, Barcelona, 1971.

simpatizar con el régimen nazi, fue separado de su cargo en el Pedagógico y "relegado" a Rengo. Allí contrajo tifus, y debido a la precariedad médica del lugar, debió ser trasladado a Santiago a la Clínica Alemana para su tratamiento. Después de este incidente, para recuperar su cargo en la Universidad tuvo que concursar junto a otros postulantes, entre los cuales estaban algunos de sus ex-alumnos, hecho que le dolió bastante. Gracias a sus méritos y al apoyo de sus antiguos colegas, reasumió sus funciones académicas en las mismas condiciones anteriores.

Y por si todo lo anterior no fuese suficiente, se suma a ello el fallecimiento de su esposa en 1944. Esta serie de acontecimientos, quizás influyeron, entre otros, en su decisión de radicarse definitivamente en Chile[44], donde había conquistado buenos amigos y gozaba de un merecido prestigio como matemático y excelente profesor.

4.2 "Las 500 horas semanales". Física moderna y Computación

Aquí me tienen hoy
Detrás de este mesón inconfortable
Embrutecido por el sonsonete
De las quinientas horas semanales.

Nicanor Parra, *Autorretrato* (1954).

Hasta 1945 el profesor Grandjot había centrado su docencia, básicamente, en el área de las matemáticas puras y aplicadas. En adelante la ampliaría también a la Física. En los primeros años del Instituto Pedagógico, cuando la carrera de profesor duraba tres años, la enseñanza de la Física estuvo circunscrita a la física experimental. En 1908 esta carrera se amplió a cuatro años, y fue entonces cuando Poenisch creó el curso de Mecánica racional a fin de dar una formación más completa a los profesores del ramo.[45] No obstante el cuidado y el rigor con que se impartían los cursos de Matemáticas y Física, sus contenidos se mantenían dentro de las materias clásicas. Por esto, Grandjot, con el propósito de dar a conocer la física moderna, creó en 1946 el curso de Física teórica, donde los temas principales se referían a termodinámica, teoría de ondas, mecánica cuántica y relatividad. Como texto guía recomendaba *Introducción a la Física Teórica* de J. Slater y N. Frank, que abarca gran parte de aquellas materias. El curso lo dictó hasta 1962. En sus clases desplegaba con elegancia su cultura matemática polifacética y sus claros y bien cimentados conocimientos de física moderna, aprendidos directamente de labios de sus creadores en Göttingen: M. Born, P. Debye, W. Heisenberg, entre otros. Su fácil palabra, su claridad en

[44]Su carta de nacionalidad chilena data de 1954. Su residencia permanente fue siempre la ciudad de Santiago de Chile.

[45]El primer curso de Mecánica racional en Chile lo dictó Gorbea en 1850 en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Manuel Salustio Fernández, *Don Andrés Antonio Gorbea*, Anales, Mayo 1861, p. 673.

la exposición y su simpatía personal daban a sus lecciones una gran amenidad y la impresión, en ciertos pasajes, de estar viviendo la creación de la mecánica cuántica o el desarrollo de la relatividad.

En 1949 ingresa como investigador al Instituto de Física de la Universidad de Chile, creado el año anterior al amparo de la Rectoría. A la sazón la investigación en Física estaba en pañales en Chile. Existía sí la inquietud por dar a esta disciplina un impulso que la pusiera a tono con el avance de los conocimientos en el mundo. En tal sentido el Decano de la Facultad de Filosofía y Educación, profesor Juan Gómez Millas, envió a centros de excelencia europeos a dos jóvenes ex-alumnos de Grandjot egresados del Instituto Pedagógico a perfeccionar sus estudios en temas de física moderna: uno en radiación cósmica y el otro en cristalografía, quienes a su regreso crearon sendos grupos de investigación en sus especialidades respectivas. De estos laboratorios emanaron en 1953 las dos primeras publicaciones internacionales de físicos chilenos.[46]

Por esos años el Instituto Pedagógico había dejado la vieja casona de Alameda con Cumming, que lo cobijó por más de medio siglo, para instalarse en un moderno campus en la calle Macul. Allí la presencia de jóvenes investigadores de delantal blanco cruzando los jardines del Pedagógico estimuló el interés por el estudio de la ciencia a tal punto que "nadie quería ser profesor, todos querían ser investigadores", como lo recordaría nostálgicamente más tarde la profesora Raquel Martinolli, Jefe del Laboratorio de Física del Pedagógico, discípula y sucesora de Ziegler. En 1950 Grandjot dicta un curso de física experimental en el Instituto Pedagógico, donde trató básicamente la electricidad. Los estudiantes habituados a ver en los textos el inicio de esta materia frotando peinetas y acercándolas a papelitos, quedaron asombrados cuando su profesor comenzó el curso captando directamente la electricidad de los enchufes de la sala de clases. Su texto guía era el Pohl. De la electricidad dinámica dedujo todos los conceptos y la terminología en uso. La electrostática quedó reducida a un apéndice histórico.

Pero Grandjot no se restringió a incorporar la física moderna al interior de la Universidad. Aprovechando el homenaje a Albert Einstein, fallecido en 1955, organiza una serie de conferencias sobre relatividad. Participaron, él mismo como conferencista principal, su discípulo Hernán Cortés Pinto, y el ingeniero Arturo Aldunate Phillips. Tuvieron muy buena acogida tanto en Santiago como en provincias. Aún cuando la relatividad es considerada hoy día como ciencia *clásica*, es interesante comentar aunque sea brevemente el tenor de aquellas conferencias y, en particular, la que Grandjot ofreció –sin guarismos– en el acto solemne de inauguración.[47] Comenzó diciendo: "Cuando me arriesgo a esbozar, en media hora y ante un público no especializado, la teoría de la relatividad de

[46]Patricio Martens, *La Física en Chile*, CPU, 1980, p. 32.

[47]La conferencia fue publicada íntegra en los Anales de la Universidad de Chile, Año CXV, N^o 101, pp. 17-21, Primer Trimestre, 1956.

Einstein, y cuando abrigo la esperanza de poder propalar toda la esencia de la teoría, abarcando algo de sus orígenes históricos, de sus bases científicas, de su estructura deductiva, de las conclusiones a que llega –y algunos de sus pronósticos ya verificados o por someterse aún al veredicto de una experiencia futura– me siento agobiado por la perspectiva de una tarea sobrehumana." Para desarrollar esta tarea recurrió al símil de la edificación de una ciudad con los edificios de la teoría del calor, de la mecánica, de la acústica y del electromagnetismo pertenecientes a la Física. Hizo un parangón entre sus fallas y sus reparaciones, entre sus cimientos y fundaciones. Analizó el concepto de "simultaneidad" y de cómo Einstein resolvió la contradicción entre la Física de Newton y el experimento de Michelson. Y anunció que los detalles de la teoría se deberán desarrollar en conferencias venideras: "Yo mismo tendré que exponer en días más [...] Aquel día tendré que hablar de la igualdad de la masa pesada, que medimos en la balanza, y de la masa inerte que interviene en la segunda ley de Newton. Deberé mostrar su coincidencia [...] Deberé explicar la curvatura del espacio de tres o cuatro dimensiones, del espacio de Riemann; de la identificación de esta curvatura con la gravitación universal; tendré que hablar de la materia en interacción con su propio campo gravitacional, de cómo son abolidos los últimos vestigios del espacio absoluto y de sistemas de referencia privilegiados, de la unión íntima de la mecánica con el electromagnetismo." Es el nuevo y bello edificio construído por el genio de Einstein "intrépido y sincero, que no se conforma con soluciones parciales, contingentes, sino que ataca el mal por la raíz, aun produciendo dolores agudos a los rutinarios." Termina su conferencia inaugural con una evaluación de la Teoría de la Relatividad. ¿Pasará de moda? ¿Perderá validez? ¿Que diría Einstein? Concluye que no le cabe duda de que Einstein aceptaría gustoso para su Teoría lo que él mismo ha dicho: "una teoría no puede encontrar una mejor última suerte que la de ser absorbida por otra teoría más amplia y general."

Al curso de Física Teórica en el Instituto Pedagógico y al de Complementos de Matemáticas Superiores que dictaba, paralelamente, en las Escuelas de Ingeniería de las Universidades de Chile y Católica, unió en 1953 otro en la Escuela de Arquitectura de la última Universidad. Por aquel entonces las escuelas de Arquitectura empezaban a ser influídas por las "matemáticas modernas", las que ejercían cierta atracción, especialmente el álgebra de conjuntos, topología, grupos y teoría de grafos, materias utilizadas en el análisis de espacios arquitectónicos, simetrías y estructuras urbanas. Era una novedad para las escuelas chilenas. Grandjot parecía transitar sin obstáculos conjugando, en este ambiente, la matemática formal con la creación arquitectónica. Pasaba de la teoría de retículos[48] en Arquitectura, a la mecánica cuántica en el Pedagógico, y de

[48]Grandjot era un buen conocedor de esta materia, y revisó el libro de Birkhoff, *Lattice Theory*, 3a. edición de 1967. Allí Birkhoff le agradece junto a otros matemáticos: "In particular, I owe a very real debt to the following: Kirby Baker, Orrin Frink, George Grätzer, C. Grandjot, Alfred Hales, Paul Halmos, Samuel H. Holland, M. F. Janowitz, Roger Lyndon,

ésta a las series de Fourier en sus cursos de Ingeniería.

En otro ámbito de actividades, en 1947 asume la Jefatura de la Sección Matemáticas de la recientemente creada Dirección de Investigación Científica y Tecnológica de la Universidad Católica (DICTUC). Su capacidad de trabajo era inagotable. La variedad de sus intereses también. No lo deja indiferente la nueva ciencia que poco a poco se desprendía de las matemáticas: la computación. A fines de los años cincuenta, se apasiona por la nueva ciencia y construye un computador analógico con potenciómetros ultrafinos para resolver sistemas de ecuaciones. "El computador analógico del DICTUC fue construído (en esta Universidad Católica) para resolver sistemas de veinte ecuaciones con veinte incógnitas, siendo su precisión del 2%", escribe Grandjot en su trabajo *Resolución numérica de ecuaciones algebraicas.* Aparentemente, este es el primer computador construído en Chile. En esos tiempos en Chile, la computación digital y la analógica estaban casi en el mismo pie. En 1962, con la llegada del primer computador digital, un Lorenz ER-56, a la Universidad de Chile, la computación analógica perdió definitivamente la carrera en Chile. Posteriormente Grandjot se hace cargo del Laboratorio de Computación Electrónica de la Universidad Católica situándose entre los pioneros de la computación en Chile.

4.3 Formación de investigadores: la hebra que completa la trama

Después de la intensa actividad académica desplegada hasta 1956, el profesor Grandjot viajó por Europa desde enero hasta mayo de 1957, visitando centros y laboratorios de investigación, especialmente en Italia y Alemania. A su regreso lo esperaba, para contratar sus servicios, el *Centro de Investigaciones Matemáticas* de la Universidad de Chile, creado ese año por el Rector Juan Gómez Millas. Según Rolando Chuaqui –el discípulo más aventajado de Grandjot– este Centro es "el primer reconocimiento oficial a la investigación matemática en Chile".[49] Cobijó a varios jóvenes talentos chilenos que se reunieron en torno a Grandjot, Legrady y otros matemáticos con el único propósito de estudiar esta disciplina, sin aspirar a títulos ni grado alguno. Sin forzar la imaginación puede presumirse como allí la lógica matemática, los conjuntos, la teoría de números, las geometrías no-euclideanas y el álgebra abstracta deben de haber sido el deleite de profesores y estudiantes.

Hemos visto que para llegar a este punto la matemática tuvo que hacer un largo recorrido: desde los días de Gorbea en que se enseñaba como un conjunto de proposiciones útiles a la agrimensura, hasta Poenisch y Tafelmacher, en que la trama de las matemáticas abarcaba tanto sus aplicaciones a las ingenierías como la formación de profesores para su enseñanza; pero al tejido matemático

Donald MacLaren, Richard S. Pierce, George Raney, Arlan Ramsay, Gian-Carlo Rota, Walter Taylor and Alan G. Waterman."

[49] R. Chuaqui, *Una visión de la Comunidad Científica Nacional*, CPU, Santiago, 1982, p. 12.

chileno seguía faltándole la hebra que le permitiera crecer por sí mismo, es decir, la formación de investigadores para su cultivo. Esta tarea la asumiría el Centro de Investigaciones Matemáticas primero, y la Facultad de Ciencias después, instituciones que tuvieron en Grandjot a uno de sus colaboradores principales. A esta tarea colectiva y oficial Grandjot unió la formación de discípulos individuales. Presentamos a continuación a dos de ellos, de gran prestigio entre sus pares, uno en Algebra abstracta y el segundo en Lógica y fundamentos de las matemáticas, disciplinas que Grandjot introdujo en Chile poco después de su llegada, como se ha visto, y que hoy constituyen prestigiosas líneas de investigación en el país.

El álgebra abstracta, o moderna como también se la designa, llegó tardíamente a las aulas chilenas. El primer curso oficial de esta "nueva ciencia" lo dictó el profesor César Abuauad en el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile en 1956, cuando reemplazó en la Cátedra de Algebra Superior al profesor Carlos Videla. Abuauad, discípulo de Videla y Grandjot, egresó del Pedagógico en los años treinta y profundizó las "matemáticas modernas" guiado por Grandjot. Posteriormente consolidó sus conocimientos con estudios en Estados Unidos en 1950. Aunque no fue un investigador propiamente dicho, su interés por esta disciplina le permitió seguir muy de cerca su desarrollo en el siglo XX. En la Facultad de Ciencias, donde fue profesor por muchos años, se lo recuerda como un pilar fundamental en la enseñanza del Algebra.

Otro de los discípulos de Grandjot fue el Dr. Rolando Chuaqui, como se señaló anteriormente. Chuaqui estudió medicina, pero su vocación matemática comenzó a despertarse con motivo de las clases privadas tomadas con Grandjot cuando aún era estudiante. Su primo Benedicto nos relata que "las clases eran una vez por semana los sábados por la tarde o los domingos en la mañana, también durante parte de las vacaciones. El Profesor Grandjot usaba en estas clases un cuaderno en lugar de un pizarrón. Se llenaron varios cuadernos con notas, de los que se conserva la mayoría. Las tareas consistían en el ejercicio de demostrar algún teorema ya resuelto. Rolando las hacía con mucha facilidad."[50] Nos informa además que, siendo Grandjot de la escuela formalista, el primer tema y uno de los más largos, fue Lógica. Continuó con la geometría de Bolyai-Lobachevsky, que trató en forma axiomática, y luego con algo de teoría de números y álgebra moderna. Después de recibir su título de médico-cirujano, Rolando Chuaqui fue a hacer un doctorado en Matemáticas a Berkeley, donde se graduó con una tesis en fundamentos de las probabilidades.[51] Vuelto a Chile, su valiosa producción como investigador en el campo de la Lógica es conocida nacional e internacionalmente.

En el Centro de Investigaciones Matemáticas Grandjot permaneció hasta

[50] B. Chuaqui, *Rolando Chuaqui en la Escuela de Medicina*, 2001, circulación restringida.

[51] Se sabe que Grandjot redactó una recomendación para Rolando, la cual debe de haber influído mucho, pues Rolando no tenía estudios formales de Matemáticas. Sería interesante conocerla.

fines de 1959. Desde el año 1960 a 1963 ejerció en el Instituto de Física y Matemáticas de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile en calidad de profesor-investigador, ofreciendo seminarios en diversos campos de estas disciplinas. Durante 1965 y 1966, disfrutó de sus servicios la Facultad de Ciencias, continuadora del Centro de Investigaciones Matemáticas con el propósito, además, de ofrecer licenciaturas y maestrías en Ciencias.[52] Pronto siguieron otras instituciones análogas en las demás universidades en Chile. Culminó este proceso con la creación, en 1967, de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, dependiente del Gobierno. En este proceso le cupo una destacada actuación al profesor Juan Gómez Millas, ex-Rector de la Universidad de Chile y ex-Ministro de Educación, quien desde sus cargos "imprimió el más progresista impulso que ha conocido la ciencia chilena."[53] También Grandjot tuvo aquí un relevante papel como profesor y asesor, sobre todo en la formación y selección de jóvenes destacados para enviarlos a los más exigentes centros científicos del mundo. Grandjot se sentía allí, pensamos, cumpliendo la tarea que dejaron pendientes sus antecesores, cual era la de instalar las Matemáticas en Chile no sólo como ciencia "útil" o "corpus" de conocimiento, sino también como *proceso creativo.*

4.4 Sus últimos años: enfermedad y olvido

El 17 de Noviembre de 1966 la Rectoría de la Universidad de Chile expedía el decreto 9397:

> "Vistos: lo dispuesto en el Título 3^o párrafo 2^o del DFL 338 de 1960 y la *imprescindible necesidad* de que don Carlos Grandjot Reins concurra al Congreso de Matemáticas que se celebrará en Moscú, Rusia, Decreto: Comisiónese por el período de un mes a don Carlos Grandjot Reins (Rol C.G. 37262), Profesor Dedicación Exclusiva de Matemáticas en el Departamento Central de Ciencias Matemáticas y Naturales, a fin de que concurra al Congreso de Matemáticas que se celebrará en Moscú, Rusia. La presente comisión es con goce de sueldo." (Itálicas nuestras).

El decreto está firmado por el Rector Eugenio González. Aquella "imprescindible necesidad" de que habla el Decreto sin duda estaba relacionada con el

[52] La Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile fue creada en 1965, después de prolongados e intensos debates académicos, que indican las dificultades con que tropezó la institucionalización de la ciencia en Chile. En la Universidad Católica, entretanto, según el Prof. Salinas, en 1965, la mayoría del Consejo Superior opinó que una tal Facultad "se convertiría en una 'fábrica de científicos' que el país no necesitaba, que sería una tabla de salvación para alumnos mediocres y que, por último, una Facultad semejante costaba demasiado dinero." (Citado por Raúl Sáez, en *Universidad, Ciencia y Desarrollo*, Hombres del siglo XX, t. II, Dolmén Ediciones, 1994, p. 1213.)

[53] Héctor Croxatto, *Una visión de la Comunidad Científica Nacional*, CPU, 1982.

interés que las autoridades universitarias y el Gobierno tenían por vincular las actividades científicas y las instituciones recién creadas con centros análogos de América y Europa. Grandjot, dado su currículo, cumplía plenamente con los requisitos para tales objetivos. La comisión se prorrogó hasta el 28 de Febrero de 1967.

Cumplida su comisión, Grandjot regresó a Chile a fines de Febrero de 1967, habiendo sufrido en este lapso la pérdida de su segunda esposa, Margarete Rixmann Hövener, quien falleció en Alemania en Noviembre del año anterior.

Carlos Grandjot jubiló el 1^o de Marzo de 1967, después de 38 años de servicio ininterrumpidos prestados a la ciencia y a la educación chilena. Trabajador infatigable, después de su jubilación continuó como Profesor Extraordinario en la Universidad de Chile. Desgraciadamente, a fines de aquel mismo año tuvo un ataque de hemiplejia que interrumpió sus actividades académicas definitivamente. Siguieron años de soledad y olvido. Un período triste de su vida. La atención de sus colegas que hubieran podido visitarlo, fue absorbida por la Reforma Universitaria, por las luchas políticas de la época que dieron paso, con el golpe militar en Septiembre de 1973, a la intervención de las universidades. En Octubre de 1973, su hija Sigrid, que trabajaba como profesora de matemáticas en Concepción, lo trasladó a esa ciudad. Allí pasó el resto de su vida, internado en el Hogar Alemán para ancianos, pero ahora asistido por su hija que lo visitaba todas las tardes para compartir con él sus vagos recuerdos de la comunidad científica, de sus colegas universitarios, de sus discípulos y alumnos, y de aquellas instituciones a las que dedicó sus mejores años.[54]

Falleció el 5 de Octubre de 1979. Sus restos resposan en el Cementerio General de Concepción.

Post Scriptum

Por una llamada telefónica de la señora Marta Gutmann, amiga de Sigrid, los autores supieron que el lunes 2 de Diciembre de 2002 falleció en Rancagua (Chile) Sigrid Grandjot Fritsche, cuando este escrito estaba casi finalizado. Fue sepultada junto a su padre como eran sus deseos. Con ella desaparece la única descendiente de la familia Grandjot en Chile.

5 Cronología

1900 Nace el 23 de Agosto en Frankenberg, Alemania.

1919 Ingresa a la Universidad de Göttingen.

1922 Se gradúa de Doctor en Filosofía con mención en Matemáticas, Universidad de Göttingen.

[54]Conversaciones de Sigrid con los autores.

1926 Se gradúa de *Privatdozent* e inicia sus clases de matemáticas superiores en la Universidad de Göttingen.

Contrae matrimonio con Gertrudis Fritsche.

1928 Disfruta de una beca de la *Rockefeller Foundation* en París.

1929 Nace su hija Sigrid en París el 13 de Febrero.

El 9 de Abril firma el contrato por 2 años con el Gobierno de Chile y días más tarde se embarca para Chile.

Llega a Chile el 1^o de mayo.

Inicia sus actividades docentes en el Instituto Pedagógico.

En Septiembre arriba a Chile su esposa con su pequeña hija.

1930 30 de Diciembre: Se crea el *Instituto de Ciencias de Chile* y Grandjot es uno de sus fundadores.

1931 Viaja a Alemania.

1933 Comienza a hacer clases en la Facultad de Ingeniería de la PUC.

1938 Viaja a Alemania por segunda vez.

1940 Escribe su Algebra Abstracta.

1941 Viaja por Bolivia y Alto Perú.

1944 Fallece su esposa Gertrudis Fritsche.

1945 Profesor en la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile

Contrae segundas nupcias con Margarette Rixmann Hövener

1947 Se le nombra Jefe de la recién creada Sección Matemáticas del DICTUC de la P.U.C.

1952 Consejero de la Liga Chileno-Alemana (hasta 1959).

1953 Profesor de la Escuela de Arquitectura de la PUC.

Presidente y Socio Fundador de la Sociedad Matemática de Chile.

1954 Obtiene la nacionalidad chilena.

1962 Nombrado Jefe Laboratorio Computación Electrónica de la PUC.

1966 Concurre al Congreso de Matemáticas celebrado en Moscú.

Fallece su segunda esposa en Alemania.

1967 El 1^o de Marzo obtiene su jubilación después de 38 años de servicios en Chile.

A fines de año sufre un ataque de hemiplejia del que no logra recuperarse.

1973 En Octubre, su hija lo traslada al Hogar Alemán de Concepción.

1979 Fallece el 5 de Octubre en Concepción

6 Bibliografía de Carlos Grandjot

1922 *Über das absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen*, (Para obtener el doctorado, 1922, Göttingen, 12 p.). [Tesis está en los Archivos Mittag-Leffler]

1923 *Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung*, Göttingen 1923.

1924 *Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Onicescu*, Bucarest, 1924.

1924 *Mathematik–Naturwissenschaften–Medizin*, Deutsche Literatur-zeitung, -1924.

1924 *Über Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen*, Math. Annalen, vol 91, 1924, pp. 316-320.

1925 *Über Polynome, die in Einheitswurzeln beschränkt sind*, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, vol. 34, no. 1/4, 80-86 (1925)

Correcciones: *Bemerkungen zu meiner "Über Polynome, die in Einheitswurzeln beschränkt sind"*, JDMV, vol. 35, no. 1/4, p. 112, 1926.

1927 Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Mathem. Annalen, vol. 96, 62-68 (1927)

1927 *Untersuchungen über Dirichletsche Reihen*, Math. Zeitschrift, Vol. 26, 1927. pp. 593-618.

1927 *Ganze Funktionen endlicher Ordnung*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1927.

1928 *On Some Identities Relating to Hardy's Convergence Theorem*, J. London Math. Soc. 3, 114-117, 1928.

1928 *Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Annali di Matematica, Ser. 4, B.6 (1928-29), Bologna, con V. Jarnik, E. Landau and J. E. Littlewood. [Este paper lo hace tener número de Erdös 2]

1931 C. Grandjot, *Beweis eines auf Polynome spezialisierten Satzes der Analyse*, 1 tab., Verhandlungen des Deutschen Wissenschaftlichen Vereins zu Santiago de Chile, Neue Folge, Band I, 1931, pp. 213-218. W. Gnadt Imprenta y Encuadernación, Santiago de Chile.

1932 *Tablas Logarítmico–Trigonométricas con 4 decimales*, Santiago, Imp. Universitaria, 1933, 16 p., 20 cm.

1933 *Aritmética: Primer Libro*, Santiago [s.n.] 1933, 176 pp., 18 cm. (En Biblioteca Nacional de Chile).

1936 *Der Potrero Grande in der Kordillere von Santiago*, 2 fig.; 4 lám. f/n con 7 fig., Verhandlungen des Deutschen Wissenschaftlichen Vereins zu Santiago de Chile, Neue Folge, Band 3, 1936, pp. 213-218. W. Gnadt Imprenta y Encuadernación, Santiago de Chile.

1940 C. Grandjot, *Algebra Abstracta*, Apartado de la Revista Universitaria, Universidad Católica de Chile, Año XXV, No. 1., pp. 19-58.

1947 C. Grandjot, *¿Qué es la vida?*, IMPULSO, Revista anual del Centro de Ingeniería de la Universidad Católica, Año II, Noviembre de 1947, No. 2., pp. 3 - 11.

1950 *Complementos de Matemáticas Superiores*, Santiago, Galcon, 1950. 233 pp. Diversas ediciones hasta 196[?].

1954 C. Grandjot, *Estadística Matemática*, Universidad de Chile, Instituto Pedagógico, Ed. Galcon, 1954 [Páginas 30 - 53 de "Complementos...".]

1956 C. Grandjot, *La teoría de la relatividad*, Anales de la Universidad de Chile, Año CXIV, Primer Trimestre 1956, N^o 101, pp. 17-21.

1960 C. Grandjot, E. Schmidt, *Die Beiden Heimatsprachen der Chilenen deutscher Abstammung, Ergebnisse einer statistischen Umfrage / El Bilingüismo de los chilenos de Ascendencia Alemana, Resultado de una encuesta Estadística*, Editado por la Liga Chileno-Alemana 1960, Imp. Talleres Gráf. Claus v. Plate, Stgo. Chile, 1960. 48 pp. + 7 mapas.

1962 *Resolución numérica de ecuaciones algebraicas*, Santiago, P. Universidad Católica de Chile, 1965, 11p., 27 cm. (Depto. de Invest. Cient. y Tecnológicas. Laboratorio de Computación Electrónica. Publicación No. 12. Texto mimeografiado)

1965 R. Alessandri, C. Grandjot, S. Donoso, *Peso cardíaco, peso corporal y otras variables somáticas*, Revista Médica de Chile, Vol. 93, pp. 375-380, 1965.

Referencias

[A] **Libros y Artículos**

[1] Domingo Almendras, *Desarrollo de los estudios matemáticos en Chile hasta 1930*, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, 1982.

[2] Nibaldo Bahamonde, *Discurso de incorporación como Profesor Emérito a la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación*, 1998.

[3] George Birkhoff, *Lattice Theory*, Third Edition, American Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XXV, 1967.

[4] Rolando Chuaqui, *Desarrollo de las matemáticas en Chile*, en: Una visión de la Comunidad Científica Nacional, CPU, Santiago, 1982.

[5] Jean Dieudonné, *La matemática del siglo XX*, en: La Ciencia Contemporánea, Editado por R. Taton, Barcelona, 1975, t. IV.

[6] G. H. Hardy, H. Heilbronn, *Edmund Landau*, Journal of the London Math. Soc. 13 (1938) 302-310

[7] Juvenal Hernández, *Discurso Académico, 27 Abril de 1978, con motivo de su designación como Profesor Emérito de la Fac. de Derecho la la Universidad de Chile*, en: Testimonios Universitarios, Ed. Universitaria, Santiago, 1978.

[8] Claudio Gutiérrez, Flavio Gutiérrez, *Ramón Picarte, la proeza de hacer matemáticas en Chile*, QUIPU Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, Vol. 13, Núm. 3, Sept-Dic, 2000.

[9] Valentían Letelier, *La lucha por la Cultura*, 1895.

[10] Daniel Martner, *Obras Escogidas*, Edic. del Centro de Estudios Políticos Latinoamericano Simón Bolívar, 1992.

[11] Rolando Mellafe, *Reseña histórica del Instituto Pedagógico*, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, 1988.

[12] Adolph Meyer, *Investigación y Enseñanza*, Revista Atenea, Concepción, Febrero de 1931.

[13] Enrique Molina, *El primer curso del Instituto Pedagógico*, en LXXV aniversario de su fundación, Universidad de Chile, 1964.

[14] Giuseppe Peano, *Arithmetica principia nova metodo*, 1890.

[15] Pedro Pi Calleja, *La objeción de Grandjot a la teoría de Peano del número natural*, Mathematice Notae, Año IX, pp. 143-151, Rosario, 1949.

[16] Raúl Sáez, *Hombres del Siglo XX*, Dolmén Ediciones, 1994, t. II.

[17] Carlos Videla, *Contribución de la Facultad de Filosofía y Humanidades a la enseñanza de las matemáticas*, Ed. Universidad de Chile, Imprenta Universitaria, 1944.

[B] Revistas y Documentos

[18] *Anales de la Universidad de Chile*, 1856, 1861, 1892, 1893, 1894, 1897, 1901, 1905, 1925, 1927, 1930.

[19] Revista de Ingenieros de la Pontificia Universidad Católica de Chile, 1947.

[20] *Autobiografía de Carlos Grandjot*, Dos páginas, a máquina. Circulación restringida.

[21] Benedicto Chuaqui, *Rolando Chuaqui en la Escuela de Medicina*, III Jornadas Rolando Chuaqui, 2001, Circulación restringida.

[22] *Boletín del Consejo Universitario, Universidad de Chile.*

[23] *Cartola de Servicios de Carlos Grandjot en la Universidad de Chile.*

[C] Entrevistas y Testimonios recogidos: César Abuauad, Sigrid Grandjot, Benedicto Chuaqui, Guacolda Antoine, Nibaldo Bahamonde.

Agradecimientos

A Sigrid Grandjot, Benedicto Chuaqui, y Horacio Gutiérrez por la valiosa crítica del manuscrito en diversas etapas de su redacción. Agradecemos también por la información proporcionada a César Abuauad, Guacolda Antoine, Nibaldo Bahamonde, Martín Chuaqui, Hernán Cortés, Jerrold W. Grossman, Marta Gutmann, Renato Lewin, Hugo Lucares, Luis Rubilar y Peter Schmid.

Claudio Gutiérrez
Universidad de Chile,
Chile

Flavio Gutiérrez
Universidad de Valparaíso,
Chile

HISTORIA

Evolución de la Geometría desde su perspectiva histórica

C. José María Sigarreta Almira y Pilar Ruesga Ramos

Resumen

El trabajo aborda el surgimiento y desarrollo de la Geometría y se evidencia, a través de la evolución de las Geometrías No-Euclidianas, el papel de la práctica y de los factores internos y externos, objetivos y subjetivos en la estructuración de los conocimientos geométricos. Se presenta un estudio del problema del V Postulado y las principales tentativas de "demostración", se analizan algunas proposiciones equivalentes a este y por último se ofrecen resultados importantes que fundamentan las Geometrías de Lobatchevski y de Riemann y la no contradicción de las mismas. Además, desde el punto de vista filosófico se valoran las principales corrientes imperantes en la época y su influencia en el surgimiento de la nueva Geometría, así como el papel de esta naciente ciencia en la revolución del pensamiento humano.

Introducción

Para el surgimiento y desarrollo de la Geometría, como una disciplina matemática, fue necesario que se acumularan resultados de carácter empírico y que se desarrollara el comercio y la comunicación hasta que apareciera la necesidad de acumular todos aquellos resultados y métodos en teorías independientes, es decir, que existiera una relación dialéctica entre los factores internos y externos. En la Geometría, como en las demás ciencias, se debe destacar el papel de la práctica, la cual explica la naturaleza sociohistórica del conocimiento y sus nexos con la realidad. La actividad matemática en general, y en particular la actividad geométrica, está doblemente ligada a la realidad concreta: en el seno de esta se forman los primeros eslabones de la cadena de conceptos geométricos; y se retorna a la práctica, a la postre, en las aplicaciones de estos a las demás ciencias y a la técnica.

La Geometría como ciencia a lo largo de todos estos siglos ha contribuido al desarrollo de la sociedad, pues los conocimientos geométricos se han aplicado en la obra constructiva y cultural de la humanidad, se pueden citar los ejemplos de las famosas construcciones de la antigüedad y del Renacimiento; ha influido en el desarrollo urbano alcanzado por las civilizaciones, resolviendo de esta forma problemas científicos y sociales. Se pueden citar diferentes períodos en el desarrollo de la Matemática, en particular, A. N. Kolmogorov, divide el desarrollo de la Matemática en cuatro períodos:

1. Surgimiento de la Matemática (hasta el siglo VI a.n.e.).
2. Matemática Elemental (desde el siglo VI a.n.e. hasta el XVI).
3. Matemática de las magnitudes variables (desde el siglo XVII hasta mediados del XIX).
4. Matemática Contemporánea (a partir de 1870 aproximadamente).

> "*Se entiende por problemas filosóficos de la matemática cualquier problema relativo a la matemática como ciencia y cuyo tratamiento o solución necesite de la utilización de las categorías y leyes de la Filosofía*" (Sánchez, 1987).

Estos problemas filosóficos pueden ser, entre otros:

- ¿Cuál es el objeto de la Matemática?
- ¿Cuáles son los principales estímulos del desarrollo del saber matemático? etc.

Desarrollo

Este trabajo abarca el tercer período e inicio del cuarto del desarrollo de la Matemática propuestos por A. N. Kolmogorov, que es precisamente donde surge y se desarrollan las Geometrías No-Euclidianas, relacionando esencialmente, el papel de la práctica social en el desarrollo de la Geometría de esta época, aunque se parte desde el segundo período.

Sección 1. El Problema del V Postulado. Tentativas por Demostrarlo

La fiebre que se originó por reducir el sistema de axiomas de Euclides, llevó a los geómetras directamente al V Postulado y aunque las investigaciones relativas al mismo son tan antiguas como los Elementos, estas no culminaron hasta cerca del siglo XIX con importantes descubrimientos. El problema consistía en que los matemáticos se dieron a la tarea de probar que este postulado era un teorema, es decir, que era demostrable a partir de los restantes postulados y axiomas.

Desde Euclides hasta fines del siglo XIX el problema del V Postulado era uno de los más populares de la Geometría. Durante más de veinte siglos se propusieron muchas "*demostraciones*" diferentes de dicho postulado. Todas eran, sin embargo, falsas o erróneas. Por lo común sus autores utilizaban en dichas demostraciones, sin darse cuenta, una proposición equivalente al famoso postulado. Tales análisis no alcanzaron la meta propuesta, ya que el problema era liberar la teoría euclidiana de ese postulado "especial".

A continuación se citan algunos de los matemáticos que"*demostraron*" el V Postulado de Euclides:

Posidonio (siglo I a.n.e.): Propone llamar rectas paralelas a dos rectas coplanares y equidistantes. Esta definición y la euclidiana se corresponden, sin embargo los hechos de que sean equidistantes y no se corten pueden tratarse por separado, aspecto que aborda en su obra Gemino. **Gemino** (siglo. I a.n.e.): Plantea que pueden existir rectas paralelas en el sentido de Euclides, pero no así en el sentido de Posidonio, es decir, que prolongadas hasta el infinito no se corten y sin embargo que sean no equidistantes. Tal hecho es calificado por Gemino como el más paradójico de toda la Geometría. **Proclo** (410-485): Su demostración reposa sobre la siguiente proposición que él consideraba evidente: "La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera prolongando suficientemente las dos rectas". Esta proposición fue demostrada rigurosamente por Saccheri años más tarde. Introduce, por consiguiente, la hipótesis de que la distancia de dos paralelas se mantiene finita, hipótesis de la que básicamente se deduce la hipótesis de Euclides. **Aganis** (S. VI): Su demostración la basa en la hipótesis de que existan rectas equidistantes que como Posidonio llama paralelas. De tal hipótesis deduce que la misma distancia entre dos paralelas es la longitud de un segmento perpendicular común a las dos rectas; que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí; que dos paralelas cortadas por una tercera forman ángulos internos de un mismo lado suplementarios y recíprocamente. **Nassir-Eddin** (1201-1274): Hizo su contribución personal al problema del V Postulado, a pesar de adaptarse al criterio dado por Aganis, merece ser recordado por la idea original de anteponer explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo y por la forma acabada de su razonamiento. (Su obra escrita en árabe fue reproducida en 1657 y 1801). **P.A. Cataldi** (?- 1626): Primer geómetra moderno en publicar un trabajo exclusivo sobre el problema de las paralelas. Brinda una demostración del V Postulado recurriendo a la hipótesis de que rectas no equidistantes son convergentes en una región y en la otra divergentes. **Giordano Vitelas** (1633-1711): Escribe su obra: "*Euclides restaurado o bien los antiguos elementos geométricos corregidos y facilitados*". Trata de demostrar que la equidistante de una recta es una recta. Obtiene el resultado más notable hasta el momento. **J. Wallis** (1616-1703): En el 1663, dio un curso que contenía una demostración del postulado de las paralelas. Fundamenta su demostración en que para toda figura existe una semejante de razón arbitraria. Plantea el postulado siguiente: "*La perpendicular AB y la oblicua CD a la secante AC, necesariamente se cortan del lado del ángulo agudo ACD*". Este postulado se le atribuye a Legendre

Existieron otros "demostradores" del postulado, ya que son raros los grandes matemáticos que no se hallaron interesado alguna vez en ese problema: Ampere, Leibniz, Descartes, Lagrange, Legendre, Fourier, Gauss, Jacobi, etc. Todos intentaron "demostrar" el famoso postulado y de hacer luz sobre esa "*mancha oscura de la teoría de las paralelas*".

Tres matemáticos, en sus trabajos, se acercaron bastante a la Geometría No-Euclidiana, ellos fueron Saccheri, Lambert y Legendre, de los cuales se brindan aspectos de sus trabajos, pero antes se citará el ya discutido V Postulado:

> *Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una a dicha recta.*

Girolamo Saccheri (1677-1733): Los estudios de Saccheri fueron publicados en 1733, bajo el título: "*Euclides depurado de toda mácula, o la experiencia que establece los principios primordiales de la Geometría Universal*". Hace un intento de demostrar el V Postulado por reducción al absurdo. Formuló las siguientes hipótesis, excluyentes y exhaustivas: los ángulos de su cuadrilátero son rectos, son obtusos o son agudos. Saccheri demostró que si una de estas hipótesis es válida para un cuadrilátero, entonces es válida para todos. Demostró que el V Postulado es consecuencia de la hipótesis del ángulo recto, que la hipótesis del ángulo obtuso es contradictoria con el sistema.

Comienza a trabajar en la hipótesis del ángulo agudo con el objetivo de encontrar una contradicción. Al no encontrar la misma es incapaz de rechazar dicha hipótesis, basándose en resultados lógicos se refugió en el terreno menos firme de la intuición y llegó a la conclusión en la proposición 32 de su libro de que la hipótesis del ángulo agudo es falsa porque contradice la naturaleza de la línea recta. Evidentemente el propio Saccheri siente aquí que no pudo reducir la hipótesis del ángulo agudo a una contradicción lógica y él regresa a ella, a fin de demostrar que se "contradice a sí misma". Con este fin, calcula de dos maneras diferentes la longitud de cierta línea y obtiene dos valores distintos para ella. Esto sería, en efecto, una contradicción, pero él llegó a ella cometiendo un error de cálculo.

Lambert (1728-1777): Sus ideas desarrolladas en la obra "*Teoría de las líneas paralelas*" (1766), se aproximan a los razonamientos de Saccheri. Considera en el cuadrilátero tres ángulos rectos y con el cuarto, al igual que Saccheri, analiza las tres hipótesis. Y desarrolla la hipótesis del ángulo agudo, en la cual no encontró contradicción lógica alguna y a diferencia de Saccheri no cometió error que le permitiese descartar la hipótesis del ángulo agudo. Lambert en su obra, no afirma haber demostrado el V Postulado y llega a la firme conclusión de que las restantes tentativas en esta dirección no llevaron a la meta deseada. **Legendre** (1752-1833): Es conocido por sus trabajos en el Análisis, Teoría de los números y Mecánica, dejó una herencia importante en Geometría. Intentó por mucho tiempo "demostrar" el V Postulado de Euclides; llegó a publicar algunas de las "demostraciones" del V Postulado y a pesar de que ninguna fue correcta, sus razonamientos son de interés, pues ponen en claro la relación existente entre el V Postulado y la proposición relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo. En su trabajo consideró tres hipótesis: *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que 2R, es igual a 2R o es menor que 2R*. Donde R significa un ángulo de 90^o.

La primera es reducida a una contradicción, mediante razonamientos exactos. Sin embargo, al efectuar la reducción de la tercera a una contradicción, Legendre utilizó una proposición equivalente al V Postulado. Un saldo positivo de su trabajo, se encuentra en que obtuvo proposiciones de gran interés, como por ejemplo: *Si la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a 2R, tiene lugar el V Postulado.* Su mayor mérito está en la forma sencilla y elegante que supo dar a sus investigaciones, por lo que estas alcanzaron aquella difusión que tanto contribuyó a ensanchar el círculo de los cultivadores de las nuevas ideas que entonces estaban formándose.

Farkas Bólyai (1775-1856): Oriundo de Transilvania (parte suroriental de Hungría), viaja a Alemania a la Universidad de Gottinga, donde se dedicó al estudio de las Matemáticas. En dicha Universidad conoció a un joven, dos años menor que él, este respondía al nombre de Karl Friedrich Gauss. Ambos jóvenes entablaron una larga y duradera amistad y el joven Gauss estimuló los intereses de Farkas por los fundamentos de la Geometría y especialmente por la "demostración" del V Postulado. En esta época Farkas formuló una demostración, la cual reelaboró muchas veces y en la literatura se conoce con el nombre de "*La Teoría Gottingeana de las paralelas*", debido a él y a su entrañable amigo. En 1800 conoció a Susana Arkos, hija de un cirujano, con la cual entabló rápidamente matrimonio. De este casamiento nació en Diciembre de 1802 János Bólyai, el cual superó a su padre en el talento, pero heredó de su madre la histeria. De la obra de este famoso matemático se hablara más adelante.

Como se puede apreciar, el V Postulado fue blanco de los más duros ataques, sin embargo, la grandeza de Euclides descansó en el mismo. En su comentario sobre los Elementos de Euclides, Heath, señaló:

> *"Cuando se consideran los innumerables intentos hechos a través de veinte siglos para demostrar este postulado, muchos de ellos por geómetras de primera fila, no se puede por menos de admirar el genio del hombre que llegó a la conclusión de que tal hipótesis, necesaria para la validez de todo el sistema, es realmente indemostrable".*
> (Blumenthal, 1965, p. 7)

En este largo período de tiempo no existieron las condiciones internas dentro de la Matemática para poder llegar a conclusiones válidas sobre la imposibilidad de la demostración del V Postulado a partir del resto de los axiomas y postulados formulados por Euclides, pues desde el punto de vista subjetivo la mayoría de los matemáticos no se percataban del uso de proposiciones equivalentes y de sus errores en las diferentes demostraciones que hacían, además reinaban las concepciones filosóficas idealistas y otros resultados contrarios a los de Euclides eran inaceptables por la sociedad científica de estas épocas. Aún no estaban creadas las condiciones internas y externas para el surgimiento de las Geometrías No-Euclidianas.

Sección 2: Proposiciones Equivalentes al V Postulado

Aunque las "*demostraciones*" anteriores del V Postulado no fueron válidas, sí se obtuvieron resultados positivos, como por ejemplo, se formularon proposiciones equivalentes al V Postulado, como las siguientes:

1. Dos rectas paralelas son equidistantes. (Proclo)
2. De un triángulo cualquiera puede siempre construirse un triángulo semejante de magnitud arbitraria. (Wallis)
3. Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia. (F. Bólyai)
4. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. (Saccheri y Legendre)
5. Si k es un entero cualquiera, existe siempre un triángulo cuya área en mayor que k. (Gauss)

Por otro lado, con los intentos por demostrar este famoso postulado se obtuvo al inicio del siglo XIX la llamada Geometría de Lobatchevski y posteriormente la Geometría de Riemann.

Sección 3: Surgimiento de las Geometrías No Euclidianas

Probablemente, el primero que obtuvo un concepto claro sobre una Geometría distinta a la de Euclides fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el más grande matemático del siglo XIX y quizás de todos los tiempos. Gauss estudió durante 40 años la teoría de las paralelas y después de muchas reflexiones formuló una nueva Geometría que llamó no euclidiana y comenzó su desarrollo.

Los documentos que permitieron una reconstrucción aproximada de las investigaciones gaussianas sobre la teoría de las paralelas son la correspondencia de Gauss con F. Bólyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus y Bessel; dos pequeñas notas en Gottgelehrte Anzigen (1816-1822) y algunos apuntes encontrados entre sus cartas en 1831. Revisando las cartas de Gauss se pudo fijar como fecha de partida de sus meditaciones sobre la teoría de las paralelas el año 1792. El segundo período en el estudio de la teoría de las paralelas es después del 1813, ilustrado principalmente por algunas cartas dirigidas a Wachter en 1816, a Gerling en 1819, a Taurinus en 1824 y Schumacher en 1831 y por los apuntes encontrados en las cartas de Gauss.

Todos estos documentos muestran que a partir de aquí Gauss obtuvo algunos de los teoremas fundamentales de la nueva Geometría, que él llamó primero antieuclideana, después Geometría Astral y finalmente No-Euclidiana. Sin embargo, Gauss no dejó traslucidar sus ideas por temor a no ser comprendido; sólo a algunos amigos íntimos confió algo de sus investigaciones y cuando por necesidad se vio obligado a escribir a Taurinus en 1824, le ruega que guarde en silencio sobre las comunicaciones que le hace.

Pero además, el llamado "*Príncipe de las Matemáticas*" no publicó sus resultados por temor a la crítica del mundo matemático de aquella época y el golpe que una tal Geometría significaba para las concepciones filosóficas imperantes, el Kantismo, su creador Enmanuel Kant (1724-1804). Este filósofo, sostenía la doctrina de que la Geometría Euclidiana es inherente a la naturaleza del mundo físico. Así, mientras Platón decía que sólo Dios hacía Geometría, Kant afirmaba que Dios hace Geometría de acuerdo a los Elementos de Euclides. *Efectivamente, Gauss evitó las críticas y después de su muerte, sólo encontraron en sus papeles fragmentos aislados, esbozos de las proposiciones primeras de la Geometría No-Euclidiana. Estos fragmentos figuran en el tomo VIII de sus obras; es suficiente revisarlos para constatar hasta qué punto es insignificante esa herencia del matemático alemán con respecto a las obras de Lobatchevski* (Kagan, 1984).

Similares resultados obtuvo János Bólyai (1802-1860) en 1832 después de 10 años de trabajo. János estudió las consecuencias que se derivan de negar el V Postulado, suponiendo que no existe ninguna paralela o que existe más de una. La primera hipótesis se pudo rechazar fácilmente, como lo había sido la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri; fue la segunda hipótesis la que condujo a Bólyai a una nueva e interesante Geometría derivada del ángulo agudo de Saccheri. Sin embargo, los puntos de vista de Bólyai y Saccheri son distintos por completo: cuando Saccheri se hallaba convencido de que encontraría una contradicción si llegaba suficientemente lejos en su estudio, Bólyai sabía que estaba desarrollando una nueva Geometría.

Este matemático húngaro escribió, en 1832, en un apéndice de 26 páginas los resultados de sus investigaciones sobre la nueva Geometría, y que junto a su padre publicaron en el trabajo titulado "Tentamen" en dos tomos, de ahí que el nombre con el cual pasó a la historia fuera Appendix. Luego que Bólyai obtuvo la Geometría No-Euclidiana, su padre escribió a Gauss con el objetivo de que el "Príncipe de las Matemáticas" diera su opinión con respecto al trabajo del hijo. Al conocer el trabajo del joven Bólyai, Gauss lo calificaría como "genio geométrico de primera magnitud" pero le respondió a Farkas que no podía dictaminar dicho trabajo puesto que eso equivaldría a alabarse él mismo.

Esto fue un golpe muy duro para János, en primer lugar porque no podía creer que Gauss hubiera tenido esas ideas antes que él y estimaba que éste quería arrancarle la prioridad de su descubrimiento. Ya a finales de su vida János sufrió una nueva decepción que le afectó mucho ya que el 17 de Octubre de 1841 recibió de su padre un folleto escrito por Lobatchevski en el cual se trataba la Geometría No-Euclidiana y que Lobatchevski había publicado en el año 1829, es decir, tres años antes que él.

A pesar que János Bólyai no pudo disfrutar de ser el primero en encontrar esta nueva Geometría, a la hora de hablar de las Geometrías No-Euclidianas, hay que dejar un espacio muy especial a su obra y el papel de éste en esta magistral teoría. Se han analizado los trabajos de F. Gauss y J. Bólyai creadores de la Geometría No-Euclidiana, sin embargo, el mérito de tal descubrimiento recae sobre Nikolai Ivanovich Lobatchevski (1793-1856), quien el 11(23) de Febrero del año 1826 en la reunión de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán expuso su obra con una conferencia y por primera vez informó de los resultados de sus investigaciones sobre la teoría de las paralelas, bajo el nombre de "*Exposición breve de los fundamentos de la Geometría con una demostración lógica del teorema de las paralelas*", este día se puede considerar como el certificado de nacimiento de las Geometrías No-Euclidianas.

Lobatchevski estudió Matemáticas en la Universidad de Kazán bajo la dirección del alemán J.M.C. Bartels (1769-1836), amigo y compatriota de Gauss, se licenció en 1813 y permaneció en la Universidad de Kazán primero como profesor auxiliar, después como profesor enseñando todas las ramas de la Matemática, la Física y la Astronomía . En 1815, se ocupa de la teoría de las paralelas, y en un manuscrito suyo relativo a las lecciones de 1815-1817, se encuentran tentativas por demostrar el V Postulado e investigaciones semejantes a Legendre. Pero sólo después de 1823 concibió la ya mencionada Geometría No-Euclidiana.

En 1829, editó su obra, en forma ampliada, bajo la denominación: "*Sobre los elementos de la Geometría*". En lo sucesivo Lobatchevski desarrolló una nueva Geometría, publicando una serie de trabajos, entre los que se encuentran: "*Geometría Imaginaria*" (1835), "*Aplicación de la Geometría Imaginaria a ciertas Integrales*" (1836), "*Nuevos Elementos de la Geometría con una Teoría Completa de las Paralelas*" (1834-1838), un pequeño libro, "*Investigaciones Geométricas*" (1840), "*Pangeometría*" (1855).

El punto de partida de las investigaciones de Lobatchevski sobre la Geometría fue el axioma de las paralelas de Euclides, que supuso no se cumplía, conservó los restantes postulados y sustituyó el axioma de las paralelas por su negación.

¿Cómo Lobatchevski se vio llevado a ocuparse de las paralelas y a descubrir la Geometría No-Euclidiana?

A pesar de que Lobatchevski fue instruido por Bartels, amigo de Gauss, y que pasó con este dos años en Brunswick antes de ser elegido para trabajar en Kazán (1807), no pudo haberle trasmitido a Lobatchevski algo positivo de los trabajos de Gauss sobre las paralelas, pues hasta 1807, Gauss no tenía aún clara la idea sobre la Geometría No-Euclidiana. Luego, se puede concluir que Lobatchevski creó su Geometría independientemente de cualquier influjo gaussiano.

Puede suponerse que Lobatchevski conocía las obras de Saccheri y Lambert, lo que le permitió recibir otros influjos, aunque esto es pura suposición y no existe nada que pueda probarlo. De todos modo, o la falta de demostraciones de sus predecesores, o la inutilidad de sus primeras investigaciones (1815-1817), indujeron a Lobatchevski, como antes a Gauss, a pensar en el desarrollo de una nueva teoría.

Lobatchevski expresa claramente esta idea en 1835 cuando escribe: *"La infructuosidad de las tentativas, hechos desde la época de Euclides por espacio de dos milenios despertó en mí la sospecha de que en los mismos datos no estuviese contenida la verdad que se había querido demostrar, y que para su conformación pudieran servir, como en el caso de otras leyes naturales, las experiencias, a ejemplo de las observaciones astronómicas...*" (Bonola, 1951, p. 97)

En síntesis, los resultados obtenidos por Lobatchevski pueden resumirse de la siguiente forma:

- El axioma de las paralelas no es una consecuencia de los restantes axiomas de la Geometría Euclidiana, o sea, es independiente de ellos.

- Al lado de la Geometría de Euclides donde sí se cumple el axioma de las paralelas, existe otra, la Geometría No-Euclidiana en la cual no se cumple.

La Geometría, en dependencia de que se utilice o no el axioma de las paralelas, se divide en dos partes: Aquella parte, donde se incluyen proposiciones que no se apoyan en el axioma, lleva el nombre de "*Geometría Absoluta*". Lobatchevski, el cual inicialmente se esforzó por dar la demostración del mencionado postulado, enseguida se convenció de la posibilidad de dividir la Geometría en absoluta y no absoluta y lo llevó a cabo. La Geometría de Lobatchevski en su parte absoluta no se diferencia en esencia de la Geometría de Euclides.

Lobatchevski desarrolló la Geometría No-Euclidiana hasta el nivel de la de Euclides, sin embargo, nunca pudo probar la consistencia lógica de su Geometría, es decir, no pudo probar la no contradicción de dicha Geometría. Él comprendió de manera profunda la relación entre la Geometría de Euclides y su "*Geometría Imaginaria*", ambas son lógicamente no contradictorias, ahora bien, el problema de cuál de estas Geometría corresponde más a las propiedades del espacio real, es algo que debe decidirse experimentalmente y Lobatchevski intentó verificar si nuestro espacio se rige por la Geometría No-Euclidiana. Ya se sabe que el dilema que oponía la Geometría de Euclides a la Geometría No-Euclidiana, es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual o menor que dos rectos. Él quería evaluar esa suma en el caso de un triángulo con lados suficientemente grandes, evaluó la suma de un triángulo cuyos vértices son la Tierra, el Sol y la estrella Sirio, y llegó a la conclusión de que esa suma difería de 2R menos de 0,000372.

No obstante, a todos los esfuerzos de Lobatchevski por probar la no-contradicción de su geometría, esta se resuelve después de su muerte y los primeros en hacerlo fueron Eugenio Beltrami y Félix Klein.

Sección 4: Sobre la No Contradicción de la Geometría de Lobatchevski

Un aspecto que ocupó a Lobatchevski toda su vida y que no pudo dar respuesta de manera categórica, fue el problema de la no contradicción de su Geometría, es decir, para establecer la no contradicción del sistema geométrico que había creado era necesario demostrar con el mayor rigor, que ningún desarrollo de este sistema podía conducir a una contradicción. De aquí, que sus adversarios mantenían que toda la Geometría de Lobatchevski era pura fantasía e indigna de la menor atención.

Los primeros en convertir la fantasía de la Geometría de Lobatchevski en realidad fueron Eugenio Beltrami (1835-1900) y Felix Klein (1849-1925). La solución de este problema se basa en la Geometría Interior de superficies, concepto introducido por Gauss en 1824, la cual se puede definir de la siguiente forma: "*Es la parte de la Geometría que se ocupa de aquellas propiedades de superficies y figuras sobre las mismas que dependen solamente de las longitudes de las curvas sobre la superficie.*"

Beltrami en su estudio demostró que existe en el plano de Lobatchevski una métrica determinada por cierta forma diferencial cuadrática y con dicha métrica es posible hacer la medición de las magnitudes de las líneas sobre el plano de Lobatchevski. Y logró determinar las fórmulas para encontrar el ángulo entre dos líneas y el área de una región sobre el plano de Lobatchevski, donde sus formas son análogas a las del plano euclidiano pero en coordenadas beltramianas. Fue entonces donde Beltrami planteó en su obra "*Experiencia de la interpretación de la Geometría No-Euclidiana*" (1868), los dos problemas siguientes:

1. Hallar una superficie, para cada punto de la cual existe un entorno isométrico respecto a cierto dominio del plano de Lobatchevski. Es decir, que

exista la superficie y se verifique la Geometría del plano de Lobatchevski de forma ”local” sobre esta superficie.

2. Hallar una superficie que admita su aplicación isométrica sobre todo el plano de Lobatchevski. Es decir, que exista la superficie y se verifique toda la Geometría del plano de Lobatchevski sobre esta superficie.

La solución del segundo problema conduciría directamente a la consistencia lógica del sistema no euclidiano bidimensional. Beltrami resolvió el primero, pero al segundo no pudo darle respuesta. Más tarde, Hilbert demostró en el año 1901, que en el espacio de Euclides no existe una superficie que tenga la propiedad requerida, es decir, no existe superficie analítica de curvatura constante negativa que no tenga singularidades en ninguna parte y que sea en todas partes regular. Por esto, llevar a cabo una interpretación del tipo Beltrami en todo el plano de Lobatchevski es imposible. Del trabajo hecho por Beltrami se pudo concluir que:

- Cualesquiera que sean dos superficies de una misma curvatura constante, cada porción suficientemente pequeña de cualquiera de ellas puede ser aplicada isométricamente, sobre cierta porción de la otra.

- Dos superficies de curvatura constante igual localmente, tienen Geometría Interior igual.

A pesar que Beltrami no resolvió el segundo problema sus investigaciones revistieron una gran importancia de principio. Primero, una realización parcial de la planimetría de Lobatchevski en el espacio euclidiano cambió la actitud escéptica de los geómetras ante las obras de Lobatchevski. Por lo tanto, sus investigaciones jugaron un papel importante en el desarrollo general de la ciencia. Segundo, gracias a sus estudios, la planimetría de Euclides, la Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann resultaron unidas en un esquema geométrico diferencial general. Todos estos sistemas geométricos se realizan sobre una superficie de curvatura constante k y corresponden a los casos k=0, k¡0 y k¿0. Es importante comprender que una pequeña variación alrededor de 0 de la cantidad k hace pasar de un espacio esférico a un espacio euclidiano o de Lobatchevski, es decir, de un espacio en el que dos rectas no son jamás paralelas, a uno donde se pueden trazar por un punto una infinidad de paralelas a una recta dada.

La siguiente interpretación de la Geometría No-Euclidiana que realizara en el año 1871 F. Klein en el trabajo “*Sobre la llamada Geometría No-Euclidiana*” se basa en la definición de medida proyectiva en el plano, introducida por Cayley en el año 1859 en la obra “*Sexta Memoria sobre las Formas*”; además, Klein se basó en el concepto de grupo que él introdujo en la Geometría; sus nuevos puntos de vistas sobre las Geometrías los expuso en el famoso Programa de

Erlangen, este discurso jugó un papel capital en la génesis de las ideas sobre la esencia de la Geometría, principalmente para dilucidar el lugar que ocupa la Geometría de Lobatchevski.

Las ideas de Klein se basaron en el conjunto de los desplazamientos del espacio que constituyen un grupo de aplicaciones. Su concepción estuvo basada en la Geometría Métrica que permite desplazamientos tales que cada punto puede llevarse en coincidencia con cualquier otro punto; en este caso el grupo de desplazamientos de esa Geometría se dice que es transitivo. En otras palabras, el conjunto de aplicaciones que forma este grupo conserva la distancia entre los puntos.

Por otra parte, Sophus Lie mostró que no puede haber más que tres sistemas de Geometría Métrica fundados sobre el desplazamiento, es decir, la Geometría de Euclides, la Geometría de Lobatchevski y la Geometría de Riemann.

Klein y Lie basados en la Geometría Proyectiva construyeron un modelo para la Geometría No-Euclidiana y para el cual se tomó el círculo fundamental. En este modelo se verifica en forma absolutamente irreprochable la Geometría Hiperbólica para dos dimensiones. La aplicación del espacio hiperbólico en el interior de la esfera euclidiana se hace de manera análoga. Toda contradicción en la Geometría Hiperbólica, si se llegase a descubrir, significaría que existe otra análoga a la Geometría Euclidiana. Luego la Geometría Hiperbólica es lógicamente verdadera como la Geometría Euclidiana.

El modelo de Klein, resultó la demostración completa, largamente esperada de la no contradicción de la Geometría de Lobatchevski y la existencia para ella de un sentido real.

Lobatchevski con este descubrimiento aportó nuevas ideas en el desarrollo de la Geometría, sus méritos van mucho más allá del hecho de que haya arrancado el velo del misterio milenario del axioma del paralelismo; con su análisis crítico del axioma de las paralelas, dio comienzo a la revisión de algunas posiciones iniciales del sistema de Euclides, hecho que condujo posteriormente a la elaboración de principios rigurosamente científicos de construcción axiomática de la Geometría y otras ciencias matemáticas.

Dicha Geometría encontró aplicación directa, en la teoría de las integrales definidas, donde Lobatchevski halló más de 200 fórmulas nuevas para el cálculo de las mismas. Sin su descubrimiento, no hubiera sido posible desarrollar la teoría de la relatividad, uno de los mayores alcances de la Física contemporánea. Partiendo de sus investigaciones se construyó una teoría que permite efectuar el cálculo de los procesos que transcurren en el interior del núcleo atómico.

Con su descubrimiento, retornó la Geometría a las posiciones del materialismo ya que antes y durante muchos siglos reinó en la Geometría el punto de vista idealista que remontaba a Platón, negando la procedencia experimental de los axiomas. En sus obras expresó de forma explícita sus posiciones materialistas, por ejemplo, en su obra "*Sobre los Elementos de la Geometría*" (1929), expresó: "*Los conceptos primarios deben ser claros y reducidos a la mínima cantidad. Sólo entonces estos pueden proporcionar una base sólida y suficiente para la teoría. Tales conceptos se adquieren por medio de los sentidos, los conceptos innatos son inaceptables*".

De esta forma rechazaba la tesis Kantiana de que nuestras representaciones espaciales son innatas y no tienen un origen empírico. Con su descubrimiento hizo un gran aporte a la elaboración de las nociones científicas referentes al nexo del espacio y el tiempo con la materia en movimiento. Lobatchevski demostró que las propiedades del espacio no son inmutables, iguales siempre y en todas partes, sino que cambian en dependencia de las propiedades de la materia y de los procesos físicos que tienen lugar en los cuerpos materiales (Konstantinov et al., 1978).

Antes de su Geometría se consideraba a la Geometría de Euclides la única teoría imaginable del espacio, su descubrimiento destruyó este punto de vista. Esto marcó el comienzo de profundas generalizaciones de los enfoques de la Geometría y su finalidad, que condujeron al concepto moderno de espacio abstracto con sus múltiples aplicaciones en la propia Matemática y en disciplinas afines.

Precisamente B. Riemann (1826 – 1866), en 1854, cuando fue nombrado encargado de un curso de la Universidad de Göttingen, dio, según de costumbre, una lección inaugural en la reunión general de la Facultad de Matemática. Como lo ordenaba el reglamento, sometió tres temas a la Facultad, de los cuales Gauss escogió el tercero, titulado "*Hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría*". En el trabajo definió espacios que generalizan tanto el euclidiano, como el de Lobatchevski, así como también el espacio correspondiente a su Geometría. Estos espacios generales de Riemann se diferencian del de Euclides en el mismo grado que una superficie curva arbitraria se diferencia del plano.

Para construir su Geometría Riemann tuvo que modificar el sistema de axiomas de Euclides y proponer la negación del V Postulado de modo que por un punto exterior a una recta no pasan paralelas. El método analítico que utilizó Riemann para enfocar los problemas geométricos, le permitió generalizar el concepto de curvatura de una vez al caso multidimensional. La idea esencial de Riemann es que la Geometría no constituye de ninguna manera un patrimonio exclusivo de un conjunto de dos dimensiones (de una superficie) o de tres dimensiones (de un espacio). Se puede construir una Geometría de rectas, de círculos, de esferas, pero se puede ir mucho más lejos y construir una Geometría de un conjunto de colores, de un enjambre de partículas materiales, etc.

De esta forma se está en presencia de dos Geometrías antagónicas de las cuales una afirma la existencia de paralelas a una recta por un punto exterior y la otra niega dicha existencia. Sin embargo, se produce la síntesis dialéctica que, superando y conservando a la vez esos dos aspectos de la realidad geométrica, se llegó a una concepción nueva del espacio. Riemann con la introducción de una nueva concepción infinitesimal de la Geometría, permitió un desarrollo dialéctico de la noción de espacio, que es una verdadera síntesis dialéctica de dos nociones contradictorias.

Desde el punto de vista de Riemann se comprende que la cuestión de la no contradicción de las Geometrías No-Euclidianas no tiene sentido especial, siendo las reglas de cálculo las mismas si k es positivo, negativo o nulo, los tres espacios son contradictorios y no lo son a la vez. Pero estos tres tipos de espacios con k constante conservan el carácter general de homogeneidad del espacio euclidiano. Las Geometrías de esos espacios continúan siendo Geometría en el sentido de Klein, es decir, en el sentido de la teoría de grupos (Casanova, 1965). De manera que 80 años después del nacimiento de Lobatchevski, la no contradicción de la Geometría que él había creado prácticamente no se ponía en duda. El problema que le había ocupado toda su vida se encontraba del todo resuelto.

La aceptación de las Geometrías No-Euclidianas conllevaron ante todo a consideraciones metafísicas. Por ejemplo, F. Lange y O.Libman, seguidores de Kant, planteaban que las Geometrías No-Euclidiana eran una Geometría del mundo "en sí" y la euclidiana representaba la Geometría de las percepciones sensoriales, la Geometría del mundo "para nosotros".

El matemático inglés W.K.Clifford (1845-1879), planteaba que la Geometría del mundo real era No-Euclidiana y todo lo que ocurre en el mundo puede ser comprendido como determinada variación con la curvatura del espacio en una u otra de sus partes.

Gauss, Lobatchevski, Bólyai se pronunciaron contra las gnoseología apriorística y se apoyaron en la procedencia experimental de los conceptos geométricos. Con estas posiciones se pronunciaron más tarde Riemann, Helmholzt, Boltzman y Klein. Boltzman y Klein tomaron posiciones empiristas, pero su análisis era más subjetivo, haciendo énfasis en el lado psicológico. Sin embargo, los científicos de posiciones empiristas que trataron de justificar la existencia de las Geometría No-Euclidianas, relacionándolas con la experiencia, no obtuvieron resultados positivos.

De esta forma las posiciones neokantianas tomaron fuerza hasta inicio del siglo XX. El objetivo de estos fue compatibilizar los hechos de las Geometrías No-Euclidianas con la filosofía matemática de Kant. Entre los neokantianos se pueden citar a G. Cohen, A. Krautze, B. Russell, L. Nelson, P. Natorp y E. Cassirer. Los argumentos de los neokantianos pueden ser reducidos a las siguientes afirmaciones (Sánchez, 1987):

1. A Kant no se le debe ver en antagonismo con las Geometrías No-Euclidianas sino al contrario como una de sus antecesores teóricos, quien por primera vez formuló la misma idea de las Geometrías Superiores no coincidentes con la Geometría Euclidiana.

2. Las afirmaciones de Kant sobre la posibilidad de otros espacios y otras

formas de concepciones sensoriales no son casuales, ellas son el producto necesario de los principios de la filosofía.

3. Las Geometrías No-Euclidianas y la Euclidiana son equitativas desde el punto de vista matemático para la descripción de diferentes relaciones objetivas pero no desde el punto de vista psicológico, no se pueden construir nuevas concepciones intuitivas del espacio.

4. Los empiristas ignoran el hecho de que las teorías matemáticas no se demuestran y no se niegan en el experimento.

5. La posición empirista es contradictoria desde el punto de vista lógico.

En el momento actual está claro que los intentos neokantistas no podían ser exitosos. Pero a fines del siglo XIX la posición neokantiana parecía completamente válida. Los argumentos de los empiristas, aunque tuvieron aceptación dentro de los científicos, de ninguna forma pudieron ser suficientes para la guerra con ellos en la esfera teórica.

Otra tendencia fue la Convencionalista, desarrollada por Henri Poincaré (1854-1912), donde la experiencia juega un papel importante pero en última instancia lo que determina la veracidad es la sencillez y la comodidad. Esta posición de Poincaré, es idealista y no puede dar explicación a la existencia de las Geometrías No-Euclidianas. No obstante, gracias a las ideas de Poincaré se tomó una dirección más correcta que la de los empiristas y neokantistas. La idea fundamental necesaria para la comprensión contemporánea de la matemática, surge en el contexto de los trabajos de Dedekind, Cantor y Hilbert, los cuales se esforzaron por fundamentar la Geometría y las otras ciencias matemáticas partiendo de presupuestos lógicos (concepciones estructuralistas y formalistas).

Conclusiones

Resulta atinado plantear que aunque las Geometrías No Euclidianas han sido disminuidas en la contemporaneidad, en lo fundamental, por cuestiones Matemáticas teóricas asociadas a aspectos analítico-algebraicos, su surgimiento no sólo asombró a los contemporáneos, sino a las siguientes generaciones, a unos por lo excepcionalmente inesperado de los resultados y a otros por el profundo entusiasmo y sacrificio dedicado a la investigación incesante y el grado de independencia y audacia en el pensamiento creador.

Desde el punto de vista científico la visión de una nueva Geometría, permitió el avance revolucionario de la ciencia y especialmente de la Física del siglo XX. Así lo expresó Albert Einstein en su famoso discurso "*La Geometría y la Experiencia*" pronunciado en 1921 en la Academia de Berlín, cuando expresó: "*yo concedo importancia particular a esta compresión de la Geometría por cuanto* *sin ella yo ni hubiera podido establecer la teoría de la relatividad*". Desde el punto de vista metodológico, los axiomas dejaron de ser resultados evidentes que no necesitan demostración, para convertirse en aquellas proposiciones de la teoría, las cuales en una construcción determinada de la misma, se toman como punto de partida, independientemente de que sean simples, evidentes o intuitivamente claros para todos.

El surgimiento de las Geometrías No-Euclidianas, ratificó que contra los demoledores golpes de las profundas revoluciones, que sin piedad derrumban las "inexpugnables fortalezas" de las tradiciones, siempre se alzan "los gritos de los Beocianos", se alzan los timoratos, los que temen perder su acomodaticia posición. Pero es que las revoluciones también en la ciencia como en la sociedad, nada ni nadie las puede impedir (Sánchez, 1985). Desde el punto de vista filosófico, las Geometrías No-Euclidianas adquieren el mayor significado, pues su surgimiento favoreció el desarrollo de una de las más profundas revoluciones en las concepciones sobre los problemas filosóficos de la Matemática, en las representaciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático.

Es importante resaltar que las confirmaciones experimentales de la teoría general de la relatividad han demostrado que el espacio real tiene estructura Riemanniana y que la métrica euclidiana del espacio sólo se manifiesta en situaciones restringidas, donde las Geometrías Euclidiana y No-Euclidianas coinciden.

Bibliografía

BLUMENTHAL, L (1975): Geometría Axiomática. Ediciones Madrid S.A. España.

BONOLA, R. (1951): Geometrías No-Euclidianas. Espasa-Calpe Argentina S.A. Buenos Aires.

CASANOVA, G. (1965): La Matemática y el Materialismo Dialéctico. Editorial del Consejo Nacional de Universidades, La Habana.

EFÍMOV, N.V. (1984): Geometría Superior. Editorial Mir. Moscú.

ESTRADA, M. (1995): Surgimiento de la Geometría de Lobatchevski. Trabajo Final de Historia de la Matemática. Maestría en Didáctica de la Matemática. ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

FLORES, A. Y R. REGUERA. (1978): Geometría. Selección de Temas. Libros para la Educación. Ciudad de la Habana.

KAGAN, V. (1984): Lobatchevski. Editorial Científico Técnica. Ciudad de la Habana.

KONSTANTINOV, F. et al. (1978): Fundamentos de Filosofía Marxista Leninista (Parte 1). Materialismo Dialéctico. Editorial de Cirencias Sociales, La Habana.

RIVNÍKOV, K. (1987): Historia de las Matemáticas. Editorial Mir. Moscú.

SÁNCHEZ, C. (1987): Conferencias sobre Problemas Filosóficos y Metodológicos de la Matemática. Facultad de Superación en Ciencias Naturales. Universidad de la Habana. Ciudad de la Habana.
SÁNCHEZ, C. (1985): Discurso a la Memoria de un Genio Revolucionario: János Bólyai. En: Boletín de la SCM. Ciudad de la Habana.
SIGARRETA, J. M. (2003). Evolución de la resolución de problemas desde una perspectiva Didáctica. En Revista de Didáctica de la Matemática. México.
SMOGORZHEVSKI, A.S. (1978): Acerca de la Geometría de Lobatchevski. Editorial Mir. Moscú.
TURNBULL, H.W. (1984): Grandes Matemáticos. Editorial Científico Técnica. Ciudad de la Habana.
WUSSING, H. (1989): Conferencias sobre Historia de la Matemática. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

C. J. M. Sigarreta Almira & P. Ruesga Ramos
Departamento de Matemática
Universidad de Moa
Cuba

MATEMÁTICAS RECREATIVAS

π: la letra griega que los griegos no usaron

Douglas Jiménez

Así como *anecdotario* es el nombre que damos a una colección –escrita, o mantenida de cualquier otra forma– de anécdotas y *bestiario*, la palabra con la que reconocemos la colección de fábulas referentes a seres míticos o extraordinarios; creo que podemos sin temor denominar *absurdario* al conjunto de los hechos que nos llaman la atención por caer en terrenos en los que, no sin cierta pizca de humor negro, queda incómodamente confusa cualquier mente racional, por poderosa que sea su armazón lógica.

Los elementos que componen el absurdario podrían encontrarse dondequiera que se vea la actividad del Hombre. Se dice que Einstein afirmó: "Sólo hay dos cosas infinitas: el universo y la estupidez humana; de la primera no estoy tan seguro". Sin embargo, cuando se mezclan algunas de estas actividades parece haber una cierta tendencia a engrosar el volumen de la colección; por ejemplo, la mezcla de política con ciencia. Quizás con muy mala intención por parte de sus adversarios, se hizo correr la "anécdota" de que un concejal barquisimetano, ante la imposibilidad de hacer llegar agua a una población usando un sistema que violaba la ley de la gravedad, propuso sin ninguna mortificación derogar de inmediato tal impertinente ley.

En beneficio del personaje, y a pesar de su vistosa ignorancia, me atrevo a pensar que la anécdota es forzada. También creo que subraya maliciosamente nuestro subdesarrollo. Para incomodar a sus autores, puedo contar un hecho del absurdario que, aunque sucedió en 1897, tuvo lugar en los, ya para entonces, muy avanzados Estados Unidos. Se trata de que el Senado discutió, muy seriamente, un proyecto de ley destinado a fijar un valor oficial de la constante π, de hecho el valor $\pi = 3$, que coincide con lo establecido en la Biblia. Este proyecto de ley fue presentado por el senador Taylor Record, a instancias de un médico que respondía al nombre de Edwin Goodwin, quien se afirmaba descubridor de tal verdad, adeudada desde hacía mucho tiempo atrás a las sagradas escrituras.

No contentos con tan llamativa proposición, la propuesta N^o 246 –que así se identificó–, llevaba la encomienda de reservar este valor para el uso gratuito exclusivo del estado de Indiana y sus instituciones educativas, mas cualquier otro estado que pretendiera hacer uso de él debía pagar las correspondientes regalías. Uno de los argumentos que sostenía tan coloridas propuestas era el hecho de que el artículo, en el que el simpático Dr. Goodwin había escrito su "descubrimiento", salió publicado en el *American Mathematical Monthly*, la publicación matemática de mayor prestigio de los Estados Unidos. Se cuidaron, eso sí, de decir que la publicación llevaba esta nota: "Publicado por requerimiento del autor"; uno podría suponer que luego de este disparatado proceso, el AMM comenzó a aplicar el celo actual en la selección de sus artículos, que la hace hoy un punto de referencia universal en la divulgación del saber matemático.

El proceso supuso para los senadores la burla pública por parte de los periódicos locales. El orden fue recuperado por un matemático, C. A. Waldo, quien, aparentemente de forma accidental, asistió a los debates e informó a los legisladores del absurdo en el que habían caído. La propuesta se guardó para "discusión posterior". Por supuesto, nadie ha vuelto a reclamarla.

Esta arrancada con tono de chanza, viene por el camino de la disculpa, pues me siento forzado a advertir a los lectores que el título del artículo no es otra cosa que un fraude. Porque si nos atenemos a él, es de esperar encontrar en lo que viene referencias seguras a la notación usada por los matemáticos griegos o a cosas por el estilo. A donde quiero ir, sin embargo, es a otro lugar: la historia inicial de la famosa relación constante circunferencia/diámetro.

Sin embargo, para no hacer de esto una desilusión total, es saludable advertir que la letra π para indicar esta relación constante fue usada por vez primera por William Jones, en 1706. Antes de esto, las menciones a la constante o bien eran textuales explícitas, es decir "*relación constante circunferencia/diámetro*" o bien adoptaban formas como $\frac{\pi}{\delta}$, en las que π era la inicial de $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$ (circunferencia) y δ la de $\delta\iota\alpha\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$ (diámetro).

La iniciativa de Jones fue seguida (con o sin conocimiento de causa) por Euler, quien adopta el símbolo (y el propósito) de manera definitiva en 1748 en su *Introductio in analysin infinitorium* y publicaciones posteriores.

Entre algunas idas y venidas de otros escritores menos notables, Legendre le da carta de bienvenida al símbolo en sus *Elements de Geometrie*, el primer libro de texto elemental en el que π se usa con el significado que hoy tiene entre nosotros.

De todo lo anterior resalta con claridad un aspecto importante de la enseñanza de la historia de la matemática, que tiene que ver con el uso de símbolos modernos para referirse a descubrimientos antiguos. Por ejemplo, cuando se dice que Arquímedes descubrió que

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

quizá el primer sorprendido con tal afirmación sería el propio Arquímedes.[1] Sin embargo, quizás entendería mejor si traducimos la ecuación anterior diciendo que el triángulo parabólico (es decir la figura formada por dos lados de un cuadrado y una sección de parábola, incluyendo su vértice) cabe tres veces dentro del cuadrado.

[1]Este juego temporal es un poco perverso, pero sólo tiene sentido pedagógico.

Y esta nota nos queda como anillo al dedo para entrar en nuestra materia pues de lo que queremos hablar es de áreas y longitudes. En particular, para los matemáticos griegos antiguos, conseguir el área de una figura equivalía a comparar la figura con otra, como hizo Arquímedes con el triángulo parabólico y el cuadrado. De hecho, el cuadrado, la figura rectilínea perfecta por excelencia, se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación. De allí que la palabra "*cuadratura*" fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos cálculo del área.

Se puede expresar matemáticamente el problema anterior usando el siguiente enunciado: *Dada una figura cualquiera, construir un cuadrado que tenga su misma área.* Ahora bien, en este enunciado el verbo "construir" tiene un significado *sui generis*, que fue el que le dieron los propios griegos. Significa *construir con regla y compás* o, en otras palabras, mostrando un conjunto finito de rectas y circunferencias en cuyas intersecciones y segmentaciones aparezca el cuadrado buscado. Desconocer esta restricción ha sido (como bien me apunta Argimiro Arratia) fuente permanente de falsas concepciones y apoyo lunanco de los cuadradores del círculo, a quienes nombraremos varias veces en este artículo.

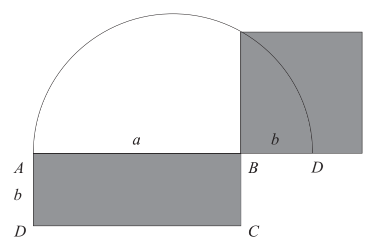

Figura 1: Cuadratura del rectángulo

Como es sabido, el conocimiento matemático de la Grecia antigua se gesta desde los tiempos de Tales y Pitágoras, pero la primera obra conocida que resume todo este trabajo son los famosos trece libros que Euclides, su autor, identificó como *Elementos*. Por esta razón cuando echemos mano a algún resultado conocido por los matemáticos griegos indicaremos en qué lugar de los *Elementos* puede encontrarse dicho resultado. Volviendo entonces al tema de las cuadraturas, el problema más sencillo de plantear es el de encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. La solución de este problema está en la proposición VI,13 (proposición 13 del sexto libro de los *Elementos*) en la que se muestra cómo construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos. La construcción en cuestión se ilustra en la figura 1 donde vemos una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia: el segmento así generado es el lado del cuadrado buscado.

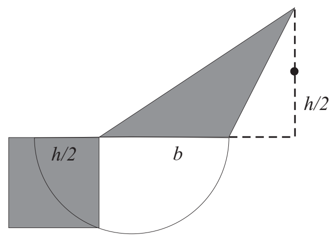

Figura 2: Cuadratura del triángulo

La cuadratura de un triángulo, por su parte, se sustenta en la proposición I,10 (*Dividir en dos partes iguales una recta finita dada*) y en la cuadratura anterior, pues bastaría prolongar la base del triángulo en la mitad de la altura del triángulo y tomar la media geométrica de estas dos cantidades como el lado del cuadrado buscado. (Figura 2.)

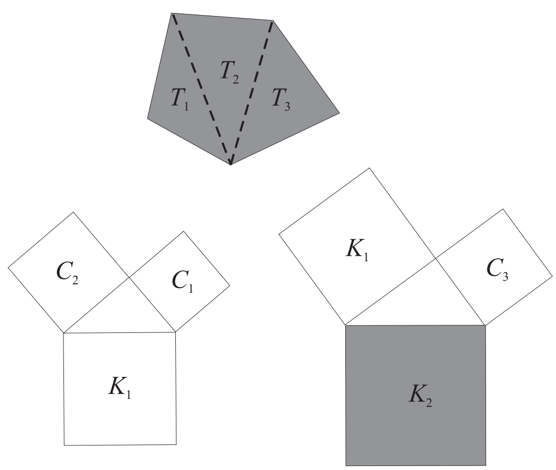

Figura 3: Cuadratura de polígonos

Con estas herramientas a la mano es sencillo cuadrar cualquier polígono por triangulación y aplicaciones repetidas del teorema de Pitágoras (proposición I,47 de los *Elementos*). Así, el polígono de la figura se descompone en los triángulos T_1, T_2 y T_3 cuyas cuadraturas producen los cuadrados C_1, C_2 y C_3 de lados c_1, c_2 y c_3, respectivamente. Una aplicación del teorema de Pitágoras nos da un cuadrado K_1 de área $c_1^2 + c_2^2$ y la siguiente el cuadrado K_2 de área $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$. (Figura 3.)

(Al margen: la construcción de los triángulos rectángulos exigidos se sustenta en las proposiciones I,2 y I,11. La primera permite construir segmentos de cualquier tamaño y la segunda, ángulos rectos en puntos dados de un segmento.)

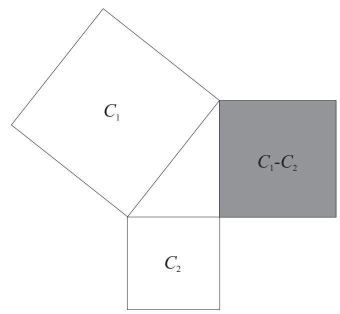

Figura 4: Diferencia de cuadrados

Dados dos cuadrados de diferentes áreas, puede construirse un cuadrado cuya área sea la diferencia entre las áreas de los cuadrados dados. Para ello, a diferencia del procedimiento usado con los polígonos que construye los cuadrados sobre las hipotenusas, en este caso el cuadrado "diferencia" se construye sobre un cateto, tal como se muestra en la figura 4. Evidentemente, este procedimiento permitiría cuadrar figuras que pueden obtenerse por "sustracción" como, por ejemplo, un trapecio isósceles.

Sin embargo, todos estos procedimientos sólo funcionan bien cuando se trata de cuadrar figuras poligonales, mas no para regiones cuya frontera es curva como por ejemplo, el círculo. En este sentido, hay un resultado recogido en los *Elementos* que es clave en todo este asunto: la proposición XII,2: *Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros*. En el lenguaje moderno, si C_i es el área de un círculo i de diámetro d_i, entonces[2]

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

independientemente de los círculos C_1 y C_2.

La proposición anterior, que hoy la expresamos como $A = \pi r^2$, está demostrada en los *Elementos* con una base teórica provista por uno de los mejores discípulos de Platón, el matemático Eudoxo. Se conoce como *método de exhaución* y es uno de los antecedentes del moderno cálculo integral. La demostración procede por comparación del área del círculo con las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos y el análisis de las pequeñas diferencias entre

[2]Usaremos C_i como el área del círculo o, a veces, como el círculo mismo. El contexto nos ayudará. Lo mismo haremos con otras figuras, sean o no circulares.

estas áreas, que se reducen al aumentar el número de lados de los polígonos. Sin embargo, demostraciones como éstas, basadas en procesos que potencialmente estamos en capacidad de repetir cuantas veces deseemos, es decir lo que hoy llamamos procesos infinitos, mostraban la dificultad de conseguir la cuadratura del círculo y retaban a los espíritus inquisidores.

(Por cierto, se supone que la constancia de la razón circunferencia/diámetro fue demostrada con el uso de este método mas, hasta donde llegan mis averiguaciones, no existe verificación escrita de tal demostración, al punto de no aparecer en ningún lugar de los *Elementos*. Sin embargo, como tendremos oportunidad de ver más adelante, se usaba con entera libertad y confianza, lo que hace suponer, tomando en cuenta la minuciosidad y acuciosidad de los matemáticos griegos antiguos, que tal demostración gozaba de cierta difusión.)

La proposición XII,2 de Euclides se atribuye a un matemático del siglo V a.C. que tiene el mismo nombre de un también famoso médico griego: Hipócrates. El nuestro (el matemático) era originario de la isla de Chios y fue el primero que, motivado por la imposibilidad de conseguir la cuadratura del círculo,

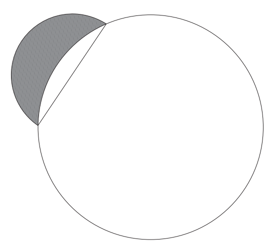

Figura 5: Lúnula

llevó las soluciones de cuadraturas más allá de las figuras con fronteras poligonales. Hipócrates logró cuadrar una figura que conocemos como *lúnula* y que mostramos en la figura 5.

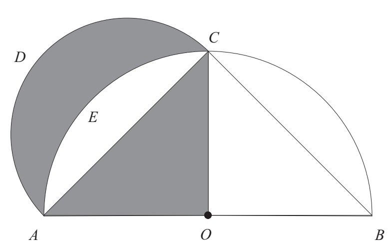

Figura 6: Lúnula de Hipócrates

Hipócrates comprobó que es posible cuadrar lúnulas como, por ejemplo, la mostrada en la figura 6 en donde el triángulo $\triangle AOC$ es recto en O, el cual es el centro de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Podemos seguir, con nuestras notaciones actuales, la esencia de la demostración de Hipócrates. Antes de ello, es bueno acotar que las herramientas que necesitó Hipócrates para su demostración las recogió Euclides de la siguiente manera:

Proposición I,47 Teorema de Pitágoras.

Proposición III,31 *En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto.* Es decir: el ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Proposición XII,2 *Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.*

A continuación, la demostración. Usaremos la siguiente nomenclatura:

Γ: semicírculo ADC

Θ: semicírculo ACB

Υ: cuadrante AOC

Ω: región entre el arco AEC y la cuerda $\overline{AC}$

Por III,31 y I,47,

$$(AC)^2 = \frac{1}{2}(AB)^2 \tag{1}$$

Por (1) y XII,2

$$\frac{\Gamma}{\Theta} = \frac{1}{2}$$

Lo que conduce a que $\Gamma = \Upsilon$.

Por otra parte, de

$$\Lambda = \Gamma - \Omega \qquad \text{y} \qquad (\triangle AOC) = \Upsilon - \Omega,$$

se deduce directamente que

$$\Lambda = (\triangle AOC).$$

Dado que el triángulo es una figura cuadrable, este resultado garantiza por transitividad que la lúnula también lo es.

La lúnula es una figura cuya construcción es más difícil que la del círculo, lo que hace pensar, a partir de este éxito hipocrático, que si la primera es cuadrable debe serlo el segundo. Sin embargo, sabemos que las cosas no eran tan fáciles, aunque desde esa misma época comenzaron a aparecer los *cuadradores de círculo*, especie humana caracterizada por una extraordinaria persistencia aún en las condiciones más adversas para ellos. Esta frase identifica a todos y cada uno de los particulares personajes que han creído tener (y, algunos, defendido hasta extremos absurdos[3]) una demostración de la cuadratura del círculo. Se comenta, aunque sin la base histórica necesaria para aceptar el comentario con

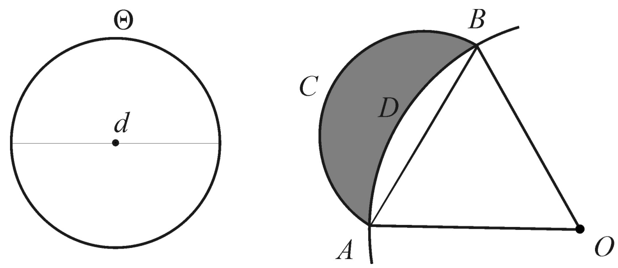

Figura 7: "Cuadratura" del círculo

alguna seguridad, que uno de los primeros cuadradores del círculo fue el propio Hipócrates. La "demostración" que se le adjudica está basada en la construcción de una lúnula sustentada en uno de los lados de un hexágono regular inscrito en un círculo. Como todos sabemos (o podemos deducir), el lado de tal hexágono es igual al radio del círculo. La pretendida demostración puede seguirse con la ayuda de la figura 7.

Sea Θ un círculo de diámetro d y construyamos, usando el lema anterior, el hexágono regular inscrito en el círculo de radio d y centro O, uno de cuyos lados se muestra en la figura 7, lado que se tomó de base para construir la lúnula $ADBC$, que identificaremos con la letra Λ. Si Υ representa al semicírculo ABC, es claro que $\Theta = 2\Upsilon$, por lo cual, si es posible cuadrar Υ también será posible cuadrar Θ.

Para fijar ideas, denominemos Γ al sector circular limitado por el ángulo $\angle AOB$ y el arco ADB. Entonces

$$(\triangle AOB) + \Upsilon = \Gamma + \Lambda.$$

También, por la proposición XII,2

$$\Gamma = \frac{2}{3}\Upsilon.$$

Por lo tanto

$$(\triangle AOB) + \Upsilon = \frac{2}{3}\Upsilon + \Lambda,$$

lo que conduce a

$$\Upsilon = 3[(\triangle AOB) - \Lambda].$$

[3]Como muestra, recuérdese al Dr. Goodwin, el promotor del proyecto de ley Nº 246.

En consecuencia, como tanto $\triangle AOB$ como Λ son cuadrables, se tiene que Υ lo es.

Una de las razones que lleva a dudar de la autoría de Hipócrates sobre esta "demostración", es que si fue lo suficientemente hábil como matemático para producir la proposición XII,2 de Euclides y cuadrar la lúnula construida sobre el lado del cuadrado inscrito, sería torpe de su parte no observar que la lúnula que se usa en el argumento presente está construida sobre el lado de un hexágono regular y por tanto no ha sido cuadrada, como se afirma en el razonamiento.

Pero seguir con los intentos de cuadrar el círculo –degollados de una vez por todas con la demostración de Lindemann en el siglo antepasado, (aunque, como los reptiles, mantienen el movimiento de la cola luego de muertos)– harían de éste un artículo triste. Por lo cual, parece más sensato orientarnos hacia los caminos en los que el estudio del círculo se tornó productivo e inspirador. Sin duda que en este aspecto quien recoge los mas cerrados aplausos es Arquímedes, en particular con su pequeña obra *Medida del círculo*, de la que queremos comentar algunos puntos.

Sabiendo que hay una razón constante entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, así como también una razón constante entre el área de un círculo y el cuadrado de su diámetro, Arquímedes se interrogó sobre la relación entre estas dos constantes. Manteniendo la línea de pensamiento griego orientada

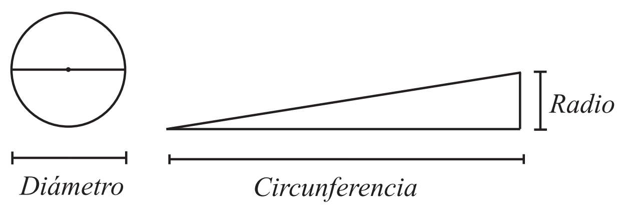

Figura 8: Fórmula $A = \pi r^2$

hacia la comparación de figuras, Arquímedes demuestra que cualquier círculo "es igual" (es decir, tiene la misma área) que un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo y el otro igual a la circunferencia del círculo, como se muestra en la figura 8. La demostración de esta equivalencia es una joya intelectual tallada con dos herramientas que el analista de hoy maneja con soltura, pero que para la época en que fueron aplicadas significaron un salto intelectual de magnitud incalculable.

La primera de estas herramientas se puede formular así: si una serie de pasos consecutivos lleva a un límite, entonces la diferencia entre el límite y alguno de los pasos puede hacerse todo lo pequeña que uno quiera. Por ejemplo, si representamos el área de un círculo por C, por a_n el área del polígono regular de n lados inscrito en el círculo y por A_n el área del polígono regular circunscrito, entonces dado un número positivo ε por pequeño que sea, siempre se encontrarán valores de n para los que $C - a_n < \varepsilon$ y $A_n - C < \varepsilon$.

La otra herramienta la conocemos como *tricotomía* y establece que dados dos números cualesquiera a y b (hoy por supuesto, aclaramos que se habla de números reales, en los tiempos de Arquímedes no había otros), una y sólo una de las tres proposiciones siguientes puede ser verdadera:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b.$$

La demostración arquimediana está basada justamente en que entre el círculo y el triángulo rectángulo de la figura 8 la primera y la última proposiciones son imposibles. El razonamiento es una exposición magistral del método de reducción al absurdo, que para los antiguos griegos era una forma predilecta de razonamiento; en este caso se trata de dos reducciones al absurdo. Antes de proseguir, recordamos que el área de un polígono regular de n lados se calcula por la fórmula $A_n = \dfrac{1}{2}P_nH_n$, en donde P_n representa el perímetro del polígono y H_n la apotema, esto es, la distancia desde el centro del polígono hasta cualquiera de los lados del mismo.[4] Denotemos también por c la longitud de la circunferencia y por R el área del triángulo rectángulo de la figura 8.

Supongamos primero que $C > R$, es decir, $C - R > 0$. Entonces, existe a_n tal que $C - a_n < C - R$, de donde $R < a_n$. Ahora bien, el perímetro p_n del polígono inscrito es menor que c, la longitud de la circunferencia del círculo y su apotema h_n es menor que el radio. (Ver figura 9.) Luego $a_n = \frac{1}{2}p_nh_n < \frac{1}{2}cr = R$, lo cual significa una contradicción.

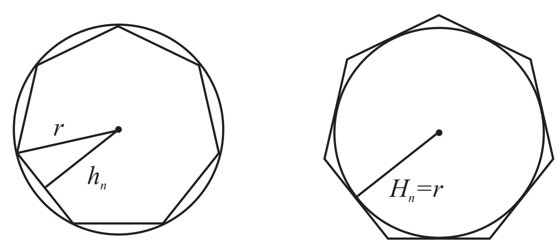

Figura 9: Polígonos inscritos y circunscritos

Por otra parte, si suponemos que $C < R$ se tiene que $R - C > 0$. Por lo tanto, existe A_n tal que $A_n - C > R - C$, es decir, $A_n > R$. Pero el perímetro P_n del polígono circunscrito es mayor que c, la longitud de la circunferencia y su apotema H_n es igual al radio del círculo (ver figura 9), por lo cual $A_n = \frac{1}{2}P_nH_n > \frac{1}{2}cr = R$, lo que también es contradictorio.

[4]Hemos usado la notación correspondiente a los polígonos circunscritos pero, en general, se aplica a cualquier polígono.

La posteridad llamó π a la razón constante circunferencia/diámetro, es decir, si c es la circunferencia de un círculo y d su diámetro debe tenerse $c = \pi d$. Hipócrates (se supone) demostró que hay una razón constante entre el área del círculo y el cuadrado de su diámetro, proposición que Euclides recogió en su proposición 2 del libro XII. Esto es, si C es el área de un círculo de diámetro d entonces $C = kd^2$, donde k es la constante de la proposición hipocrática. Arquímedes entonces logra, con la proposición que analizamos arriba, establecer la relación entre estas constantes.

Porque si el triángulo rectángulo tiene como catetos la circunferencia y el radio del círculo entonces su área es

$$R = \frac{1}{2}(\pi d)r = \frac{1}{2}\pi d \cdot \frac{1}{2}d = \frac{1}{4}\pi d^2.$$

Pero como $R = C$, esto significa que $k = \dfrac{1}{4}\pi$. Lo que, en resumen se traduce en la forma

$$c = 2\pi r, \qquad C = \pi r^2,$$

que es como las manejamos usualmente hoy en día.

Medida del círculo es uno de esos libros que pueden compararse a un joyero: lo pequeño de su tamaño no da la medida del valor que lleva en su interior. Si la joya anterior no bastara podemos apreciar otra: la determinación del valor

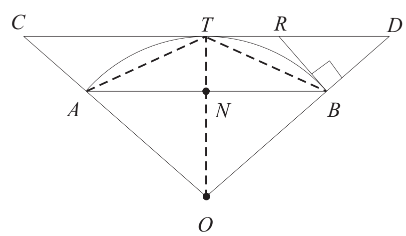

Figura 10: Determinación del valor de π

de π dentro de un intervalo de longitud $\dfrac{1}{497}$. Veamos los detalles, apoyándonos en la figura 10.

La proposición III,36 de Euclides establece: *Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta el círculo y la otra lo toca, el rectángulo (comprendido) por la secante entera y la (parte) exterior tomada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.* Esta proposición establece lo que hoy conocemos con el nombre de *potencia de un punto respecto a una circunferencia*, pero para el objetivo presente es importante porque nos permite establecer un rápido corolario: *los* *dos segmentos trazados desde un punto exterior de una circunferencia tangentes a la misma tienen igual longitud.*

El arco ATB está subtendido por el lado $\overline{AB}$ del n–gono regular inscrito en la circunferencia de centro O y radio OA; por su parte, $\overline{CD}$ es el lado (paralelo a $\overline{AB}$) del n–gono regular circunscrito y T es el punto de tangencia de este lado con la circunferencia. El punto N es el corte entre $\overline{OT}$ y $\overline{AB}$.

Es claro entonces que las líneas punteadas $\overline{AT}$ y $\overline{TB}$ son los lados del $2n$–gono regular inscrito en la circunferencia. Nos ayudará la línea auxiliar $\overline{BR}$, tangente a la circunferencia en B, con R situado sobre $\overline{TD}$; este segmento es la mitad del lado del $2n$-gono circunscrito y, por el corolario a III,36 se tiene que $TR = BR$.

Como anteriormente, denotaremos con P_n el perímetro del polígono regular circunscrito de n lados, y con p_n el perímetro del polígono regular inscrito. Haremos un par de afirmaciones que se refieren a las líneas del dibujo de la figura 10.

TR es media armónica entre TD y NB; es decir,

$$\frac{1}{TR} = \frac{1}{TD} + \frac{1}{NB}.$$

Veamos. La semejanza $\triangle DBR \sim \triangle DTO$ lleva a la proporción

$$\frac{RB}{TD - TR} = \frac{OT}{OD}.$$

De la misma forma, la semejanza $\triangle DTO \sim \triangle BNO$ produce la proporción

$$\frac{NB}{TD} = \frac{OB}{OD},$$

y ambas proporciones conducen a

$$\frac{TR}{TD - TR} = \frac{NB}{TD},$$

que es, en esencia, el resultado buscado.

TB es la media geométrica entre AB y TR, es decir

$$\frac{AB}{TB} = \frac{TB}{TR}.$$

La misma proporción sugiere la semejanza de triángulos que hay que establecer.

Finalmente, la afirmación principal es: La mitad de P_{2n} es la media armónica entre P_n y p_n, mientras que p_{2n} es la media geométrica entre P_{2n} y p_n.

En efecto:

$$P_n = 2nTD; \qquad p_n = nAB = 2nNB$$

$$P_{2n} = 2n(2BR) = 4nTR; \qquad p_{2n} = 2nTB$$

Es decir:

$$TD = \frac{P_n}{2n}; \qquad NB = \frac{p_n}{2n}$$

$$AB = \frac{p_n}{n}; \qquad TB = \frac{p_{2n}}{2n}$$

Por la relación de media armónica ya descrita:

$$\frac{2}{P_{2n}} = \frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n},$$

y, por la relación de media geométrica

$$\frac{P_{2n}}{p_{2n}} = \frac{p_{2n}}{p_n}, \quad c.q.d.$$

Las igualdades con las que remata la demostración anterior pueden escribirse en la forma

$$P_{2n} = \frac{2P_n p_n}{P_n + p_n} \qquad \text{y} \qquad p_{2n} = \sqrt{P_{2n}p_n},$$

las que definen relaciones de recurrencia que facilitan el cálculo. Por ejemplo, si $n = 6$ estamos partiendo de un hexágono regular para el cual es fácil ver que $P_6 = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9282$ y $p_6 = 6$ (tomando la circunferencia de radio 1). La aplicación de la recurrencia da:

$$\begin{array}{ll} P_{12} = 6{,}43078; & p_{12} = 6{,}21166 \\ P_{24} = 6{,}31932; & p_{24} = 6{,}26526 \\ P_{48} = 6{,}29217; & p_{48} = 6{,}2787 \\ P_{96} = 6{,}28543; & p_{96} = 6{,}28206 \end{array}$$

lo que significa aproximaciones para π por exceso de 3,14271 y por defecto de 3,14103.

Arquímedes, sin embargo, carente de un sistema de numeración adecuado no procedió en la forma anterior. De hecho, inicia el cálculo con la aproximación

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{380},$$

y en cada paso del cálculo apela a una sorprendente aproximación racional de este tipo, para llegar al polígono de 96 lados obteniendo

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}.$$

Cualquier jovencito que haya aprendido a programar computadoras, podría escribir un programa que realice los cálculos de Arquímedes en apenas segundos. Si se le pidiera hacerlos sólo con una calculadora operacional (es decir, sin capacidad de programación), es posible que exprese alguna queja. Pero si se le despoja de este instrumento y se le deja nada más con lápiz y papel, sólo si es muy valiente aceptará el reto. Sin embargo, dispone para ello del sistema posicional decimal, es decir, el sistema que usamos para escribir nuestros números y operar con ellos en las disposiciones tabulares que nos enseñaron en la primaria. Imagina, entonces, lector que nuestro joven carece de todas estas herramientas facilitadoras del cálculo y déjale nada más la posibilidad de representar los números (enteros y fraccionarios) con las letras de su alfabeto, en una forma parecida a como nos enseñaron que hacían los romanos. Si logras situarte, te alejarás de aquellos que se han preguntado por qué Arquímedes dejó las cosas en el polígono de 96 lados. Más todavía, sabiendo que sustituyó algunos números irracionales por aproximaciones racionales, cuya motivación no está clara aún hoy a pesar del reconocimiento de su justeza. Este trabajo debió haberle consumido horas y horas de ardua labor. Ergo, antes de criticarlo debemos considerar heroico su intento.

De cualquier manera, –de hecho, seguro que sin proponérselo– Arquímedes inaugura un deporte que hoy, con el advenimiento y mejoras constantes de las grandes computadoras, llega a extremos asombrosos: la cacería de dígitos de π. Desde el renacimiento se comenzó a tratar de mejorar el algoritmo arquimediano, lográndose fórmulas en forma de series y productos infinitos cada vez más sorprendentes como, por ejemplo, la fórmula de Vietà o el algoritmo de Snell, hasta el siglo XX en el que conocemos las mágicas fórmulas de Srinivasa Ramanujan.

Innumerables calculistas se armaron con estas fórmulas maravillosas y se dieron a la tarea de buscar dígitos y más dígitos decimales del número que nos ocupa. Primero unas cuantas decenas, luego cientos, algunos se atrevieron a miles. Pero la computación mecánica los envalentonó aún más y hoy llegan a billones las cifras registradas. Algunos, como los hermanos Chudnovsky, construyen sus propias supercomputadoras fabricando más y más cifras de π en espera, dicen ellos, de descifrar posibles patrones en esta compleja y, posiblemente aleatoria, estructura decimal. Quizás, como en la película *Pi* del cineasta norteamericano Darren Aronofsky, estén buscando el número de 216 cifras que contiene el nombre de Dios. ¿ Llegarán a algún lado? Si hay tales regularidades, ¿quién dice que no están en la representación de π en base 2, o en base a un número primo aún no descubierto?

En todo caso, la magia del número π trasciende los intentos de quienes han querido encerrarlo en callejones numéricos y, al igual, que Petr Beckmann, uno se pregunta por qué no hay el mismo alboroto alrededor de la expansión decimal de $\sqrt{2}$ o de $\operatorname{sen} 1^{\circ}$, que también son números irracionales. Quizá la respuesta tenga que ver con el hecho de que π está asociado a la figura de mayor simetría y perfección que pueda concebirse en geometría: el círculo. Entonces, con indulgencia podemos pensar que, al igual que Max el protagonista de *Pi*, los cazadores de cifras sólo quieren encontrar algo de orden en el caos.

Douglas Jiménez
Universidad Nacional Experimental Politécnica
"Antonio José de Sucre". Venezuela
dougjim@cantv.net; djimenez@bqto.unexpo.edu.ve

INFORMACIÓN NACIONAL

Acta de la Asamblea de la AMV
Universidad de Los Andes.
Núcleo Universitario "Rafael Rangel"
Trujillo, 1 abril 2004

AGENDA

1. Informe del Presidente de la AMV.
2. Finanzas de la AMV.
3. Boletín de la AMV.
4. Reglamento de la AMV.
5. Criterios PPI convocatoria 2004. (punto solicitado por O. Araujo)
6. Jornadas 2005
7. Información TForMa.
8. Varios

Respecto a los puntos de la agenda:

1. El Presidente de la AMV informó sobre los avances y tareas pendientes para la regularización de la situación legal y administrativa de la AMV. Resalto la redacción del reglamento de la AMV que ayudará en este proceso.

Informó sobre el Encuentro de Sociedades Latinoamericanas de Matemáticas convocado por la Real Sociedad Matemática Española RESME realizado en Santiago de Compostela en septiembre de 2003 donde se creó una red entre las sociedades latinoamericanas de Matemáticas.

También se informó sobre el II Congreso Latinoamericano de Matemáticas que se realizará en Cancún México del 21 al 26 de junio del 2004.

Se planteó la necesidad de hacer una recenso de los miembros por capítulo así como una "batida" para la inscripción de nuevos miembros.

2. Sobre las finanzas de la AMV se discutió sobre lo "precario" de las mismas y la necesidad de cobrar las cuotas anuales, de la obligación de lo capítulos de "cotizar" para los gastos centrales como son el Boletín y el pago de las cuotas de la IMU y de UMALCA.

Se informó que gracias a una gestión "heroica" de Eduardo Lima de Sá ante CADIVI se logró poner al día el pago de la cuota de la IMU. Sin embargo respecto a la cuota de UMALCA seguimos "históricamente" morosos.

La Asamblea acordó elevar la cuota anual a Bs. 30.000

3. Sobre el Boletín de la AMV la Asamblea tuvo una extensa discusión. Las resoluciones de dicha discusión fueron las siguientes:
i) Se ratificaron los objetivos del Boletín (que aparecen expresamente en la contratapa).
ii) Se acordó revisar el funcionamiento del comité editorial. Se propone la idea de nombrar editores de campos para organizar las actividades de arbitraje de artículos.
iii) Buscar financiamiento institucional tipo CDCH y FONACIT.
iv) Publicar en el Boletín la memoria y cuenta de la directiva de la AMV así como también los informes de los capítulos.

4. Sobre el proyecto de reglamento presentado:

- Se decidió dar una aprobación en principio del proyecto de reglamento presentado por Oswaldo Araujo, Neptalí Romero y Wilfredo Urbina, que ya ha sido discutido por los secretarios generales . El mismo se hará llegar a todos los miembros de la AMV para su conocimiento y discusión.

- Se aprobó abrir un período, del 02/04 al 15/12/04., de revisión de los estatutos.

- Se nombró una comisión integrada por Wilfredo Urbina, Neptalí Romero, Ramón Gómez, Joaquín Ortega y Oswaldo Araujo que recibiran todas las observaciones individuales y de los capítulos , las procesaran a partir de enero del 2005 y presentarán una versión definitiva del Reglamento en las próximas Jornadas.

A objeto de regularizar los Consejos Directivos Regionales (CDR) de la AMV se acordó:

- Cada CDR deberá designar antes del 30 de Abril de 2004 la correspondiente CEC para realizar el proceso eleccionario del Capítulo.Los procesos eleccionarios en cada Capítulo se deberán realizar antes del 30 de Junio de 2004.

- Los nuevos CDR tomarán posesión de sus cargos en el mes de Julio de 2004. En dicho acto, el Secretario General saliente hará entrega del informe de su gestión; además, entregará los libros de actas, finanzas y de inventarios del Capítulo correspondiente.

-A objeto de regularizar el Consejo Directivo Nacional, el Presidente de la AMV convocará a los Secretarios Generales electos de los diferentes Capítulos a una reunión extraordinaria que se realizará en la ciudad de Mérida durante la realización de la XVII Escuela Venezolana de Matemáticas. Esta reunión tendrá en sus objetivos:

- Recibir de parte del Presidente de la AMV, el informe de su gestión; así como los libros de actas, finanzas y de inventario de la AMV.

- Elegir el nuevo Presidente de la AMV.

5. Criterios PPI
Oswaldo informó que en su reunión del 15/03/04 la Comisión de Ciencias Físicas, Matemáticas y Químicas (CCFMQ) del PPI, nombró una comisión

integrada por Raúl Naulín, Víctor Padrón y Oswaldo Araujo con la finalidad de que, en base a la lista de publicaciones del Mathematical Reviews, le presente una lista de publicaciones estrellas para complementar la lista de revistas de Matemáticas que aparecen en el SCI. Esta lista junto con las de SCI conformarían las Publicaciones estrellas en la Convocatoria del 2004 del PPI

7. Diomedes Bárcenas, coordinador nacional del TForMA, informo la realización del V TForMA en las instalaciones de la Facultad de Ciencias de LUZ del 26 al 31 de Julio. Se dictará 9 cursos para estudiantes del pregrado.

8. Se acordó enviar una carta de felicitación a Carlos Di Prisco por su incorporación como individuo de número a la Academia de Ciencias Físicas Naturales y Exactas.

INFORMACIÓN INTERNACIONAL

La Esquina Olímpica

Rafael Sánchez Lamoneda

En el número pasado dejamos la incógnita sobre la actuación de nuestros estudiantes en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria, OIMU. Para el momento de escribir esta nota ya sabemos los resultados y ellos junto con la excelente actuación de la delegación venezolana en la VI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, IV OMCC, celebrada en Managua, del 7 al 12 de Junio, son el centro de nuestra nota.

En la OIMU, ganamos dos medallas de plata y una de bronce, los ganadores fueron David Segui (plata, USB), Adolfo Rodríguez (plata, UCV) y Héctor Chang (bronce, USB). Si bien los resultados son halagadores, la participación de los estudiantes de nuestras licenciaturas está lejos de tener la importancia que nuestra comunidad matemática tiene en la región. Ha sido muy difícil motivar a los estudiantes de la carrera de matemáticas de las diversas universidades del país, a tomar parte en este evento, una especie de miedo e inseguridad parece ser la constante. Sería interesante reflexionar sobre esta conducta, pues aún los mejores estudiantes, se niegan a participar. Me parece muy importante señalar que los jóvenes ganadores son todos estudiantes con experiencia previa en olimpiadas matemáticas internacionales manteniendo su entusiasmo e interés por tomar parte en este tipo de competencias. Una información completa sobre la OIMU la pueden obtener visitando el sitio de internet de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM, `http://ares.unimet.edu.ve/matematica/acm` .

En relación a la VI OMCC la actuación de nuestros estudiantes fue muy buena. Participamos con tres estudiantes, Tamara Mendt, Roland Hablutzel y Andrés Guzmán y como profesores asistieron dos exolímpicos, Héctor Chang, Jefe de Delegación y Adolfo Rodríguez, Tutor. Los premios obtenidos fueron los siguientes:

- Tamara Mendt. Medalla de Plata.
- Roland Hablutzel. Medalla de Bronce.
- Andrés Guzmán. Mención Honorífica.

Además Tamara Mendt obtuvo el primer premio en la competencia por equipos y la delegación ganó la Copa El Salvador, trofeo que se otorga al país de mayor progreso en tres años consecutivos. La participación de Venezuela fue posible gracias al aporte de varias empresas e instituciones, a saber, CANTV, Banesco, UCV, USB, Asociación Cultural del Colegio Emil Friedman, Acumuladores Duncan, CA, Institutos Educacionales Asociados y Humana, institución que por cuarto año consecutivo prepara psicológicamente a nuestras delegaciones.

Los próximos eventos internacionales son la 45^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, IMO, en Atenas, Grecia, del 6 al 18 de Julio y la XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, OIM, en Castellón, España del 18 al 26 de Septiembre. El equipo de la IMO está integrado por dos estudiantes, Leonardo Urbina y Rodrigo Ipince y dos profesores, Tomás Kabbabe, tutor, (USB) y Rafael Sánchez, Jefe de la delegación, (UCV). En Agosto, después de varios exámenes, seleccionaremos a los estudiantes que participarán en la OIM.

En la escena nacional destacamos la realización de la Olimpiada Recreativa de Matemáticas y la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, entre ambos eventos participaron 22.000 estudiantes desde 3^o de Educación Básica hasta el 2^o año de Educación Media y Diversificada. La competencia se llevó a cabo en 13 ciudades del país con el auxilio de profesores de casi todas las Escuelas y Departamentos de Matemáticas y constó de tres exámenes, el Concurso Canguro Matemático como prueba preliminar, una final regional y una final nacional. Se puede ver la información completa en nuestra página web. La meta es llegar a tener una competencia nacional que abarque todas las regiones del país y así poder llevar los beneficios de este programa a una gran cantidad de estudiantes.

Terminamos esta reseña con los exámenes de la VI OMCC, que los disfruten.

VI Olimpiada Matemática de Centroamerica y el Caribe

Managua, Nicaragua

8 de Junio de 2004

Primer Día

Problema 1

En una pizarra se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos jugadores A y B juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. A juega primero.

Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia.

`Nota:` Un jugador tiene una estrategia ganadora si puede garantizar su victoria, sin importar como juegue su rival.

Problema 2

Se define una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ de la siguiente manera: $a_0 = a_1 = 1$ y para $k \geq 2$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + 1$.

Determinar cuántos enteros entre 1 y 2004 se pueden expresar de la forma $a_m + a_n$ con m y n enteros positivos y $m \neq n$.

Problema 3

Sea ABC un triángulo. Sean E y F puntos en los segmentos BC y CA respectivamente, tales que $\frac{CE}{CB} + \frac{CF}{CA} = 1$ y $\angle CEF = \angle CAB$. Sean M el punto medio del segmento EF y G el punto de corte de la recta CM con el segmento AB. Demostrar que el triángulo FEG es semejante al triángulo ABC.

Duración de la prueba: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

VI Olimpiada Matemática de Centroamerica y el Caribe

Managua, Nicaragua

9 de Junio de 2004

Segundo Día

Problema 4

Se tiene un tablero cuadriculado de 10×10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama *lado frontera* si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero. Justificar las respuestas.

Problema 5

Sea $ABCD$ un trapecio tal que $AB \parallel CD$ y $AB + CD = AD$. Sea P el punto sobre AD tal que $AP = AB$ y $PD = CD$.

a) Demostrar que la medida de $\angle BPC = 90^\circ$.

b) Sea Q el punto medio de BC y R el punto de corte de la recta AD y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.

Problema 6

Con perlas de diversos colores se forman collares.

Se dice que un collar es *primo* si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre si.

Sean n y q enteros positivos. Demostrar que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos con n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.

`Nota:` Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas, y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

Duración de la prueba: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema vale 7 puntos.

Escuela de Matemáticas
Universidad Central de Venezuela,
Venezuela
rsanchez@euler.ciens.ucv.ve

LIBROS

Fórmulas Elegantes: Grandes ecuaciones de la Ciencia Moderna
Graham Farmelo (ed.), Tusquets Editores, Barcelona, 2004. ISBN: 84-8310-940-9

Reseñado por Argimiro Arratia

En su *Apología de un Matemático*, G. H. Hardy manifiesta la importancia de la estética en las matemáticas del siguiente modo:

> "*Los modelos de un matemático, al igual que los de un pintor o un poeta, deben ser hermosos; las ideas, como los colores o las palabras, deben ensamblarse de una forma armoniosa. La belleza es la primera señal, pues en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas feas*".

Esta premisa de Hardy ha estado detrás de los más perdurables en la historia y mejores resultados de la matemática, y es lo que sin duda guía la elección de temas hecha por los autores del libro cuya lectura recomendamos. *Fórmulas Elegantes* es una extraordinaria colección de doce ensayos escritos por doce extraordinarios científicos y divulgadores de la ciencia, dirigidos al lector no especializado y que, en efecto, cumple su objetivo de describir la belleza y la magia de las ecuaciones que fundamentan diversas teorías científicas del siglo XX.

Encuentro muchas lecciones valiosas en *Fórmulas Elegantes*; en particular descubrí distintos enfoques que guían la creación de una ecuación, su uso y significado dependiendo de la disciplina científica desde donde se la formula. Así, seis capítulos explican sendas ecuaciones de la física, las cuales constituyen una clase de ecuaciones basadas en la (¿común?) concepción galileana de las matemáticas como el idioma del universo y mediante el cual se expresan leyes que cuantifican los fenómenos naturales. Tenemos en este grupo la ecuación de Planck-Einstein para la energía del cuanto, cuya historia y significado explica Graham Farmelo (quien es el director de comunicación científica del Museo de Ciencias de Londres y profesor de Física en la Northeastern University); luego la muy popular $E = mc^2$, por Peter Galison (catedrático de Historia de la Ciencia y de la Física en Harvard); la ecuación de Einstein para la relatividad general, por Roger Penrose (catedrático de Matemáticas en Oxford y veterano divulgador científico); la ecuación de onda de Schrödinger, por Arthur I. Miller (profesor de Historia y Filosofía de la Ciencia en el University College de Londres); la ecuación de Dirac que, según el propio Dirac, "*es más inteligente que él*" porque no sólo describe el comportamiento del electrón, motivo que condujo a su formulación, sino también produjo resultados inesperados como la predicción de la existencia de la antimateria, presentada por Frank Wilczek (catedrático de Física en el MIT); y la ecuación de Yang–Mill, presentada por Christine Sutton (profesora de Matemáticas en Oxford), que sienta las bases de una teoría universal que intenta deducir *a la Newton* todos los fenómenos naturales a partir de las interacciones de fuerzas fundamentales, y cuya resolución rigurosa es uno de los "*Problemas del Milenio*" premiados por el Instituto Clay con un millón de dólares. En esta misma clase de ecuaciones concebidas como herramientas predictoras y cuantificadoras de la naturaleza, aunque en ámbitos distintos a la física, están las dos ecuaciones de Claude Shannon, que constituyen la base de la teoría de la información y dan una medida de la cantidad de información contenida en un mensaje y la calidad del medio de transmisión del mensaje, explicadas magistralmente por Igor Aleksander, profesor de Ingeniería de Sistemas Neuronales en el Imperial College, y las ecuaciones de Molina-Rowland, en química, que describen la destrucción de la capa de ozono por la acción de los clorofluorocarburos, explicadas por Aisling Irwin, premiado periodista científico.

Una segunda clase de ecuaciones, en esta taxonomía de fórmulas que propongo según la filosofia científica en acción, la constituyen dos capítulos en biología (uno sobre evolución, por John Maynard Smith, y el otro sobre caos en poblaciones, por Robert May), donde el aspecto cuantitativo no es la meta sino el *cualitativo*, ya que en palabras de Maynard Smith: "*Una razón por la que sólo cabe esperar predicciones cualitativas es que, en todo modelo concreto, obviamos demasiadas cosas [...] La respuesta [a por qué se excluye de un modelo algo que seguramente afecte el resultado final] es, en primer lugar, que si dejamos fuera algo verdaderamente importante, el modelo no hará las predicciones correctas, ni siquiera cualitativamente, y, en segundo lugar, que si tratásemos de incluirlo todo en un modelo, éste acabaría resultando inútil [...] Así pues, en biología sólo son útiles los modelos sencillos*". Una lección a tener en cuenta los matemáticos al incursionar en el oficio de los biólogos.

Finalmente, encontramos una tercera clase de ecuaciones constituida por aquellas concebidas no para cuantificar fenómenos o modelar comportamientos, sino como puro elemento retórico. Este es el caso de la ecuación de Drake, presentada por Oliver Morton, director de la revista *Wired*, quien nos dice que "*no es una ecuación para ser utilizada, sino para hablar sobre ella*". Y la discusión que pretendía motivar Frank Drake con su ecuación, en una reunión de radioastronomía en Green Bank (EEUU) en 1961, era la posibilidad de existencia de vida extraterrestre, mediante la estimación del número probable de civilizaciones emisoras de ondas de radio en la galaxia. Otra lección interesante sobre los usos, y tal vez abusos, de las matemáticas como soporte de cualquier teoría imaginable.

Concluye *Fórmulas Elegantes* con un capítulo de reflexiones por Steven

Weinberg, premio Nobel de Física 1979, sobre la naturaleza de las ecuaciones. Aqui sorprende descubrir la arbitrariedad de algunos de los criterios que se utilizaron para formular algunas de las muy famosas ecuaciones modernas. Por ejemplo, en la formulación de sus ecuaciones para la relatividad general, Einstein se ciñe a una "premisa *ad hoc* de simplicidad matemática" mediante la cual estas debían ser ecuaciones diferenciales parciales de orden a lo sumo dos, y en ninguna parte dió el celebrado físico explicación alguna al por qué adoptó tal premisa. Especulamos que, tal vez, para mantener su teoría dentro de los patrones de belleza exigidos por Hardy.

Fórmulas Elegantes es la traducción al castellano de la obra originalmente publicada en 2002 en inglés bajo el título *It Must be Beautiful: Great Equations of Modern Science*, y bienvenida sea en el mundo de la lectura hispana como una de esas joyas de divulgación científica que espero se popularice en todos los niveles de nuestra educación para todos alcanzar el conocimiento de las revoluciones científicas fundamentales del siglo XX.