Conservación de propiedades del anillo de polinomios y del anillo de series en la clase de los anillos de conductor finito

Nelsy González, Omaida Sepúlveda y Oswaldo Lezama

Resumen

En este artículo se analiza la conservación de propiedades del anillo de coeficientes R a los anillos de polinomios y series $R[x]$ y $R[[x]]$, respectivamente. Este estudio se realiza en la clase de los anillos de conductor finito, en particular se estudian propiedades como GCD, $G-GCD$, coherencia, cuasi coherencia y conductor finito.

ABSTRACT. In this paper is considered the preservation of properties of the ring of coefficients R to the rings $R[x]$ and $R[[x]]$, where $R[x]$ denotes the polynomials ring and $R[[x]]$ is the power series ring. This study is carry out in the context of finite conductor rings; in particular, properties like GCD, $G-GCD$, coherence, quasi coherence and finite conductor are analized.

1 INTRODUCCIÓN

Para un anillo conmutativo R se tiene que $R \subset R[x] \subset R[[x]]$, donde $R[x]$ es el anillo de polinomios y $R[[x]]$ el anillo de series. Hay propiedades de R que conserva tanto $R[x]$ como $R[[x]]$, pero algunas propiedades sólo las toma $R[x]$ ó $R[[x]]$: por ejemplo, es conocido que si R es un anillo local, $R[x]$ no es local y $R[[x]]$ es local. (Ver [19]). Así mismo, es conocido que si R es un anillo Noetheriano, entonces $R[x_1, ..., x_n]$ es un anillo Noetheriano, el mismo resultado se tiene para el anillo $R[[x]]$, por otro lado, se sabe que los anillos de polinomios y de series son un dominio de Prüfer si y sólo si los coeficientes están en un cuerpo y $n = 1$ (ver [22]). También, si R es un anillo coherente, $R[x]$ no es necesariamente un anillo coherente (ver [12]). Resulta entonces interesante estudiar la preservación de propiedades del anillo de coeficientes, al anillo de polinomios $R[x_1, ..., x_n]$ y al anillo de series $R[[x]]$. Dentro de las múltiples propiedades que pueden ser investigadas se encuentran aquellas que definen subclases de anillos en la colección de los dominios de conductor finito, y que en la actualidad son materia de investigación entre los expertos del área. En este sentido se deben destacar los trabajos recientes de Sarah Glaz (Universidad de Connecticut, Storrs, Estados Unidos) y de Daniel Anderson (Universidad de Iowa, Iowa, Estados Unidos), los cuales constituyeron la motivación para la realización del presente trabajo.

2 PRELIMINARES

Un dominio se dice que es de **conductor finito** si la intersección de dos ideales principales es un ideal finitamente generado. Entre las subclases de los dominios de conductor finito se encuentran los **dominios cuasi-coherentes**, en los cuales la intersección de un número finito de ideales principales es nuevamente un ideal finitamente generado. Como una subclase de estos últimos se encuentran los **dominios coherentes**, cuya particularidad radica en que la intersección de dos ideales finitamente generados es un ideal finitamente generado. Otra subclase especial de los dominios de conductor finito la conforman los llamados dominios **G-GCD**, los cuales requieren que la intersección de dos ideales enteros invertibles sea un ideal entero invertible. Estos dominios tienen como subclase a los dominios **GCD**, que son aquellos en los cuales cualquier par de elementos posee máximo común divisor ($m.c.d$). En general, propiedades como GCD, G-GCD, coherencia y conductor finito aparecen frecuentemente en la literatura, debido, a que como se mencionó antes, es de gran interés estudiar bajo qué condiciones estas propiedades son conservadas por los anillos $R[x]$ y $R[[x]]$. Por tal razón, uno de los propósitos de este trabajo es presentar el estudio de la preservación de estas propiedades.

Se adopta la notación y terminología que se encuentra en [8], [14] ó [17]. Los anillos considerados en este artículo son conmutativos con elemento unidad. Usualmente, o salvo que se especifique otra situación, R denota un dominio de integridad (DI) con cuerpo de fracciones K, $Spec\,(R)$ denota el espectro primo de R conformado por todos los ideales primos de R y $Max\,(R)$ el espectro maximal de R conformado por todos los ideales maximales de R. Además, si M es un $R-$módulo y $P \in Spec(R)$, entonces M_P denota la localización de M por el ideal primo P. R_P denota la localización de R por el ideal primo P, y $c(f)$ denota el ideal fraccionario generado por los coeficientes de f, con $f \in K[x]$.

Definición 2.1 *Sean I, J ideales fraccionarios de R. Se define el ideal $[I :_R J] = \{r \in R \mid rJ \subset I\}$, a este ideal se le suele denominar el ideal **conductor** de J en I.*

Definición 2.2 *Sea I un ideal fraccionario de R. Se define el conjunto* $\mathbf{I}^{-1}=[R:_K I]=\{x\in K \mid xI\subseteq R\}$.

En adelante se usará $[R:I]$ para denotar el cociente $[R:_K I]$.

Definición 2.3 *Un dominio de integridad R es llamado un **dominio de Prüfer** si cada ideal finitamente generado de R es invertible.*

En [22] se encuentra un estudio detallado de estos dominios, los cuales constituyen otra subclase importante de los dominios de conductor finito. Nótese que todo dominio de Prüfer es coherente. Una subclase importante de los dominios de Prüfer la conforman los dominios de Bézout. Hay que recordar que un dominio de integridad R es llamado un **dominio de Bézout** si cada ideal no nulo finitamente generado de R es principal.

Definición 2.4 *Un ideal fraccionario I de un dominio de integridad R se dice **divisorial** si es una intersección de ideales fraccionarios invertibles.*

El ideal fraccionario divisorial más pequeño que contiene a I se denota por I_v. Además, I_v es llamado la **clausura divisorial** de I.

Un ideal fracccionario I de R es un **v-ideal de tipo finito** si existe un ideal fraccionario finitamente generado J de R tal que $I=J_v$.

Proposición 2.5 *[8] Sea R un DI e I un ideal fraccionario de R.*

(i) El ideal $(I^{-1})^{-1}$ es la intersección de los ideales principales que contienen a I.

(ii) $I_v=(I^{-1})^{-1}$.

(iii) El ideal I es divisorial si y sólo si $I=I_v$.

Demostración: (i) Sea $\{\langle a_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ la familia de ideales fraccionarios principales de R que contienen a I, sea J la intersección de esta familia y sea I^{-1} el ideal $[R:I]$. Se debe concluir que $\left(I^{-1}\right)^{-1}=J$.

En efecto, sea $x\in\left(I^{-1}\right)^{-1}$ y $\lambda\in\Lambda$, entonces de $I\subseteq\langle a_\lambda\rangle$, se sigue que $a_\lambda^{-1}I\subseteq R$ y que $a_\lambda^{-1}\in I^{-1}$. Como $xI^{-1}\subseteq R$, entonces $xa_\lambda^{-1}\in R$ y así $x\in\langle a_\lambda\rangle$. En consecuencia, $\left(I^{-1}\right)^{-1}\subseteq J$.

Recíprocamente, si $x\notin\left(I^{-1}\right)^{-1}$, entonces $xI^{-1}\nsubseteq R$, esto es, existe $t\in I^{-1}$ tal que $xt\notin R$ y así $x\notin\left\langle t^{-1}\right\rangle$. Como $\langle t\rangle\subseteq I^{-1}$, entonces $I\subseteq\left\langle t^{-1}\right\rangle$. Por consiguiente, $x\notin J$.

(ii) Por la definición del ideal I_v se concluye que $I_v \subseteq \left(I^{-1}\right)^{-1}$. Ahora, si $x \in \left(I^{-1}\right)^{-1}$ y si J es un ideal fraccionario invertible tal que $I \subseteq J$, entonces $xI^{-1} \subseteq R$ y como $J^{-1} \subseteq I^{-1}$, se tiene que $xJ^{-1} \subseteq R$. Luego, $x \in J$ y así, $x \in I_v$.

(iii) Es consecuencia inmediata de la definición de ideal divisorial. ■

Definición 2.6 *Sea D un dominio de integridad, K su cuerpo de fracciones y $t \in K$:*

(i) *$t \in K$ es **entero** sobre D si es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en D.*

(ii) *$t \in K$ es **casi entero** sobre D si existe un elemento $d \in D$, $d \neq 0$, tal que $dt^n \in D$ para todo entero positivo n.*

(iii) *Un dominio de integridad D es **enteramente cerrado** si cada elemento de K entero sobre D pertenece a D.*

(iv) *Un dominio de integridad D es **completamente enteramente cerrado** si cada elemento de K casi entero sobre D pertenece a D.*

Nótese que ser completamente enteramente cerrado implica ser enteramente cerrado (ver [22]). En el caso Noetheriano las dos condiciones coinciden.

A continuación se presentan algunas propiedades y caracterizaciones de los dominios GCD y $G-GCD$; las pruebas que incluimos son claras y sencillas y difieren o no son presentadas en la literatura disponible.

Proposición 2.7 *Un dominio de integridad R es un GCD si y sólo si para todo $a, b \in R$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ es principal.*

Demostración: Para la implicacón directa, si $a = 0$ ó $b = 0$, entonces $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ es principal.

Sean $a, b \neq 0$ y sea $d = m.c.d(a, b)$, entonces $d \mid a$ y $d \mid b$, esto es, $a = dx$ y $b = dy$, luego $m.c.d(x, y) = 1$, nótese que $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle = \langle xy\rangle$: como $xy \in \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$ implica que $\langle xy\rangle \subseteq \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$, sea ahora $z \in \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$, entonces z es múltiplo de x y de y, por tanto z es múltiplo de $m.c.m(x, y) = m$, pero $m.c.d(x, y) = 1$, entonces $m = xy$, es decir $z \in \langle xy\rangle$ así que $\langle x\rangle \cap \langle y\rangle \subseteq \langle xy\rangle$.

Finalmente, hay que ver que $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle dxy\rangle$: claramente $dxy \in \langle a\rangle \cap \langle b\rangle$, luego $\langle dxy\rangle \subseteq \langle a\rangle \cap \langle b\rangle$, ahora $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle dx\rangle \cap \langle dy\rangle = \langle d\rangle \langle x\rangle \cap \langle d\rangle \langle y\rangle = \langle d\rangle (\langle x\rangle \cap \langle y\rangle) = \langle d\rangle \langle xy\rangle = \langle dxy\rangle$.

Recíprocamente, sean a, b no nulos y sea $\langle c\rangle = \langle a\rangle \cap \langle b\rangle$, $c \neq 0$ ya que R es un dominio de integridad y $ab \in \langle c \rangle$. Note que $c = m.c.m(a, b) : c \in \langle a \rangle$ y $c \in \langle b \rangle$, entonces $a \mid c$ y $b \mid c$, sea ahora x tal que $a \mid x$ y $b \mid x$, esto indica que $x \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, entonces $x \in \langle c \rangle$ así $c \mid x$. Como $a \mid ab$ y $b \mid ab$, entonces $c \mid ab$, esto es, $ab = cd$. Se tiene que $d = m.c.d(a, b) : a \mid c$ implica que $c = aa'$, entonces $ab = aa'd$ así $b = a'd$, es decir $d \mid b$, similarmente $d \mid a$.

Sea $e \mid a$ y $e \mid b$, entonces $a = ex$ y $b = ey$, así $\langle e \rangle \langle xy \rangle \subseteq \langle e \rangle (\langle x \rangle \cap \langle y \rangle) = \langle e \rangle \langle x \rangle \cap \langle e \rangle \langle y \rangle = \langle ex \rangle \cap \langle ey \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle c \rangle$, es decir, $\langle exy \rangle \subseteq \langle c \rangle$ luego $exy = \lambda c$.

Ahora, como $ab = cd$ se tiene que $exey = cd$, así que $e(xey) = cd$, esto es, $e(\lambda c) = cd$, entonces $\lambda e = d$, es decir, $e \mid d$. ■

Proposición 2.8 *Sea R un dominio de Prüfer, entonces R es un dominio GCD si y sólo si R es un dominio de Bézout.*

Demostración: Para la implicación directa basta probar que cada ideal generado por dos elementos no nulos a y b es principal:

Sea $d = m.c.d(a, b)$, la idea es mostrar que $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces $a = d\alpha$ y $b = d\beta$, así cada combinación de a y b es múltiplo de d, esto implica que $\langle a, b \rangle \subseteq \langle d \rangle$. Nótese ahora que $\langle d \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$: como R es dominio de Prüfer, entonces $I = \langle a, b \rangle$ es invertible, por tanto $1 = ax + by$ con $x, y \in I^{-1}$, sea $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$, entonces $d = da\frac{m}{n} + db\frac{p}{q}$, pero $ax, bx, by, ay \in R$, así que $ax = a\frac{m}{n} = d_1 \in R$, dualmente $bx = b\frac{m}{n} = d_2 \in R$, por tanto $am = nd_1$ y $bm = nd_2$, con lo cual $n \mid am$ y $n \mid bm$ esto implica que $n \mid m.c.d(am, bm) = md$, esto es $md = nd', d' \in R$, similarmente $b\frac{p}{q} = e_1 \in R$, $a\frac{p}{q} = e_2 \in R$, entonces $q \mid bp$ y $q \mid ap$, así que $q \mid m.c.d(ap, bp) = pd$, es decir $pd = qd''$, $d'' \in R$, en consecuencia $d = \frac{and'}{n} + \frac{bqd''}{q} = ad' + bd''$. Por tanto $\langle d \rangle = \langle a, b \rangle$.

Recíprocamente, Sean $a, b \in R$ no nulos, entonces $\langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, hay que ver que $d = m.c.d(a, b) : a \in \langle a, b \rangle = \langle d \rangle$, entonces $a = d\lambda$, de donde $d \mid a$. Análogamente, $d \mid b$. Sea $e \mid a$, i.e, $a = ea'$ y sea $e \mid b$, entonces como $d = \alpha a + \beta b$ se tiene que $d = \alpha ea' + \beta eb'$ por consiguiente $e \mid d$. ■

Proposición 2.9 *Sea R un dominio GCD, entonces R es enteramente cerrado.*

Demostración: La prueba se realiza en dos pasos:

Paso 1. Sea $t = \frac{r}{s} \in K - \{0\}$ raíz de un polinomio $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in R[x]$. Sea $d = m.c.d(r, s)$, así $r = dp$ y $s = dq$, es decir, $t = \frac{p}{q}$, además $m.c.d(p, q) = 1$, nótese que $p \mid a_0$ y $q \mid a_n$: $a_0 + a_1(\frac{p}{q}) + a_2(\frac{p^2}{q^2}) ... + a_{n-1}(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}) + a_n(\frac{p^n}{q^n}) = 0$, entonces $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + ... + a_np^n = 0$, esto indica que $p \mid a_0q^n$, pero como $m.c.d(p, q) = 1$, se tiene que $p \mid a_0$. También, $q \mid a_np^n$ y $q \mid a_n$.

Paso 2. Sea $t = \frac{r}{s} \in K - \{0\}$ entero en R, es decir, satisface un polinomio mónico con coeficentes en R. Se puede tomar $t = \frac{p}{q}$ con $m.c.d(p, q) = 1$, luego por el Paso 1, $q \mid a_n = 1$, esto es $q \in R^*$, entonces $\frac{p}{q} \in R$. ■

Proposición 2.10 *R es un dominio $G - GCD$ si y sólo si la intersección de dos ideales fraccionarios invertibles de R es invertible.*

Demostración: Sean J_1, J_2 ideales fraccionarios invertibles de R, entonces existen r_1, r_2 no nulos en R, tales que r_1J_1, $r_2J_2 \subseteq R$. Además, r_1J_1, r_2J_2 son ideales enteros invertibles ($(r_iJ_i)^{-1} = r_i^{-1}J_i^{-1}$, $i = 1, 2$). También, $r_1r_2J_1$, $r_1r_2J_2$ son ideales enteros invertibles, por lo tanto $r_1r_2J_1 \cap r_1r_2J_2 = I \subseteq R$ es invertible, entonces $(r_1r_2)^{-1}(r_1r_2J_1 \cap r_1r_2J_2) = (r_1r_2)^{-1}I$, así $J_1 \cap J_2 = (r_1r_2)^{-1}I$ y $(r_1r_2)^{-1}I$ es invertible.

La inclusión recíproca se tiene del hecho que todo ideal entero invertible es un ideal fraccionario invertible. ■

Proposición 2.11 *[7] Sea R un dominio de integridad, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *R es un dominio $G - GCD$.*

(ii) *$\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ es invertible $\forall a, b \in R - \{0\}$.*

(iii) *$[a :_R b]$ es invertible $\forall a, b \in R - \{0\}$.*

(iv) *El grupo de ideales fraccionarios invertibles de R, denotado por $Inv(R)$, es un grupo reticular ordenado bajo el orden parcial $I \leqslant J$ si y sólo si $J \subseteq I$.*

(v) *Cada $v-$ideal de tipo finito es invertible.*

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Es claro, ya que todo ideal principal es invertible.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sean $I = \langle a_1, ..., a_n\rangle$ y $J = \langle b_1, ..., b_m\rangle$ ideales invertibles de R, es suficiente mostrar que $I \cap J$ es finitamente generado y localmente invertible, ver [22, CapÌtulo 1]. Sea R un anillo local e I un ideal invertible, se tiene entonces que $1 = x_1y_1 + ... + x_ny_n$, donde $x_i \in I$, $y_i \in I^{-1}$ e $I = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$, dado que $x_iy_i \in R$, $1 \leq i \leq n$, se debe tener que $x_iy_i \in R^*$ para algún i, entonces existe $c \in R$ tal que $x_iy_ic = 1$, así $x_j = x_i(y_icx_j)$, como $y_i \in I^{-1}$, $y_ix_j \in R$, e igualmente $y_ix_jc \in R$, esto es $x_j \in \langle x_i\rangle$, entonces $I \subseteq \langle x_i\rangle \subseteq I$, así que I es principal y generado por algún x_i. Ahora, si $M \in Max(R)$ se tiene que

$I_M = \left\langle \frac{a_{i_1}}{1} \right\rangle$ y $J_M = \left\langle \frac{b_{j_1}}{1} \right\rangle$ para algún i_1, j_1 con $1 \leqslant i_1 \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 \leqslant m$, así $I_M \cap J_M = (I \cap J)_M = \left\langle \frac{a_{i_1}}{1} \right\rangle \cap \left\langle \frac{b_{j_1}}{1} \right\rangle = \langle a_{i_1} \rangle_M \cap \langle b_{j_1} \rangle_M = (\langle a_{i_1} \rangle \cap \langle b_{j_1} \rangle)_M = \langle c \rangle_M$, es decir, $I \cap J$ es localmente invertible. Para ver que $I \cap J$ es finitamente generado nótese que $\sum\limits_{i,j} \langle a_i \rangle \cap \langle b_j \rangle \subseteq I \cap J$, así que

$$\begin{aligned}(I \cap J)_M/(\sum_{i,j} \langle a_i \rangle \cap \langle b_j \rangle)_M &= (I_M \cap J_M)/\sum_{i,j} \left[\langle a_i \rangle_M \cap \langle b_j \rangle_M\right] \\ &= \langle a_{i_1} \rangle_M \cap \langle b_{j_1} \rangle_M /\sum_{i,j} \left[\langle a_i \rangle_M \cap \langle b_j \rangle_M\right] \\ &\subseteq \sum_{i,j} \left[\langle a_i \rangle_M \cap \langle b_j \rangle_M\right] /\sum_{i,j} \left[\langle a_i \rangle_M \cap \langle b_j \rangle_M\right] = 0,\end{aligned}$$

por consiguiente $I \cap J = \sum\limits_{i,j} \langle a_i \rangle \cap \langle b_j \rangle$ es finitamente generado.

$(i) \Rightarrow (v)$ Sea I un $v - ideal$ de tipo finito, es decir $I = J_v$ para algún J fraccionario finitamente generado de R, $J = \langle u_1, ..., u_n \rangle$ con $u_i \in K$.

Nótese que $J^{-1} = (u_1, ..., u_n)^{-1} = \langle u_1 \rangle^{-1} \cap ... \cap \langle u_n \rangle^{-1}$ es invertible y así $(J^{-1})^{-1}$ es invertible, es decir, $I = J_v$ es invertible.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Es inmediata de la observación $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = [a :_R b] \langle b \rangle$.

$(i) \Rightarrow (v)$ Sea $G = Inv(R)$; sean $I, J \in G$, entonces $I \cap J \subseteq I$ y $I \cap J \subseteq J$, así $I \leqslant I \cap J$ y $J \leqslant I \cap J$, además, por hipótesis $I \cap J \in G$, sea ahora K tal que $I \leqslant K$, $J \leqslant K$, entonces $K \subseteq I$ y $K \subseteq J$ con lo cual $K \subseteq I \cap J$ y por lo tanto $I \cap J \leqslant K$. así $I \cap J = Sup(I, J)$ indicando esto que $Inv(R)$ es un grupo reticular ordenado.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sean $I, J \in G$ y sea $K = Sup(I, J)$ así $I \leqslant K$, $J \leqslant K$ lo cual indica que $K \subseteq I$ y $K \subseteq J$ y por tanto $K \subseteq I \cap J$. Sea ahora $x \in I \cap J$ entonces $x \in I$ y $x \in J$ así $\langle x \rangle \subseteq I$, $\langle x \rangle \subseteq J$, esto es, $I \leqslant \langle x \rangle$ y $J \leqslant \langle x \rangle$ y dado que $\langle x \rangle \in G$ se tiene que $K \leqslant \langle x \rangle$, i.e, $\langle x \rangle \subseteq K$ de donde $x \in K$; en conclusión $I \cap J = K$.

$(v) \Rightarrow (iv)$ Si $I, J \in G$ entonces $(I + J)_v$ es invertible, ya que es un $v - ideal$ de tipo finito. Nótese que $Inf(I, J) = (I + J)_v$: como $I \subseteq I + J \subseteq (I + J)_v$ y $J \subseteq I + J \subseteq (I + J)_v$ se tiene que $(I + J)_v \leqslant I$ y $(I + J)_v \leqslant J$. Sea ahora $K \in G$ tal que $K \leqslant I$ y $K \leqslant J$, vease entonces que $K \leqslant (I + J)_v : (I + J) \subseteq K$ implica que $(I + J)_v \subseteq K_v = K$ así $K \leqslant (I + J)_v$. ■

Proposición 2.12 *Si R es un dominio GCD, entonces R es un dominio $G - GCD$.*

Demostración: Sean I, J ideales enteros invertibles de R, entonces I, J son finitamente generados, denotados por $I = \langle a_1, a_2, ..., a_t \rangle$, $J = \langle b_1, b_2, ..., b_l \rangle$

hay que ver que $I \cap J$ es invertible, para esto se puede demostrar que $I \cap J$ es finitamente generado y que todas sus localizaciones maximales son invertibles, nótese que esto se tiene inmediatamente con un razonamiento análogo a la prueba de la proposición anterior para el caso $(ii) \Rightarrow (i)$. ■

Nótese que si R es un dominio de Prüfer, entonces R es un dominio $G-GCD$.

Corolario 2.13 *[7] Sea R un dominio $G-GCD$, S un sistema multiplicativo, entonces RS^{-1} es un dominio $G-GCD$, además R_P es un dominio GCD $\forall P \in Spec(R)$ y entonces R es enteramente cerrado.*

Demostración: Dados $\left\langle \frac{a}{r} \right\rangle, \left\langle \frac{b}{s} \right\rangle \in RS^{-1}$, se tiene que $\left\langle \frac{a}{r} \right\rangle \cap \left\langle \frac{b}{s} \right\rangle = \left\langle \frac{a}{1} \right\rangle \cap \left\langle \frac{b}{1} \right\rangle = \langle a \rangle S^{-1} \cap \langle b \rangle S^{-1} = (\langle a \rangle \cap \langle b \rangle)S^{-1}$. Si $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = I$ es invertible, entonces $II^{-1} = R$, así que $(II^{-1})S^{-1} = RS^{-1}$ y por tanto $IS^{-1}I^{-1}S^{-1} = RS^{-1}$ indicando esto que IS^{-1} es invertible, con lo cual $\left\langle \frac{a}{r} \right\rangle \cap \left\langle \frac{b}{s} \right\rangle$ es invertible, en consecuencia RS^{-1} es un dominio $G-GCD$. Véase ahora que R_P es un dominio GCD : dado que R_P es un anillo local y en anillos locales los ideales invertibles son principales se tiene que la intersección de ideales principales es un ideal principal.

Finalmente, ya que $R = \bigcap_{P \in Max(R)} R_P$ (ver [22, CapÌtulo 1]) y que cada R_P es enteramente cerrado, (por ser R_P un GCD) se puede concluir que R es enteramente cerrado. ■

3 ANILLO DE POLINOMIOS

A la fecha son muy pocos los resultados que se tienen en lo concerniente a la preservación de la propiedad de conductor finito de un anillo de polinomios, es más, este aún continua siendo un problema abierto. En esta sección se presentan los resultados concocidos en este contexto, mostrando el estado del arte del problema.

Para probar los cuatro teoremas centrales de esta sección son necesarias varias propiedades de tipo técnico relativas a ideales divisoriales y polinomios primitivos. Las demostraciones de varias de estas afirmaciones preliminares no se encuentran en la literatura y aquí son presentadas en forma clara.

Lema 3.1 *[7] Sea R un dominio de integridad con cuerpo de fracciones K, e I un ideal fraccionario no nulo de R, entonces:*

$$[R[x] : IR[x]] = [R : I][x], \text{ es decir,}$$
$$(IR[x])^{-1} = I^{-1}R[x] \text{ y así } (IR[x])_v = I_v R[x]$$

Demostración: Nótese que $[R[x]:IR[x]] \subseteq K[x]$: en efecto, existe $t \neq 0$ en R, tal que $tI \subseteq R$, sea $\frac{p(x)}{q(x)} \in [R[x]:IR[x]]$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)}I[x] \subseteq R[x]$, sea $\alpha \neq 0$ en I, luego $\frac{p(x)}{q(x)}\alpha 1 = r(x)$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)}\alpha t = tr(x)$, pero $\alpha t = s \in R$, por consiguiente $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{tr(x)}{s} \in K[x]$.

Ahora, sea $g \in (IR[x])^{-1}$, equivalentemente $g \in (R[x]:IR[x])$ sí y solo si $g \in [R[x]:I[x]]$ lo que equivale a $gI[x] \subseteq R[x]$ sí y solamente si $c(g)I \subseteq R$, lo cual conlleva a que $c(g) \subseteq [R:I]$, es decir $c(g) \subseteq I^{-1}$, así que $g \in I^{-1}R[x]$. Para la última parte si $f \in (IR[x])_v$, es decir $f \in ((IR[x])^{-1})^{-1}$ equivale a que $f \in (I^{-1}R[x])^{-1}$, por consiguiente $f \in (I^{-1})^{-1}R[x])$ así que $f \in I_vR[x]$. ■

Lema 3.2 *[7] Si I_1 es un ideal divisorial de $R[x]$ e $I = I_1 \cap K \neq 0$, entonces I es un ideal divisorial de R. Más precisamente,*

$$I = \cap\left\{r(c(g))^{-1} \mid I_1 \subseteq \left\langle \frac{r}{g} \right\rangle R[x], r \in R, g \in R[x]\right\}.$$

Demostración: Observese que si I_1 es un ideal divisorial de $R[x]$, entonces $I_1 = \cap\left\{\left\langle \frac{f}{h} \right\rangle R[x] \mid I_1 \subseteq \left\langle \frac{f}{h} \right\rangle R[x],\ h \neq 0\right\}$; Si $I = I_1 \cap K \neq 0$, y además $I_1 \subseteq \left\langle \frac{f}{h} \right\rangle R[x]$, entonces $I_1 \cap K \subseteq \left\langle \frac{f}{h} \right\rangle \cap K$, por consiguiente $\left\langle \frac{f}{h} \right\rangle R[x] \cap K \neq 0$, y existen $r \in R$, $g \in R[x]$, tales que $\left\langle \frac{f}{h} \right\rangle R[x] = \left\langle \frac{r}{g} \right\rangle R[x]$: en efecto, sea $\alpha \in K \cap \left\langle \frac{f}{h} \right\rangle R[x]$, esto es, $\alpha = \frac{r}{t} = p\frac{f}{h}$, con $r, t \in R - \{0\}$, $p \in R[x] - \{0\}$, de tal forma que $\frac{f}{h} = \frac{r}{pt} = \frac{r}{g}$, $g \in R[x] - \{0\}$. Así
$I_1 = \cap\left\{\left\langle \frac{r}{g} \right\rangle R[x] : I_1 \subseteq \left\langle \frac{r}{g} \right\rangle R[x], r \in R, 0 \neq g \in R[x]\right\}$. Sea
$J = \cap\left\{r(c(g))^{-1} \mid I_1 \subseteq (\frac{r}{g})R[x], 0 \neq g \in R[x], r \in R\right\}$, nótese que $I = J$:

$\subseteq$) Sea $u \in I$, así $u \in I_1$, por tanto $u \in \left\langle \frac{r}{g} \right\rangle$, es decir $u = h\frac{r}{g}$, de tal forma que $ug = hr \in \langle r \rangle$, por consiguiente $ug \in rR[x], r \in R, 0 \neq g \in R[x]$, $I_1 \subseteq \left\langle \frac{r}{g} \right\rangle R[x]$, entonces $uc(g) \subseteq rR$, luego $u \in J$.

$\supseteq$) Sea $u \in J$, $u \in rc(g)^{-1}$, para todo r, g tal que $I_1 \subseteq \left\langle \frac{r}{g} \right\rangle R[x], c(g)u \subseteq rR$, entonces $ug \in rR[x]$, luego $u \in \frac{r}{g}R[x]$, así que $u \in I_1 \cap K = I$.

La conclusión de que I es un ideal divisorial de R se debe a que I es intersección de ideales divisoriales de R. Nótese $r(c(g))^{-1}$ es divisorial; en efecto, $r\left[\langle g_0, g_1, ..., g_n\rangle\right]^{-1} = r\left[\langle g_0\rangle^{-1} \cap ... \cap \langle g_n\rangle^{-1}\right]$, y $(r(\langle g_0\rangle^{-1} \cap ... \cap \langle g_n\rangle^{-1})^{-1})^{-1} = r\left[\langle g_0\rangle^{-1} \cap ... \cap \langle g_n\rangle^{-1}\right] = rc(g)^{-1}$. ■

Proposición 3.3 *[7] Sea R un dominio enteramente cerrado, I_1 un ideal entero divisorial de $R[x]$, entonces:*

(i) Si $I = I_1 \cap R \neq 0$, entonces I es un ideal entero divisorial de R y además $I_1 = IR[x]$.

(ii) Si $I_1 \cap R = 0$, entonces existe $f \in R[x]$ y un ideal I divisorial de R tal que $I_1 = fIR[x]$.

Demostración: (i) Por hipótesis $I_1 \subseteq R[x]$, además $I = I_1 \cap R = I_1 \cap K = \cap \left\{ r(c(g))^{-1} : \ I_1 \subseteq (\frac{r}{g})R[x] \right\}$; nótese que por el lema anterior I es divisorial, véase entonces que $I_1 = IR[x]$: es claro que $IR[x] \subseteq I_1$, para la inclusión recíproca sea $f \in I_1$, $fg \in rR[x]$, $r \in R, 0 \neq g \in R[x]$, así $c(fg) \subseteq rR$ y como R es enteramente cerrado se tiene que $c(f)c(g) \subseteq (c(f)c(g))_v = c(fg)_v \subseteq rR$, ([7, Lema 6.1.2]) entonces $c(f) \subseteq [rR : c(g)] = r[R : c(g)]$ y $c(f) \subseteq I$, esto es, $f \in IR[x]$.

(ii) Si $I_1 \cap R = 0$, existe $f \in I_1$, $f \neq 0$ tal que $I_1K[x] = fK[x]$: en efecto, $fK[x] \subseteq I_1K[x]$, ahora $I_1K[x] = \langle h(x)\rangle_{K(x)}, h(x) = \frac{g(x)}{r} \in I_1$, entonces $h(x) = \left\langle \frac{g(x)}{r} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{r}g(x) \right\rangle = \langle f(x)\rangle$. Luego $I_1 \subseteq I_1K[x] \cap R[x] = fK[x] \cap R[x] = f(c(f))^{-1}R[x]$, sea $0 \neq a \in R$ tal que $a(c(f))^{-1} \subseteq R$, como $I_1 \subseteq f(c(f))^{-1}R[x]$, $aI_1 \subseteq f(ac(f)^{-1}R[x])$, $aI_1 \subseteq fL$, donde $L = ac(f)^{-1}R[x]$, así que $\frac{a}{f}I_1 \subseteq L \subseteq R[x]$, observese que $J_1 = \frac{a}{f}I_1$ es un ideal entero divisorial de $R[x]$, así $J_1K[x] = (\frac{a}{f}I_1)K[x] = K[x]$, luego $J_1K[x] = K[x]$ y $J = J_1 \cap R \neq 0$, por tanto $a \in J$, por parte (i) $J_1 = JR[x]$, con lo cual $I_1 = fa^{-1}J_1$, $I_1 = fa^{-1}JR[x]$ donde $a^{-1}J$ es un ideal divisorial de R. ■

Proposición 3.4 *[7] Sea R un dominio de integridad con cuerpo de fracciones K, entonces R es enteramente cerrado si y sólo si cada ideal entero I de $R[x]$ con $I_v \cap R \neq 0$ satisface $I_v = (c(I)[x])_v = c(I)_v[x]$; donde $c(I)$ es el ideal de R generado por los coeficientes de elementos de I.*

Demostración: $\Rightarrow$) Dado que R es enteramente cerrado, se aplica la proposición anterior y se tiene que $I_v = (I_v \cap R)[x]$, donde $I_v \cap R$ es un ideal entero divisorial de R, así $c(I_v) = I_v \cap R$, claramente $I \subseteq c(I)[x]$, por consiguiente $I_v \subseteq (c(I)[x])_v$, además por el Lema 14 se concluye que $(c(I)[x])_v = c(I)_v[x]$, por tanto $c(I_v) \subseteq c(I)_v$, además $c(I)_v \subseteq c(I_v)$; en efecto, dado que $I \subseteq I_v$, se tiene que $c(I) \subseteq c(I_v)$ y como $c(I_v) = I_v \cap R$ es un ideal divisorial de R, se deduce que $(c(I_v))_v = c(I_v)$, por tanto $c(I)_v \subseteq (c(I_v))_v = c(I_v)$. Así que $I_v = (I_v \cap R)[x] = c(I_v)[x] = c(I)_v[x] = (c(I)[x])_v$.

$\Leftarrow$) Para esta implicación sean $f, g \in R[x] - \{0\}$, y $r \in R - \{0\}$ tal que $c(fg) \subseteq rR$, de esta inclusión se tiene que $\langle rf, rg\rangle \subseteq rR[x]$: $rf \in rR[x]$, $r \in \frac{r}{f}R[x]$, $fg \in rR[x]$, $g \in \frac{r}{f}R[x]$, así que $\langle r, g\rangle \subseteq \frac{r}{f}R[x]$ es divisorial por ser principal. Por hipótesis $(\langle r, g\rangle)_v = c\,\langle r, g\rangle_v[x]$, (note que $\langle r, g\rangle_v \cap R \neq 0$; $\langle r, g\rangle \subseteq \langle r, g\rangle_v$, $r \neq 0$) por tanto $c(g)[x] \subseteq c(\langle r, g\rangle)[x] \subseteq c(\langle r, g\rangle)_v[x] = \langle r, g\rangle_v \subseteq \frac{r}{f}R[x]$, de donde $fc(g)[x] \subseteq rR[x]$ y así $c(f)c(g) \subseteq rR$, lo cual implica que R es enteramente cerrado (ver [15, Lema 1.31 (iv)]). ■

Proposición 3.5 (Lema de Gauss) *Sea R un dominio GCD, si f, $g \in R[x]$ son polinomios primitivos, entonces fg es un polinomio primitivo.*

Demostración: Por efectos de espacio la prueba se ilustra para polinomios de primer y tercer grado; mostrando un modelo que puede seguirse para polinomios de cualquier orden finito.

Sean $f = f_0 + f_1x$ y $g = g_0 + g_1x$, entonces $h = fg = f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)x + f_1g_1x^2$. Sean $d = m.c.d(f_0g_0, f_0g_1 + f_1g_0, f_1g_1)$, $u = m.c.d(f_0, d)$, así $u \mid f_0g_1$, $u \mid f_0g_1 + f_1g_0$, $u \mid f_1g_1$, luego $u \mid f_1g_0$, y $u \mid f_1g_1$, entonces $u \mid m.c.d(f_1g_0, f_1g_1)$, así que $u \mid f_1m.c.d(g_0, g_1)$, entonces $u \mid f_1$, pero como $u \mid f_0$, se tiene que $u \mid m.c.d(f_0, f_1)$, por consiguiente $u = 1$, es decir, $m.c.d(f_0, d) = 1$, pero dado que $d \mid f_0g_0$, se tiene que $d \mid g_0$. Análogamente, sea $v = m.c.d(f_1, d)$, así $v \mid f_0g_0$, $v \mid f_0g_1 + f_1g_0$, $v \mid f_1g_1$, luego $v \mid f_0g_1$, y $v \mid f_1g_1$, entonces $v \mid m.c.d(f_0g_1, f_1g_1)$, así que $v \mid g_1m.c.d(f_0, f_1)$, entonces $v \mid g_1$, pero como $v \mid g_0$, se tiene que $v = 1$, es decir, $m.c.d(f_1, d) = 1$, y $d \mid f_1g_1$, así que $d \mid g_1$, por tanto $d = 1$ y el caso del producto de polinomios primitivos lineales queda concluido.

Ahora, sean $f = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3$ y $g = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3$, entonces $h = fg = f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)x + (f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0)x^2 + (f_0g_3 + f_1g_2 + f_2g_1 + f_3g_0)x^3 + (f_1g_3 + f_2g_2 + f_3g_1)x^4 + (f_2g_3 + f_3g_2)x^5 + (f_3g_3)x^6$. Sea $d = m.c.d(f_0g_0$, $f_0g_1 + f_1g_0$, $f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0$, $f_0g_3 + f_1g_2 + f_2g_1 + f_3g_0$, $f_1g_3 + f_2g_2 + f_3g_1$, $f_2g_3 + f_3g_2$, $f_3g_3)$. Existen una serie de máximos común divisores u, u', u'', y para cada uno una serie de divisibilidades así: sean $u = m.c.d(f_0, d)$, $u' = m.c.d(u, f_1) = m.c.d(d, f_0, f_1)$ y $u'' = m.c.d(u', f_2) = m.c.d(d, f_0, f_1, f_2)$ entonces $u'' \mid f_3g_0$, $u'' \mid f_3g_1$, $u'' \mid f_3g_2$, y $u'' \mid f_3g_3$, por consiguiente $u'' \mid m.c.d(f_3g_0, f_3g_1, f_3g_2, f_3g_3)$, es decir $u'' \mid f_3m.c.d(g_0, g_1, g_2, g_3)$, así $u'' \mid f_3$. Como $u'' \mid f_0$, $u'' \mid f_1$, $u'' \mid f_2$ y $u'' \mid f_3$, se tiene que $u'' = 1$.

Ahora para u' se tiene que $u' \mid f_2 g_0$, pero como $m.c.d(u', f_2) = u'' = 1$, se tiene que $u' \mid g_0$. También $u' \mid f_2 g_1 + f_3 g_0$, así que $u' \mid f_2 g_1$, pero $m.c.d(u', f_2) = u'' = 1$, así que $u' \mid g_1$. De igual forma $u' \mid f_2 g_2 + f_3 g_1$, luego $u' \mid f_2 g_2$, pero $m.c.d(u', f_2) = u'' = 1$, así que $u' \mid g_2$. Así mismo $u' \mid f_2 g_3 + f_3 g_2$, por tanto $u' \mid f_2 g_3$, pero $m.c.d(u', f_2) = u'' = 1$, así que $u' \mid g_3$. Como $u' \mid g_0$, $u' \mid g_1$, $u' \mid g_2$, $u' \mid g_3$, se tiene que $u' = 1$.

Razonando para u se tiene que $u \mid f_1 g_0$, pero $m.c.d(u, f_1) = u' = 1$, así que $u \mid g_0$. Además $u \mid f_1 g_1 + f_2 g_0$, por tanto $u \mid f_1 g_1$, pero $m.c.d(u, f_1) = u' = 1$, así que $u \mid g_1$. Similarmente, $u \mid f_1 g_3 + f_2 g_1 + f_3 g_0$, así $u \mid f_1 g_3$, pero $m.c.d(u, f_1) = u' = 1$, así que $u \mid g_2$. Finalmente, $u \mid f_1 g_3 + f_2 g_1 + f_3 g_0$, luego $u \mid f_1 g_3$, pero $m.c.d(u, f_1) = u' = 1$, así que $u \mid g_3$. Recapitulando, $u \mid g_0$, $u \mid g_1$, $u \mid g_2$ y $u \mid g_3$, por consiguiente $u = 1$.

Con un procedimiento análogo al anterior se obtiene que $m.c.d(g_0, d) = 1$. Como $d \mid f_0 g_0$ y además $u = m.c.d(f_0, d) = 1$ y $m.c.d(g_0, d) = 1$ se concluye que $d = 1$. ■

Proposición 3.6 *Sea R un dominio GCD y sea $f = hg$ un polinomio primitivo, entonces h y g son polinomios primitivos.*

Demostración: Sean $h = h_0 + h_1 x + ... + h_t x^t$ y $g = g_0 + g_1 x + ... + g_m x^m$, entonces $f = h_0 g_0 + (h_0 g_1 + h_1 g_0)x + ... + h_t g_m x^{t+m}$. Sea $d = m.c.d(h_0, h_1, ..., h_t)$, entonces $d \mid h_i$ $0 \leq i \leq t$, luego d divide a todo coeficiente de f, es decir, d divide al máximo común divisor de los coeficientes de f, esto es, $d \mid 1$, luego $d = 1$ y h es primitivo. El mismo razonamiento se utiliza para g. ■

Proposición 3.7 *Sea R un dominio GCD, si g es un polinomio primitivo no constante en $R[x]$, entonces g es un producto finito de polinomios primos.*

Demostración: Sea g un polinomio primitivo no constante de $R[x]$, entonces $g = k_1 k_2 ... k_t$ donde los k_i son irreducibles en $K[x]$, ahora $g = \frac{1}{r_1} h_1 ... \frac{1}{r_t} h_t$ con $h_i \in R[x]$, entonces $r_1 ... r_t g = h_1 ... h_t$, como R es un GCD se tiene que $r_1 ... r_t g = h_1 ... h_t = a_1 g_1 ... a_t g_t$, con $g_i \in R[x]$ polinomios primitivos. Tomando máximo común divisor a los coeficientes de los polinomios obtenidos en la igualdad anterior se tiene que $r_1 ... r_t = a_1 ... a_t$, con lo cual $g = g_1 ... g_t$, $g_i \in R[x]$ primitivos. Nótese que cada g_i es irreducible en $R[x]$, (de lo contrario g_i sería reducible en $K[x]$ y entonces $k_i = \frac{a_i}{r_i} g_i$ sería reducible, lo cual es una contradicción).

Véase ahora que $\langle g_i \rangle$ es primo en $R[x]$: en efecto, dada la inclusión canónica $\iota : R[x] \hookrightarrow K[x]$, $\langle g_i \rangle$ en $K[x]$ es primo debido a que $K[x]$ es un PID y g_i irreducible, resta ver que $\langle g_i \rangle$ es primo en $R[x]$, i.e, $\iota^{-1}(\langle g_i \rangle) = \langle g_i \rangle_{R[x]}$: en efecto,

$\iota^{-1}(\langle g_i \rangle)$ es un ideal primo en $R[x]$, sea $hg_i \in \langle g_i \rangle_{R[x]}$, entonces $hg_i \in K[x]$, así que $hg_i \in \iota^{-1}(\langle g_i \rangle)$, luego $\langle g_i \rangle_{R[x]} \subseteq \iota^{-1}(\langle g_i \rangle)$.

Para la otra contenencia, sea t un polinomio de $R[x]$ tal que $t \in \iota^{-1}(\langle g_i \rangle)$, entonces $\iota(t) \in \langle g_i \rangle$, así $t = kg_i$, $k \in K[x]$, más precisamente, $t = \frac{a}{r} hg_i$, $h \in R[x]$ primitivo, por tanto, $rt = ahg_i$, entonces $r.b.t' = a.h.g_i$, con t' un polinomio primitivo, así tomando $m.c.d$ a ambos miembros de la igualdad anterior se sigue que $r.b = a$, y reemplazando se obtiene que $t = \frac{rb}{r} hg_i$, $t = bhg_i \in R[x]$, y $t \in \langle g_i \rangle_{R[x]}$. Por tanto, $g = g_1 ... g_t$ es producto de polinomios primos. ■

Proposición 3.8 *Sea R un dominio GCD, si f_1, g_1 son dos polinomios primitivos en $R[x]$, entonces f_1 y g_1 poseen máximo común divisor.*

Demostración: Para la prueba se presentan dos casos:

Caso 1. Por proposición anterior $f_1 = P_1 ... P_l$ y $g_1 = Q_1 ... Q_s$, con P_i, Q_i primos y f_1, g_1 polinomios primitivos, si $\{P_1, ..., P_l\} \cap \{Q_1, ..., Q_s\} = \phi$ entonces $m.c.d(f_1, g_1) = 1$: sea h tal que $h \mid f_1$ y $h \mid g_1$, entonces $f_1 = hf'$ y $g_1 = hg'$, como f_1, g_1 son primitivos, h es un polinomio primitivo, (ver Proposición 19). Si h fuese una constante, sería invertible y así $m.c.d(f_1, g_1) = 1$, si no es constante, por ser h, f', g' polinomios primitivos, se descomponen en producto de primos, así $h = T_1 ... T_k$, $f' = U_1 ... U_w$, $g' = V_1 ... V_v$, con T_i, U_i, V_i polinomios primos. Como $\langle f_1 \rangle$ es principal invertible y se descompone en un producto finito de ideales primos, esta descomposición es única, dualmente para g_1, pero como no hay elementos comunes entre f_1 y g_1, entonces h es constante invertible. Luego $m.c.d(f_1, g_1) = 1$.

Caso 2. $\{P_1, ..., P_l\} \cap \{Q_1, ..., Q_s\} \neq \phi$, se supone que $P_1, ..., P_t$ son los primos comunes tales que $f_1 = (P_1^{\theta_1} ... P_t^{\theta_t})$.(otros primos) y $g_1 = (P_1^{\theta_1} ... P_t^{\theta_t})$.(otros primos), hay que ver que $m.c.d(f_1, g_1) = (P_1^{\theta_1} ... P_t^{\theta_t})$: en efecto, sea h tal que $h \mid f_1$ y $h \mid g_1$, entonces h es un polinomio primitivo, si h no es constante, entonces por ser h primitivo, es un producto finito de primos, es decir, $h = (Q_1^{\gamma_1} ... Q_l^{\gamma_l})$, con Q_i primos, así mismo f' y g' son también un producto de polinomios primos, y la descomposición de f', g' es única, así que $\{Q_1, ..., Q_l\} \subseteq \{P_1, ..., P_t\}$, nótese que $\gamma_j \leq \theta_j$: en efecto, si para algún j, $\gamma_j > \theta_j$, entonces hay un primo común $P_j^{\gamma_j} \mid f_1$, $P_j^{\gamma_j} \mid g_1$ lo cual es una contradicción, luego $\gamma_j \leq \theta_j$. ■

Teorema 3.9 *Sea R un dominio GCD con cuerpo de fracciones K, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) R es un dominio GCD.

(ii) $R[x]$ es un dominio GCD.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Sean f, g no unidades en $R[x] - \{0\}$, tales que $f = af_1$, $g = bg_1$, donde $a, b \in R$ y f_1, g_1 son polinomios primitivos en $R[x]$, por hipótesis sea $c = m.c.d(a, b)$, $c \in R$, como f_1, g_1 son polinomios primitivos, tienen máximo común divisor h en $R[x]$, (proposición anterior) y es tal que h es primitivo. De otro lado, ch es divisor común de f y g en $R[x]$, nótese que ch es el máximo común divisor: en efecto, supóngase que s es divisor común de f y g en $R[x]$, entonces se escribe $s = ds_1$, $d \in R$ y s_1 primitivo en $R[x]$, así existen $t, l \in R[x]$ tales que $f = st$ y $g = sl$, con $t = e_1t_1$ y $l = e_2l_1$, donde $e_1, e_2 \in R$ y t_1, l_1 son polinomios primitivos en $R[x]$, de esto se sigue que $f = ds_1e_1t_1 = de_1s_1t_1 = af_1$, con s_1t_1 primitivo, además como la presentación de f es única, se tiene que $d \mid a$ y $s_1 \mid f_1$ en $R[x]$, similarmente $g = ds_1e_2l_1 = de_2s_1l_1 = bg_1$, de donde $d \mid b$ y $s_1 \mid g_1$ en $R[x]$, como d divide simultáneamente a a y a b, se tiene que $d \mid c$ de igual forma $s_1 \mid h$ en $R[x]$, lo cual conduce a que $s \mid ch$. En consecuencia ch es el máximo común divisor de f y h.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Es inmediata, ya que $R \subseteq R[x]$, y para $f \in R[x]$, f tiene grado positivo, así por razones de grado los polinomios constantes tienen máximo común divisor en R. ■

Una prueba inductiva sobre el número de variables de $R[x_1, ..., x_n]$, muestra que el teorema anterior es también válido para el caso de n variables.

En virtud del teorema anterior y del hecho que dentro de la gama de los dominios de Prüfer los únicos dominios que son GCD son los Bézout, se concluye que en las subclases de los dominios de Prüfer los únicos dominios que satisfacen que el anillo $R[x]$ sea GCD son los dominios de Bézout.

Para el siguiente teorema se considera la propiedad $G-GCD$. En particular, ahí se muestra que $R[x_1, ..., x_n]$ es un dominio $G-GCD$ si y sólo si R es un domino $G-GCD$. De igual forma, el resultado obtenido en este teorema permite concluir que si R es un dominio de Prüfer, entonces $R[x_1, ..., x_n]$ es un dominio $G-GCD$.

Es conocido que el conjunto $S = \{f \in R[x] : \ c(f) = R\}$ es un sistema multiplicativo de $R[x]$.

Teorema 3.10 *Sea R un dominio de integridad con cuerpo de fracciones K, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) R es un dominio $G-GCD$.

(ii) $R[x]$ es un dominio $G-GCD$.

(iii) $R(x)$ es un dominio GCD, donde $R(x) = R[x]S^{-1}$.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Según la Proposición 11 se debe probar que cada v-ideal de tipo finito es invertible; sea I un $v - ideal$ de tipo finito en $R[x]$, i.e, $I = \langle k_1....k_n \rangle_v$ donde $k_i \in L$, el cuerpo de fracciones de $R[x]$, como I es un ideal fraccionario en $R[x]$ se puede escoger un $g \in R[x] - \{0\}$ tal que $gI \subseteq R[x]$. Note que gI es un ideal entero divisorial de tipo finito y que I es invertible si y sólo si gI es invertible. Así, se puede asumir que I es entero en $R[x]$, para probar que I es invertible se consideran dos casos:

(1) $I \cap R \neq 0$, aplicando la Proposición 17 y el Corolario 13 se obtiene que $I = \langle k_1....k_n \rangle_v = c(k_1....k_n)_v [x]$. Dado que R es un $G - GCD$ se puede ver que $c(k_1....k_n)_v$ es un ideal invertible de R y así I es un ideal invertible de $R[x]$ (ver Lema 14).

(2) $I \cap R = 0$, argumentando como en la Proposición 16 (ii), existe un $0 \neq a \in R$ y $f \in I$, $f \neq 0$ tal que $J = \frac{a}{f} I$ es un ideal entero divisorial de $R[x]$ de tipo finito y $J \cap R \neq 0$, así por el caso (1), J es un ideal invertible de $R[x]$ y por tanto I es un ideal invertible de $R[x]$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Recuérdese que por Corolario 13, $R(x)$ es un dominio $G - GCD$, y que cada ideal invertible de $R(x)$ es principal ($PicR(x) = 0$), lo cual indica que $R(x)$ es un dominio GCD.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sean I, J ideales invertibles de R, por Lema 14, $IR(x)$ y $JR(x)$ son ideales invertibles de $R(x)$ y por hipótesis son ideales principales de $R(x)$, por lo tanto $(I \cap J)R(x) = IR(x) \cap JR(x)$ es un ideal principal de $R(x)$ y así $I \cap J$ es un ideal invertible de R. ■

Nótese que la Proposición 16 fue establecida para dominios de integridad, desconocemos si se cumple para anillos con divisores de cero. De ser así, ayudaría a resolver el siguiente interrogante: ¿Si R es un anillo $G - GCD$, entonces $R[x]$ es un anillo $G - GCD$?

En lo referente a la preservación de la coherencia por el anillo de polinomios la situación es más complicada, ya que las técnicas clásicas de manejo de ideales no son suficientes. Para este caso se adoptan procedimientos propios de álgebra homológica, algunas condiciones de planitud y finitud.

Aquí vale la pena resaltar que existen dominios coherentes sobre los cuales el anillo de polinomios $R[x]$ no es coherente, esto lo muestra el ejemplo de Soublin en el cual $S_i = Q[[t, u]]$ denota el anillo de series en dos variables t, u sobre los racionales, y $S = \prod_{i=1}^{\infty} S_i$. Soublin mostró que S es un anillo coherente de $w.dimS = 2$ y que el anillo de polinomios $S[x]$ no es un anillo coherente (ver [14]).

La ténica usada en [9] para la prueba del siguiente teorema es el álgebra homológica y resulta demasiado extensa. A continuación se presenta una prueba corta a través de ideales divisoriales.

Teorema 3.11 *Sea R un dominio coherente enteramente cerrado, entonces $R[x]$ es un dominio cuasi-coherente.*

Demostración: Sean $f_1, f_2, ..., f_n \in R[x]$, $I = \langle f_1 \rangle \cap \langle f_2 \rangle \cap ... \cap \langle f_n \rangle$ y $J = I \cap R$. Para ver que I es finitamente generado se consideran dos casos:

(1) Si $J \neq 0$: nótese que I es un ideal divisorial de $R[x]$, entonces por la Proposición 16, $I = JR[x]$, con J un ideal entero divisorial de R. Por consideraciones de grado $f_1, f_2, ..., f_n \in R$, y teniendo en cuenta que R es coherente, se sigue que J es finitamente generado. Luego I también es finitamente generado.

(2) Si $J = 0$: por la demostración de la parte (ii) de la Proposición 16 se tiene que existen un elemento no nulo a en R y un polinomio no nulo $f \in I$,tales que $J_1 = \frac{a}{f} I$ es un ideal entero divisorial de $R[x]$. Sea $J_2 = J_1 \cap R$, según la prueba mensionada, J_2 es un ideal entero divisorial no nulo de R y se puede aplicar el caso (1) para decir que J_1 es finitamente generado como ideal de $R[x]$. Entonces $J_1 = \langle j_1(x), ..., j_t(x) \rangle$ y $\left\langle \frac{f}{a} j_1(x), ..., \frac{f}{a} j_t(x) \right\rangle = I$, es decir, I es finitamente generado. ∎

Del teorema anterior se puede deducir que si R es un dominio de Prüfer, entonces $R[x]$ es un dominio cuasi-coherente.

La misma técnica usada en el teorema anterior permite demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.12 *Sea R un dominio cuasi coherente enteramente cerrado, entonces $R[x]$ es un dominio de conductor finito.*

En la misma dirección de los resultados anteriores se plantea la siguiente pregunta, cuya respuesta desconocemos: ¿Si R es dominio de conductor finito, entonces $R[x]$ es $G - GCD$? (ver [11]).

4 ANILLO DE SERIES

En esta sección se consideran las propiedades GCD y $G-GCD$ para el caso del anillo de series, mostrando a través de dos ejemplos que dichas propiedades no se preservan. Es de notar que la propiedad de coherencia tampoco se preseva al anillo de series (ver [14]). Para comenzar veamos algunos preliminares.

Teorema 4.1 *[17] Sea K es un cuerpo, entonces $K[[x]]$ es dominio de factorización única (UFD) y por lo tanto, completamente enteramente cerrado.*

Demostración: Como K es cuerpo, $K[[x]]$ es un dominio de ideales principales, más exactamente $\{\langle x^n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es el conjunto de todos los ideales no nulos, con único ideal maximal $\langle x\rangle$. Así, como es un dominio de ideales principales, por el Teorema 1.6 de [24] es UFD y por el Teorema 1.7 de [24] si es UFD es completamente enteramente cerrado. ∎

Teorema 4.2 *[8] Si D es un dominio de integridad, entonces $D[[x]]$ es completamente enteramente cerrado, si y sólo si, D es completamente enteramente cerrado.*

Demostración: Se tiene el siguiente diagrama conmutativo para D dominio de integrigad, K su cuerpo de fracciones, L el cuerpo de fracciones de $D[[x]]$ y $K((x))$ el cuerpo de fracciones de $K[[x]]$:

$$\begin{array}{ccccc} K & \rightarrowtail & L & \rightarrowtail & K((X)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ D & \rightarrowtail & D[[X]] & \rightarrowtail & K[[X]] \end{array}$$

Para la implicación directa, sea K el cuerpo de fracciones de D, y se tiene que $D = D[[x]] \cap K$. Por hipótesis, $D[[x]]$ es completamente enteramente cerrado y como K es completamente enteramente cerrado y la intersección de dominios completamente enteramente cerrados es completamente enteramente cerrado (ver [8]), entonces D es completamente enteramente cerrado.

Recíprocamente, el cuerpo de fracciones L de $D[[x]]$ es subcuerpo de $K((x))$ y $K[[x]]$ (según el diagrama inicial de esta prueba); y $K[[x]]$ es un dominio de factorización única, por tanto por el Teorema 26 es completamente enteramente cerrado.

Sea $\alpha \in L$ casi entero sobre $D[[x]]$; existe $h \in D[[x]]$ tal que $h\alpha^n \in D[[x]]$ para todo $n \geq 1$. Pero como h, $h\alpha^n \in K[[x]]$ y este es completamente enteramente cerrado, entonces $\alpha \in K[[x]]$. Es decir, podemos suponer $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in K[[x]] \cap L$, y se prueba que $\alpha \in D[[x]]$.

Existe un elemento no nulo $g \in D[[x]]$ tal que $g\alpha^n \in D[[x]]$ para cada entero positivo n.

Se prueba por inducción sobre i que $a_i \in D$. Así, si se asume que $a_0, \ldots, a_{j-1} \in D$,
con j entero no negativo, entonces sea $\alpha^* = a_0 + \ldots + a_{j-1}x^{j-1} \in D[[x]]$, y $g(\alpha - \alpha^*)^n \in D[[x]]$, para cada entero positivo n. Si $a_j = 0$, entonces $a_j \in D$; si $a_j \neq 0$, sea $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, con b_m el primer coeficiente no nulo de g de tal forma que $g = \sum_{i=m}^{\infty} b_i x^i$.

Entonces si n es un entero positivo,

$$\begin{aligned} g(\alpha - \alpha^*)^n &= \left(\sum\nolimits_{i=m}^{\infty} b_i x^i\right) \left(\sum\nolimits_{i=j}^{\infty} a_i x^i\right)^n \\ &= b_m a_j^n x^{m+nj} + (\text{otros términos de orden superior}) \in D[[x]]. \end{aligned}$$

Se sigue que $b_m a_j^n \in D$ para cada entero positivo n, así que a_j es un elemento de K casi entero sobre D, y por tanto, por hipótesis es un elemento de D, así $\alpha = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in D[[x]]$. ■

Teorema 4.3 *[8] Sea D es un dominio de integridad con cuerpo de fracciones K. Si $D[[x]]$ es enteramente cerrado, entonces D es enteramente cerrado.*

Demostración: Sea $\alpha \in K$ tal que α satisface un polinomio mónico con coeficientes en D, entonces $\alpha \in L$ y satisface un polinomio mónico con coeficientes en $D[[x]]$. Por la hipótesis, $\alpha \in D[[x]]$, esto es $\alpha \in K \cap D[[x]] = D$. ■

El siguiente teorema establece que el recíproco del teorema anterior no es siempre cierto.

Teorema 4.4 *[8] Sea D un dominio enteramente cerrado que no es completamente enteramente cerrado. Entonces, $D[[x]]$ no es enteramente cerrado.*

Demostración: Se tiene aplicando el Teorema 1.11 y la Proposición1.12 de [24]. ■

D. D. Anderson muestra en su último artículo "*GCD* domains and power series rings" (**2002**), que si V es un dominio de valuación y $V[[x]]$ un dominio GCD, entonces V debe ser de dimensión de Krull 1 con grupo de valuaciones $\mathbb{Z}$ ó $\mathbb{R}$. Además, da un ejemplo de un dominio de valuación W de dimensión de Krull 1 con grupo de valuaciones $\mathbb{R}$, para el cual $W[[x]]$ no es dominio GCD.

El siguiente teorema es útil para ilustrar ejemplos que muestran que la propiedad GCD no se preserva al anillo de series.

Teorema 4.5 *[8] Sea V un dominio de valuación no trivial en el cuerpo K, con ideal máximal M. Entonces:*
(i) V es enteramente cerrado.
(ii) V es Noetheriano, si y sólo si, V es de dimensión de Krull 1 y discreto.
(iii) V es completamente enteramente cerrado, si y sólo si, V es de dimensión de Krull 1.

Demostración: (i) Si $x \in K - V$, entonces $V \subset \langle x \rangle$, así que $V \subset \langle x \rangle \subset \langle x^2 \rangle \subset ... \subset \langle x^n \rangle$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Así, si $\{d_i\}_{i=0}^{n-1}$ es un conjunto finito de elementos de V, entonces

$d_0 + d_1 x + ... + d_{n-1}x^{n-1} \in \langle x^{n-1} \rangle$, así que $x^n \neq d_0 + d_1 x + ... + d_{n-1}x^{n-1}$. Por tanto, x no es entero sobre V. Se sigue que V es enteramente cerrado.

(ii) Para la implicación inversa, se asume que V es 1-dimensional y discreto. Entonces $\{M^k\}_{k=1}$ es el conjunto de ideales propios de V. Por tanto, si $x \in M - M^2$, entonces $M^2 \subset \langle x \rangle \subseteq M$, y como consecuencia, $M = \langle x \rangle$. Se sigue que cada ideal de V es principal, y V es Noetheriano.

Recíprocamente, si V es Noetheriano, V es un dominio de ideales principales. En consecuencia, V es 1-dimensional y contiene ideales propios no idempotentes, así V es discreto.

(iii) Para la implicaciÛn directa, sea V completamente enteramente cerrado y sea P un ideal primo de V contenido propiamente en M. Si $x \in M - P$, entonces $P \subset \cap_{n=1}^{\infty} \langle x^n \rangle$. Pero el Teorema 1.11 de [24] muestra que $\cap_{n=1}^{\infty} \langle x^n \rangle = \langle 0 \rangle$. Así, $P = \langle 0 \rangle$ y V es 1-dimensional.

Recíprocamente, sea $x \in K - V$. Entonces $y = x^{-1} \in V$. Por el Teorema 1.11 de [24] $\cap_{n=1}^{\infty} \langle y^n \rangle$ es primo en V. Y como V es 1-dimensional, $\cap_{n=1}^{\infty} \langle y^n \rangle = \langle 0 \rangle$. Por tanto, si $d \neq 0$, $d \in V$, entonces $\langle y^n \rangle \subset \langle d \rangle$ para algún $n \in Z^+$. Se sigue que $\frac{d}{y^n} = dx^n \notin V$, y como d es un elemento arbitrario de V, se tiene que x no es casi entero sobre V. Luego, V es completamente enteramente cerrado. ■

Corolario 4.6 *Sea V un dominio de valuación de dimensión > 1, entonces V no es completamente enteramente cerrado, y por tanto $V[[x]]$ no es $G - GCD$.*

Demostración: Se tiene como consecuencia del teorema anterior y el Teorema 29. ■

A continuación se presenta un ejemplo de un dominio de valuación y por tanto dominio GCD (ver Proposición 8), cuyo anillo de series no es dominio GCD.

Ejemplo 4.7 *Sea* $A = K + xK[[x]]$ *y* $V = R + xK[[x]]$ *un subanillo de* A, *con* K *el cuerpo de fracciones de* R $xK[[x]] = M$ *el ideal máximal de* A *y* $R \cap M = 0$.
Se tiene entonces que:

(i) *Si* R *es un dominio de valuación y en consecuencia* GCD, *entonces* $V = R + xK[[x]]$ *es dominio de valuación:*
Se consideran en $R + M$ *los ideales* $\langle a + m\rangle$ *y* $\langle b + n\rangle$, *con* $a, b \in R$ *y* $m, n \in M$; *se puede suponer en* R *que* $\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle$, *es decir,* $a = rb$. *Si* $b = 0$, $a = 0$ *y* $\langle m\rangle, \langle n\rangle$ *son comparables en* A; *se supone ahora que* $\langle m\rangle \supseteq \langle n\rangle$, *entonces existe* $v \in A$, $v = k + m'$ *tal que* $n = vm = (k + m')m$. *Como* $R \in DV$, $k \in R$ *ó* $k^{-1} \in R$. *Si* $k \in R$, *entonces en* $R+M$ *se tiene que* $\langle n\rangle \subseteq \langle m\rangle$. *Si* $k^{-1} \in R$, $\frac{1}{r} = k$, *y* $n = (\frac{1}{r} + m')m$, *con lo cual* $rn = (1 + rm')m$; *además,* $1 + rm' \in U(A)$ *con lo que en* A *se tiene* $\langle n\rangle = \langle rn\rangle = \langle m\rangle$. *Entonces, existe* $(k'' + m'') \in A$ *tal que* $m = (k'' + m'')(\frac{1}{r} + m')m$. *Si* $m = 0$, $n = vm = 0$ *y entonces* $\langle a + m\rangle \subseteq \langle b + n\rangle$. *Si* $m \neq 0$, $(k'' + m'')(\frac{1}{r} + m') = 1$ *y se sigue que* $k'' = r$ *ya que* $K \cap M = 0$, *y entonces* $m = (r + m'')n$ *con lo que* $\langle m\rangle \subseteq \langle n\rangle$.

Si $b \neq 0$, $b + n \neq 0$ *porque* $R \cap M = 0$ *y* $a + m = rb + m$. *Se define en* K, $z = \frac{m - rn}{b + n}$, *entonces* $z \in A$ *ó* $z^{-1} \in A$. *Si* $z^{-1} \in A$, *como* $m - rn \in M$, $z^{-1}(m - rn) \in M$ *y por lo tanto* $b + n \in M$ *de lo que* $b = 0$, *una contradicción. Entonces,* $z \in A$ *y* $z(b + n) = m - rn \in M$ *y como* $b + n \notin M$ *entonces* $z \in M$ *y* $a + m = (r + z)(b + n)$, *es decir,* $\langle a + m\rangle \subseteq \langle b + n\rangle$.

(ii) *Sea* $V = \mathbb{Z}_{(p)} + x\mathbb{Q}[[x]]$, *entonces su dimensión de Krull es* ≥ 2, *con* p *un número primo.*

(iii) *Según el Teorema* 30, $V = \mathbb{Z}_{(p)} + x\mathbb{Q}[[x]]$ *no es completamente enteramente cerrado y aplicando el Corolario* 31, $V[[x]]$ *no es* $G - GCD$.

El siguiente ejemplo, similar al anterior, muestra que un anillo de series sobre un dominio Bézout no es necesariamente $G - GCD$.

Ejemplo 4.8 *Sea* R *un dominio Prüfer,* $K \neq R$ *su cuerpo de fracciones. Sea* $A = K + xK[[x]]$, $T = R + xK[[x]]$ *un subanillo de* A, $xK[[x]] = M$ *el ideal máximal de* A *y* $R \cap M = 0$.
Se tiene entonces que:

(i) *Si* R *es un dominio Bézout y en consecuencia* GCD, *entonces* $T = R + xK[[x]]$ *es dominio Bézout:*

Sea $J = \langle a_1 + m_1, a_2 + m_2\rangle$ *un ideal de* $R + M$, *así el ideal* $I = \langle a_1, a_2\rangle = \langle b\rangle$. *Si* $b = 0$, $J = \langle m_1, m_2\rangle$ *es un ideal del dominio de valuación* $K[[x]]$

con lo cual J *resulta principal generado por* m_1 *ó* m_2. *Si* $b \neq 0$, $a_i = c_i b$, $i = 1, 2$, *luego* $a_i + m_i = b(c_i + \frac{1}{b} m_i)$ *con* $\frac{1}{b} m_i \in M$, *o sea en* $R + M$ *se tiene que* $J \subseteq \langle b \rangle$ *; nótese que* $b \in J$ *: existen* $d_1, d_2 \in R$ *tales que* $b = d_1 a_1 + d_2 a_2$. *Se supone, sin perdida de generalidad que* $a_1 \neq 0$, *entonces* $a_1 + m_1 \notin M$ *y por tanto* $a_1 + m_1 \in U(K[[x]])$, *luego* $(d_1 m_1 + d_2 m_2)(a_1 + m_1)^{-1} \in K + M$ *y existe* $k + n \in K + M$ *tal que* $(a_1 + m_1)(k + n) = (d_1 m_1 + d_2 m_2)$. *Pero* $K \cap M = 0$, *con lo cual* $k = 0$ *y* $(a_1 + m_1)(n) = d_1 m_1 + d_2 m_2$. *Por lo tanto,* $b = (d_1 - n)\ (a_1 + m_1) + d_2(a_2 + m_2)$, *es decir,* $b \in J$ *de lo cual* $J = \langle b \rangle$.

(ii) *Sea* $T = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[[x]]$ *un dominio Bézout de dimensión de Krull* $\geq$ *2.*

(iii) *Según el Teorema* 30, $T = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[[x]]$ *no es completamente enteramente cerrado y aplicando el Corolario* 31, $T[[x]]$ *no es* $G - GCD$.

Quedan planteados varios interrogantes como:

¿Bajo qué condiciones $R[[x]]$ es dominio GCD ?

En el caso del anillo de series cuando R es enteramente cerrado pero no completamente enteramente cerrado, el Corolario 31 permite concluir que su anillo de series no es dominio $G - GCD$. Así queda la siguiente conjetura: Si R es un dominio completamente enteramente cerrado y GCD, entonces $R[[x]]$ es un dominio GCD.

Referencias

[1] D.D.Anderson, *GCD Domains, Gauss' Lemma, and contents of polynomials*, Kluwer Math And Appl. Vol 520, (2000), 1-31

[2] D.D. Anderson And R.O. Quintero*, Some generalizations of GCD domains,* Lecture Notes in pure And Applied Math # 189, Marcel Dekker, (1997), 189-195.

[3] D.D. Anderson And B.G. Kang, *Content formulas for polynomials and power series and completed integral closure,* J. Algebra 181 (1996), 82-94.

[4] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introducción al Álgebra Conmutativa*, Ed. Reverté S.A, Barcelona, 1978.

[5] N. Bourbaki, *Commutative Algebra,* Addison Wesley, Massachusetts, 1972.

[6] J. Brewer, *Power series over commutative rings,* Marcel Dekker, New York, 1981.

[7] M. Fontana, J. A. Huckaba and I. Papick, *Prüfer Domains*, Marcel Dekker, New York, 1997.

[8] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory,* Marcel Dekker, New York, 1972.

[9] S. Glaz, *Finite conductor rings,* Proc. of AMS, to appear.

[10] S. Glaz, *Finite conductor rings with zero-divisors,* Kluwer Math. And Appl. Vol 520 (2000), 251-271

[11] S. Glaz, and S. Chapman, *One hundred problems in commutative rings theory,* Kluwer Math. and Appl. Vol 520 (2000), 459-477.

[12] S. Glaz, *Commutative ring characterized by homological conditions,* Handbook to the Heart of Algebra, Kluwer Pub, to appear.

[13] S. Glaz, *Finite conductor properties of R(x) and R<x>,* Dekker, Proc. of Huckaba Retirement Conference, Missouri (2000), to appear.

[14] S. Glaz, *Commutative Coherent Rings*, Lecture Notes in Mathematics, No. 1371, Springer-Verlag, New York, 1989.

[15] N. González, *Anillo de Polinomios Sobre Anillos de Conductor Finito*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[16] J. A. Huckaba, *Commutative Rings With Zero Divisors,* Marcel Dekker, New York, 1988.

[17] I. Kaplansky, *Commutative Rings*, Allyn- Bacon, Boston, 1970.

[18] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhauser Boston, 1985.

[19] O. Lezama y G. Rodriguez, *Anillos Modulos y Categorias,* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

[20] H. Matsumura, *Commutative Algebra,* W.A. Benjamin, Inc, New York, 1970.

[21] G. Picavet, *About GCD domains*, to appear in Advances in Commutative Ring Theory, Marcel Dekker, (2001).

[22] S. Rocuts, *Dominios de Prüfer: Caracterizaciones Subclases y Ejemplos*, Tesis de Grado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1999.

[23] J.J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra,* Academic Press, Orlando, 1979.

[24] O. Sepúlveda, *Anillo de Series Formales Sobre Anillos Conductor Finito*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[25] K. Spindler, *Abstract Algebra with Aplications,* Vol I and II, Marcel Dekker, New York, 1994.

[26] W. Vasconcelos, *The Rings of Dimension Two*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. No. 22, Marcel Dekker, New York, 1976.

[27] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra,* Vol. I, D. Van Nostradand Company, New Jersey, 1958.

Nelsy González & Omaida Sepúlveda
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Campus Universitario, Duitama - Boyacá, Colombia
ngonzalez@duitama.uptc.edu.co omaidasd@latinmail.com

Oswaldo Lezama
Universidad Nacional de Colombia
Campus Universitario, Bogotá, Colombia
olezama@matematicas.unal.edu.co
http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/15930/olezama/