EDUCACIÓN

Sobre los automatismos en la resolución de problemas

Javier Peralta

Resumen

El motivo que nos ha conducido a escribir este trabajo es el de reflexionar sobre el uso de automatismos en la resolución de problemas -cuya práctica habitual puede producir un efecto nocivo de rigidez mental en los alumnos-; los más comunes, en general, surgen como consecuencia de una enseñanza dogmática, favorecida por la predisposición de los estudiantes a acoger con alegría reglas que les permitan actuar con prontitud. En el presente artículo trataremos de clasificar los automatismos atendiendo a las causas particulares que los provocan.

Abstract.

The motive that has led us to write this paper is to reflect on the use of automatisms in the resolution of problems -whose customary practice can produce a harmful effect of mental inflexibility in the pupils-; the most common of them, generally, emerge as consequence of a dogmatic teaching, favoured by the bias of the students to accept happily rules that permit them to act with readiness. In the present article we will try to classify the automatisms attending to the particular causes that provoke them.

1 Introducción

En la enseñanza tradicional de las matemáticas, el aprendizaje de conceptos, la deducción de resultados y la adquisición de procedimientos generalmente tienen lugar sin la intervención activa del alumno.

Por otro lado, en este tipo de instrucción matemática, suelen distinguirse dos tipos de enseñanza: teórica y práctica, claramente diferenciadas. Mientras en la primera de ellas la participación del alumno se reduce a escuchar y tratar de entender las explicaciones del profesor, para más tarde procurar reproducirlas con la ayuda de la memoria; en la segunda se realizan ejercicios de manipulación de las nociones y proposiciones estudiadas, donde se repiten razonamientos y se aplican algoritmos.

De ese modo, la matemática se presenta como una ciencia perfectamente estructurada y cerrada, de la que el estudiante debe aprender sus conceptos y teoremas, así como las destrezas necesarias para ser usadas en ejercicios tipo.

En la resolución de estos últimos hay que tener en cuenta que suele bastar con reiterar el método seguido por el profesor en otros problemas semejantes, y utilizar los resultados que recientemente se han visto "en clase de teoría". A lo sumo, cabe la posibilidad de que igualmente se precisen emplear otros teoremas, pero que casi siempre estarán asociados al prototipo de cuestiones de las que en ese momento se trate; por ejemplo: triángulo rectángulo-teorema de Pitágoras, factorización de un polinomio (o resolución de una ecuación de grado superior al segundo)-teorema del resto y regla de Ruffini, ciertos límites funcionales indeterminados-regla de L'Hôpital, etc. Por último, será necesario además saber operar, para realizar posteriormente los cálculos oportunos.

Esa dudosa forma de educación matemática ocasiona en los alumnos, entre otras cosas, un efecto considerable de rigidez mental, una de cuyas consecuencias es el uso indiscriminado de automatismos en la resolución de problemas. Conviene resaltar que es preciso estar muy atentos a este fenómeno, pues como advierte Puig Adam, el alumno "acoge con alegría las reglas que le permiten actuar rápidamente antes de asimilar las esencias metódicas" (Peralta 1994, p. 58), a pesar de la importante limitación de la que puede ser objeto su capacidad creativa a causa de este proceder habitual. Del mismo modo, Polya (1986, p. 143) analiza este hecho, e invita a excluir de los métodos de enseñanza la "pedantería", o "aplicación de una regla al pie de la letra en forma rígida"; tratando de inculcar en su lugar lo que denomina "maestría": "aplicación de una regla con cierta soltura, con juicio, sin dejar que la formulación oscurezca el fin de la acción o las oportunidades de la situación".

Aunque ya hemos estudiado esta cuestión en dos situaciones particulares: los problemas de optimización de funciones (Peralta 1994) y -de algún modo- la resolución de ecuaciones (Peralta 1999), nunca lo hemos hecho de manera global. Por ello, nos planteamos en este artículo tratar de abordar ese asunto de una forma general; más concretamente, nuestro objetivo va a ser ahora el de intentar clasificar y analizar la procedencia de los automatismos más frecuentes en la resolución de problemas y ejercicios.

Pero antes de comenzar, hagamos tres observaciones. La primera -así se verá a lo largo del trabajo- es que algunas situaciones podrían ser incluidas en más de una de las categorías en las que se clasificarán los automatismos; en cuyo caso, generalmente, serán adscritas a aquellas que presenten un carácter más restrictivo.

La segunda puntualización se refiere a que no se han considerado como automatismos las actuaciones producidas por una manera de calcular precipitada en la que se confunden las propiedades de las operaciones, esto es, cuando se trasladan propiedades de la adición a la multiplicación, o recíprocamente; aunque probablemente también podrían ser así conceptuadas, tal como se hace en (Bouvier et al. 1986, p. 120). Si hemos procedido de ese modo es porque, si bien esa actitud tiene su origen en un intento de realización mecánica de un cálculo, no es menos cierto que obedece a una deficiente interiorización de los significados de las operaciones mencionadas, como acaso también a los efectos de una introducción prematura o poco cuidadosa del lenguaje literal; causas que sin embargo no vamos a estudiar en esta ocasión.

Por último, digamos que el término problema que aparece en el título del artículo, debe ser entendido en un sentido amplio; esto es, considerando como problemas no solo aquellos cuya resolución exige el uso de razonamientos plausibles, sino también los que se solucionan simplemente mediante el manejo sistemático de reglas, y que suelen denominarse ejercicios. A lo largo del trabajo, sin embargo, casi siempre se establecerá la común distinción entre ambas acepciones: problema, si corresponde a situaciones no familiares en las que existen dificultades, pero que pueden ser resueltas mediante aplicaciones significativas (no mecánicas) del conocimiento matemático, o sea, si precisan procedimientos creativos para su resolución; ejercicio, si es posible llegar a su solución sin más que reproducir y emplear métodos y algoritmos rutinarios (Peralta 2004).

2 Supuestos implícitos

El efecto de rigidez mental que produce el tratar de repetir sistemáticamente los métodos empleados en la resolución de otros problemas o ejercicios parecidos, puede ocasionar una cierta merma en la capacidad de razonamiento “en el vacío” del alumno. Como consecuencia de esa limitación a la libertad de pensamiento, y acostumbrado a que su mente discurra casi siempre dentro de unos límites previamente fijados, el estudiante puede suponer a veces, inconscientemente, que están impuestas determinadas condiciones que, no obstante, no figuran en el enunciado ni se deducen del mismo, y que reciben el nombre de supuestos implícitos.

Como ejemplo de ello, imaginemos que después de haber resuelto en clase el siguiente Ejercicio 1, se propusiera el Problema 2 (Peralta 1995, pp. 91-92):

> Ejercicio 1.- Con tres palillos de la misma longitud construir un triángulo equilátero y, con cinco, dos triángulos equiláteros iguales. En ambos casos, la longitud del lado de cada triángulo debe ser igual a la longitud del palillo.
>
> Problema 2.- Construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos, de modo que la longitud del lado de cada triángulo coincida con la longitud del palillo.

Según hemos comprobado, este último problema ofrece cierta dificultad, debido probablemente a la fijación de que la construcción ha de hacerse en el plano. En cambio, si se propone sin realizar antes el primer ejercicio, se obtienen resultados algo mejores (la solución, como es sabido, viene dada por el tetraedro regular).

Por otro lado, hay que decir además que las carencias provocadas por el hecho que estamos estudiando pueden tener asimismo un efecto en cierto modo recíproco al que hasta ahora hemos considerado. Esto es, de igual forma que la mente acaso presuponga hipótesis restrictivas no prefijadas, puede también ignorar otras que se deduzcan del enunciado o de las condiciones del problema, aunque no estén expresamente formuladas. Así sucede con el siguiente problema:

> Problema 3.- La suma de los números de habitantes de tres poblaciones está comprendida entre 10000 y 11000. Si el número de habitantes de la primera población es 35/143 del total, y el de la segunda es 23/165 del total, hallar el número de habitantes de cada ciudad.

Si n es el número total de habitantes y n_i el número de habitantes de la ciudad i, normalmente se suele llegar a plantear:

$$10000 \leq n \leq 11000,\ n_1 = 35n/143,\ n_2 = 23n/165,\ n_1 + n_2 + n_3 = n$$

pero a partir de ahí es difícil continuar. Así, pocos alumnos caen en la cuenta de que las soluciones deben ser números naturales, que sin embargo es una información que puede deducirse del enunciado del problema.

Con este nuevo dato, enseguida se sigue que n ha de ser múltiplo de 11, 13, 3 y 5 y, por tanto, de su mínimo común múltiplo, que es 2145. Por tanteo, se llega a que $n = 10725$ habitantes; luego $n_1 = 2625$ habitantes, $n_2 = 1495$ habitantes y $n_3 = 6605$ habitantes.

3 ¿Usamos todos los datos?

Quizá sea conocido que Flaubert escribió a su hermana Carolina una carta en la cual, con motivo de que aquella estaba estudiando geometría y trigonometría, le planteaba el siguiente ejercicio, ciertamente sorprendente:

> Ejercicio 4.- "Un barco navega por el océano con destino a Le Havre; transporta un cargamento de lana de 200 toneladas de peso bruto, que ha cargado en Boston; tiene el palo mayor roto, el grumete pasea por el puente, el barco lleva 12 pasajeros a bordo, el viento sopla del Este-Nordeste y son las tres y cuarto en punto de una tarde del mes de mayo: ¿cuál es la edad del capitán?" (Newman 1980, p. 355).

Aunque, según parece, el ilustre novelista francés no buscaba con ello otra cosa que poner de manifiesto cómo el exceso de palabras superfluas no hace más que confundir a los resolutores de "rompecabezas". Y algo parecido puede decirse de su clásica versión, "¿ Cuál es la edad del capitán?", que tiene su origen en una encuesta realizada en 1979 en el IREM de Grenoble y que dio origen a un libro del mismo título de Stella Baruk en 1985 (Socas 1997, p. 128).

> Ejercicio 5.- "En un barco hay 20 cabras y 15 vacas. ¿ Cuál es la edad del capitán?"

Sobre este ejercicio, que formaba parte de un test planteado a alumnos de la escuela elemental, el autor afirma que el 74 % de los mismos respondieron: 35 años, "sin experimentar dudas sobre su respuesta". A ello hemos de añadir que también hemos propuesto en diferentes ocasiones esa misma prueba a estudiantes del último ciclo de Primaria (10-12 años) y siempre se han obtenido resultados parecidos.

Ahora bien, no debemos extrañarnos de esa reacción de los alumnos, cuando incluso en el Diccionario de heurística de Polya, una de las sugerencias de la fase "Concebir un plan" de su conocido método para resolver problemas consiste en preguntarse: "¿ Ha empleado usted todos los datos?" (Polya 1986, p. 98). Aunque más adelante, añada: "Aplicar una regla al pie de la letra, en forma rígida, sin plantearse preguntas, tanto si es aplicable o no, es pedantería. Ciertos pedantes no son sino pobres gentes que nada han comprendido de las reglas que aplican tan a conciencia y sin nigún discernimiento. (...) Aplicar una regla con cierta soltura, con juicio, notando los casos convenientemente y sin dejar jamás que la formulación verbal oscurezca el fin de la acción o las oportunidades de la situación, he ahí la maestría." (ibid., p. 143). Y también, hace ya muchos años, Puig Adam avisaba de algún modo del efecto que estamos estudiando, pues escribía lo siguiente, en relación con los problemas de los exámenes: "El alumno, acostumbrado a la "buena fe" y a la "infalibilidad" de los examinadores, tratará de agotar todos los datos, buscándolos aplicabilidad por suponerlos necesarios. Y ¡desgraciado de él si no lo hace! Será entonces él quien será juzgado estúpido" (Peralta 1995, p. 85).

Así, el automatismo producido por la "obligatoriedad" en el uso de todos los datos, favorecido sin duda por la suposición de que su profesor nunca va a proponerle problemas o ejercicios cuyos datos no sean estrictamente necesarios para su resolución, repercutirá de forma negativa en la búsqueda de la solución. Deberíamos, en consecuencia, reflexionar largamente sobre este hecho, y plantear de vez en cuando a nuestros alumnos problemas con datos redundantes, contradictorios o insuficientes, para tratar de evitar estos efectos nocivos.

A continuación, aun admitiendo el origen común de la procedencia de este fenómeno, hemos tratado de examinar con más detalle las posibles causas del mismo. A nuestro juicio, pueden ser las siguientes:

3.1 La existencia de datos superfluos, frente a la ausencia de los datos necesarios.

En este supuesto puede suceder que, en efecto, los datos irrelevantes se apliquen equivocadamente en su resolución. Es el caso del Ejercicio 5 anterior.

3.2 La existencia de datos contradictorios, que no se advierten en un primer momento, aunque, una vez resuelto el problema, conducen a que éste no tenga solución.

Como el alumno no se imagina que pueda suceder tal cosa, en no pocas ocasiones desestima la posibilidad de que la solución no tenga sentido en el contexto del problema y, ante esta situación, se desoriente y en muchos casos actúe de forma errónea. Ejemplo:

> Problema 6.- Al finalizar las clases un autobús escolar va retornando a su casa a los alumnos que usan ese servicio. En una parada baja la mitad de los niños, en la siguiente descienden los 5/7 de los alumnos que quedaban, y a continuación la séptima parte de los niños que había inicialmente. Aun así, siguen quedando 20 niños dentro. ¿Con cuántos niños había partido el autobús?

Si x es el número inicial de niños, obviamente se llega a:

$$x - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{7} \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{7} \right) = 20,$$

que conduce a: $0 \cdot x = 20$. El problema por tanto no tiene solución, ya que en las tres paradas han salido todos los alumnos, y no es posible que aún queden 20 en el autobús.

Hemos planteado en numerosas ocasiones este problema a alumnos de 13-14 años y, a pesar de que ya se les habían propuesto ecuaciones del tipo $0 \cdot x = a$, $a \neq 0$, y habían concluido que no tenían solución, los resultados obtenidos en el problema en cuestión han sido notablemente peores, pues eran ellos los que tenían que llegar a plantearla como enunciado. La razón de este comportamiento habría que buscarla, según confesaron algunos alumnos, en que aunque admitan la existencia de tales ecuaciones "en forma abstracta", les es más difícil aceptar que puedan aparecer en un "problema concreto".

En particular, siempre hemos advertido que los resultados suelen estar distribuidos en tres grupos, casi del mismo tamaño: el formado por aquellos que contestan bien (el problema no tiene solución), los que no contestan (después de rehacer varias veces los cálculos en los que se ha llegado a $0 \cdot x = 20$ y llenar el papel de tachones) y los que contestan mal, por tratar de despejar x de esta última ecuación ($x = -20$, $x = 1/20$, son las respuestas más frecuentes; errores que algunos no habrían cometido de habérseles planteado dicha ecuación en abstracto).

3.3 La existencia de datos superfluos junto a los datos necesarios.

En tales casos, el exceso de datos puede dificultar su resolución, ante la creencia de la necesidad de utilizar todos ellos. Así sucede con el siguiente ejemplo, debido a T. P. Carpenter:

> Ejercicio 7.- Un conejo come 2 kg de comida cada semana. Cada año tiene 52 semanas. ¿Cuánta comida necesitarán 5 conejos en una semana? (Bujanda 1981, p. 88).

Los resultados obtenidos en este clásico ejercicio en una muestra de 100 alumnos fueron los siguientes:

Respuestas	2 kg	10 kg	52 kg	104 kg	520 kg	No sé
N^o de alumnos	1	56	5	11	23	4

Así, el hecho de introducir el dato superfluo de que el año tiene 52 semanas, ha inducido a error a aproximadamente la mitad de los alumnos que no saben hacer el ejercicio (23), que han dado la respuesta errónea más frecuente: 520 kg, obtenida empleando todos los datos ($2 \times 5 \times 52 = 520$).

A conclusiones parecidas se podrían llegar en los dos siguientes ejercicios de J. A. Fernández Bravo (2000, pp. 104 y 121):

> Ejercicio 8.- En un polideportivo hay 3 pistas de baloncesto y 5 pistas de balonmano, y sólo esas. El polideportivo tiene 4 puertas. ¿Cuántas pistas hay en el polideportivo?
>
> Ejercicio 9.- En una biblioteca hay 36 libros de cuentos y 58 libros de misterio. Se prestan 27 libros de cuentos y 49 libros de misterio. ¿Cuántos libros de cuentos quedan en la biblioteca?

4 No siempre lo nuevo es lo mejor

Debido sin duda a cuestiones de tiempo, y acaso en ocasiones también a una cierta comodidad o falta de una conveniente reflexión por parte del profesor, los procesos de enseñanza-aprendizaje de los contenidos del currículo se realizan en bloques posiblemente compartimentados en exceso. Con esta práctica, el alumno no sólo se siente incapaz de ir percibiendo en alguna medida la unidad intrínseca de las matemáticas sino que, además, suele carecer de recursos para poder abordar un mismo problema o ejercicio desde distintas ópticas.

En la resolución de problemas, en concreto, se utilizan con frecuencia únicamente los procedimientos estándar correspondientes al tipo en cuestión, sin plantearse tan siquiera si sería posible abordarlo por otros métodos más simples ya conocidos anteriormente y que en algún caso particular podrían facilitar su resolución. Para analizar mejor estas situaciones haremos una distinción entre los casos más frecuentes que a nuestro juicio pueden presentarse, y que son los siguientes:

4.1 Álgebra, ¿y por qué no aritmética?

Estudiemos este ejercicio:

> Ejercicio 10.- Ana tiene 3 euros más que Borja, y entre los dos tienen 11 euros. ¿Cuántos euros tiene cada uno?

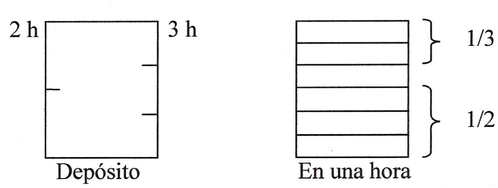
El ejercicio se propuso a alumnos que ya sabían resolver sistemas de ecuaciones (a partir de los 14 años), y efectivamente fue resuelto con esa técnica -a veces mal- por la gran mayoría de ellos. No obstante, este ejercicio es perfectamente asequible a estudiantes que no supieran nada de Álgebra, que habrían procedido más o menos de este modo: "Como Borja tiene 3 euros menos, si momentáneamente le diéramos los 3 que le faltan, entre los dos tendrían 14 euros, o sea, 7 euros cada uno; quitando a Borja los 3 que le habíamos dado antes, resulta que Ana tiene 7 euros y Borja 4 euros".

En este ejemplo y en otros similares sucede, pues, que cuando el alumno empieza a saber resolver ecuaciones, actúa como si ya pudiera olvidarse de la Aritmética. Sin embargo no debiera ser así, pues si bien el Álgebra proporciona, entre otras cosas, una gran economía de pensamiento al poder mecanizar la solución de múltiples problemas, en cambio no habría de utilizarse cuando fuera más fácil su resolución mediante sencillos cálculos aritméticos (que en este caso podrían efectuarse incluso mentalmente).

Veamos otros ejemplos, en los que es conveniente ayudarse de una representación gráfica:

> Problema 11.- Un grifo tarda en llenar un depósito 2 horas. Otro grifo llena el mismo depósito en 3 horas. ¿Cuánto tardan los dos juntos en llenar el depósito? (Palarea y Socas 1995, p. 31).

El problema puede resolverse algebraicamente, aunque su planteamiento es ciertamente más complicado que el anterior. En cambio, es más fácil su resolución aritmética, en especial si nos servimos de un sencillo dibujo:



Se deduce entonces inmediatamente que los dos grifos juntos, en una hora, llenan $1/3 + 1/2 = 5/6$ del depósito, y el $1/6$ restante lo llenan en $1/5$ de hora.

> Problema 12.- Una cuadrilla de segadores debía de segar dos prados, uno de los cuales tenía doble superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal en el prado grande; y después de la comida, la mitad de los segadores trabajó en el prado grande y la

> otra mitad en el pequeño. Al final de la tarde se acabaron de segar los dos prados, a excepción de un sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. Si se supone que todos trabajan con el mismo rendimiento, ¿de cuántos trabajadores constaba la cuadrilla? (Perelman 1978, p. 53).

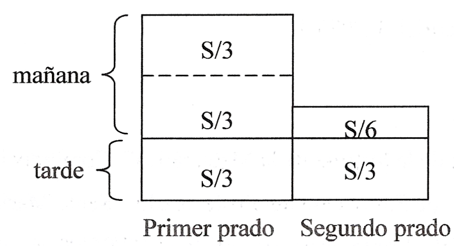
Resolverlo algebraicamente ofrece alguna dificultad, pues además de la incógnita x (número de segadores), es conveniente introducir otra incógnita auxiliar: y (superficie segada por un trabajador en un día). Puede razonarse entonces de este modo:

Respecto del primer prado, durante medio día segaron la superficie: $x{\cdot}(y/2) = xy/2$, y durante la segunda mitad del día: $(x/2){\cdot}(y/2) = xy/4$. Como así queda segado completamente, la superficie del primer prado es $xy/2 + xy/4 = 3xy/4$.

En relación con el segundo prado, como durante el primer día sólo se trabajó por la tarde, y se segó: $x/2{\cdot}y/2 = xy/4$; si lo sumamos al sector que se quedó sin segar: y, resulta que la superficie del segundo prado es $xy/4 + y = (xy + 4y)/4$.

Por tanto: $3xy/4 = (xy + 4y)/4$, luego la solución es: $x = 8$ segadores.

En cambio, es más sencillo resolverlo aritméticamente, utilizando como en el caso anterior una representación gráfica; pues si S es la superficie del primer prado y $S/2$ la del segundo, podemos entonces representar la situación mediante el siguiente dibujo:



Se concluye entonces que cada trabajador siega en un día $S/6$, y como en el primer día trabajaron todos, segaron en total $S/3 + S/3 + S/3 + S/3 = 8S/6$; por tanto hay 8 trabajadores.

4.2 Automatismos en la resolución de ecuaciones.

Aunque de este tema ya nos hemos ocupado parcialmente (Peralta 1999), vamos ahora a señalar alguno de los automatismos más frecuentes referentes a ello.

Seguramente proceda empezar con un pequeño comentario en relación con un hecho que nos alertó sobre este fenómeno. Sucedió hace unos años al evaluar las prácticas de enseñanza realizadas por varios estudiantes de Magisterio, a quienes se les propuso que trataran de explicar a sus alumnos del correspondiente colegio de prácticas, de 13-14 años, la manera de resolver la ecuación:

$$\frac{x}{2} - \frac{12x - 11x}{7} = \frac{1}{5}$$

La mayoría de ellos procedió entonces en primer lugar a quitar los denominadores, con lo que se llegaba a: $35x - 120x + 110x = 14$, etc.; y a mi pregunta sobre su modo de actuar, respondieron que el primer paso para resolver una ecuación es, siempre, quitar denominadores. Por el contrario, parece sin embargo que, en este caso, lo que la ecuación pedía a gritos era efectuar la sustracción, ya que así se simplificarían los cálculos posteriores.

Lo que se observa con este ejemplo es sin duda uno de los efectos perversos producidos por la aplicación sistemática de una determinada regla (en este caso, el orden a seguir para resolver una ecuación); si bien existen otros, también frecuentes, relativos a las ecuaciones y que tienen un mismo origen. Algunos de ellos son los siguientes:

- La utilización de la fórmula general para el cálculo de las raíces de una ecuación completa de segundo grado, aunque ésta sea incompleta.
- La invariante aplicación del método de igualación -despejando además siempre la x- en la resolución de los sistemas de dos ecuaciones lineales.
- El cálculo sistemático de los divisores del término independiente en la resolución de ecuaciones -o, equivalentemente, factorización de polinomios- de grado mayor o igual que 3, para luego utilizar la regla de Ruffini y así ir rebajando el grado del polinomio, aunque éste sea una diferencia de cuadrados, el cuadrado de un binomio, etc.

Respecto de esto último, en cambio, hay que decir que sería mejor efectuar desde el principio esas operaciones algebraicas elementales, y sólo después de ello aplicar el método anterior; lo que generalmente no se hace. De igual forma a lo que comentábamos anteriormente en relación con la posibilidad de resolver algunos sistemas de ecuaciones sencillos aritméticamente, también ahora parece que el conocimiento del teorema del resto y de la regla de Ruffini implicara la inutilidad de realización de cálculos algebraicos elementales. Agrupando ambas situaciones; el uso indiscriminado de un nuevo procedimiento por el profesor, da la impresión que repercute en los alumnos de modo que acaso consideren que su aprendizaje invalidara la práctica de otros métodos ya conocidos. Posiblemente esta apreciación debería movernos a todos a reflexionar sobre este particular, y a ser menos dogmáticos sobre las técnicas de resolución de un tipo determinado de problemas o ejercicios.

Volviendo al anterior argumento, digamos finalmente que una vez que los alumnos saben el teorema y la regla mencionados más arriba, suele ofrecer más dificultad para ellos resolver, por ejemplo, la ecuación $x^5 - 81x = 0$, que esta otra: $x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$; mientras que antes de que se conocieran aquellos sucedía justo al revés.

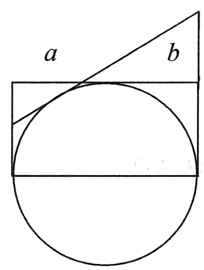
4.3 Problemas de máximos y mínimos de funciones.

Ya en la matemática helénica se plantearon diversos problemas de optimización, como por ejemplo, Arquímedes (s. III a.C.) en su obra "De la esfera y del cilindro" y Zenodorus (s. II a.C.), quien demostró que el círculo tiene mayor área que cualquier polígono isoperimétrico; aunque, como es lógico, no emplearan para ello el Cálculo diferencial, lo que no sucedió hasta muchos siglos después. Concretamente, Kepler y Fermat (s. XVII) fueron quizás los primeros en hallar la solución de ese tipo de problemas con el auxilio del Cálculo, que entonces se iniciaba. Pero incluso, a partir de su invención, tampoco ha sido éste el recurso universalmente empleado para resolverlos; de lo cual hay numerosos ejemplos, como es el caso de Steiner, quien en 1842 presentó diversos métodos para la investigación de máximos y mínimos en dos obras maestras de Geometría sintética.

Sin embargo, como es sabido, el único procedimiento que suele seguirse en nuestras aulas para abordar estos ejercicios -consecuencia sin duda del efecto de mecanización, no siempre deseable, que estamos estudiando en este trabajo- está basado en la aplicación de las derivadas; a pesar de que en numerosas ocasiones resultaría más fácil hallar su solución con tan solo sencillos razonamientos, principalmente de tipo geométrico. Si bien este asunto ya ha sido estudiado por el autor con más detalle (Peralta 1994); por algunos otros, como Schoenfeld (1985), quien además señala un principio heurístico de gran importancia en la resolución de estos problemas -así, afirma que en muchos casos la solución óptima corresponde al caso de mayor simetría-; o, desde un punto de vista histórico, por el "Grupo Construir las Matemáticas" (2000 pp. 95-98, 2001 a pp. 101-106, 2001 b pp. 95-97, etc); nos ha parecido oportuno presentar ahora algunos ejemplos sobre ello.

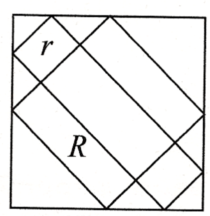
> Problema 13.- En una circunferencia se levantan dos perpendiculares a su diámetro en sus puntos extremos. Trazar una tangente a la circunferencia tal que el trapecio rectángulo formado por ese diámetro y los segmentos de sus perpendiculares y de la tangente tenga superficie mínima.

Mientras que su resolución mediante el Cálculo diferencial ofrece alguna dificultad, una consideración geométrica elemental permite hallar fácilmente su



solución. En efecto: el trapecio y el rectángulo (caso éste de mayor simetría) se solapan, y difieren en dos triángulos semejantes, uno de los cuales tiene mayor área que el otro ($b > a$); por tanto, el área del trapecio es mayor que la del rectángulo. En consecuencia, el trapecio de superficie mínima es el rectángulo.

> Problema 14.- Hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un cuadrado dado (se entiende que cada vértice del rectángulo ha de estar sobre cada uno de los lados del cuadrado).



El área del cuadrado inscrito es mayor que la de cualquier otro rectángulo inscrito, pues ambos tienen una parte común; sin embargo, el rectángulo R (correspondiente al cuadrado) es de mayor área que el rectángulo r (correspondiente al rectángulo), pues aunque tienen la misma altura, la base del primero es mayor que la del segundo.

5 Reflexionar siempre

El epígrafe de esta sección propugna sin duda una buena costumbre, aunque algo difusa y poco operativa. Quizás pudiera equipararse a otras indicaciones del estilo: “opera con cuidado”, “sé ordenado”, “no te des por vencido ante un problema” o “persevera en su resolución”; las cuales, junto a la primera, serían recomendables no sólo para la resolución de problemas, sino en toda actividad matemática e, incluso algunas de ellas, en muchos otros campos.

A pesar de esta última consideración, es necesario sin embargo tener muy presente aquella sugerencia, ya que operar "a lo loco", aplicar ciegamente un algoritmo o utilizar mecánicamente reglas sin reflexionar previamente sobre el enunciado de un problema o ejercicio, puede complicar su resolución, cuando no inducir a errores. Por ello, antes de pasar a la acción debemos acostumbrar a nuestros alumnos a que se formulen preguntas de este estilo: "¿es posible simplificar alguna expresión antes de operar?", "¿determinados cálculos tienen sentido en esta situación concreta?" "¿el problema es un caso tan especial de otros que sería mejor tratar de resolverlo de forma directa?", etc.

Llegados a este punto habría que reconocer, empero, que todos los demás tipos que han sido analizados en este artículo podrían tener cabida asimismo en este apartado pues, en realidad, el efecto nocivo que se ha estado estudiando tiene su origen último en la falta de reflexión. No obstante, con el ánimo de clarificar un poco el panorama, cuando este fenómeno ha sido también reconocible por otras peculiaridades, hemos procedido a su clasificación en el correspondiente grupo, fuera de esta sección.

Una vez tenidas en cuenta estas precisiones, señalemos algunos automatismos y ejemplos producidos específicamente por esa falta de reflexión y que no hayan sido englobados ya en los restantes tipos.

5.1 Derivación de una función antes de dedicar unos instantes a estudiar si ésta pudiera presentarse de otra forma en la que fuera más sencillo derivar.

Esta situación se da con frecuencia, por ejemplo, cuando hay que derivar un cociente cuyo denominador es constante, y se calcula su derivada utilizando la regla que se aplica a un cociente de dos funciones; o también cuando se deriva el logaritmo de un producto, un cociente ... sin efectuar previamente la descomposición en suma, diferencia ... de logaritmos. En tales casos, por tanto, se prefiere ejecutar un algoritmo antes que analizar si es posible expresar la función de un modo más conveniente; falta de reflexión que complica los cálculos y a veces produce errores.

5.2 Cálculo de derivadas sucesivas de una función sin pararse a intentar simplificar la derivada anterior. Esta omisión, no sólo puede hacer los cálculos más farragosos sino que, igual que la anterior, en ocasiones conduce a determinados errores.

Ese modo de actuar es especialmente apreciable si tal operación va encaminada al dibujo de la gráfica de una función derivable f, ya que algunas veces inclina a presuponer la existencia de puntos de inflexión en puntos no pertenecientes a su dominio, así como al cálculo innecesario de la tercera derivada. Esto sucede, por ejemplo, cuando la función f es el cociente de dos polinomios (caso muy frecuente), pues entonces f'' es siempre simplificable. En efecto, si $f = p/q$, siendo p y q polinomios, se tiene:

$$f\,' = \frac{qp' - pq'}{q^2},\ f\,'' = \frac{q^2\left(q'p' + qp'' - p'q' - pq''\right) - \left(qp' - pq'\right)2qq'}{q^4}$$

y es posible dividir el numerador y el denominador de f " entre q.

En cambio, si no se simplificara f ", de igualarla a cero se deduciría que también q habría de ser cero, lo que supondría tomar como posibles puntos de inflexión a las raíces del denominador de f, que corresponden a puntos no pertenecientes a su dominio. ¿Cuántas veces hemos observado corrigiendo un ejercicio escrito que, por la causa indicada, entre los puntos de inflexión figuren puntos no pertenecientes al dominio de la función?

5.3 Utilización del Cálculo diferencial en el dibujo de la gráfica de funciones prácticamente conocidas, sin que sea necesario para ello el uso de este recurso (nos referimos en concreto a funciones tales como: $y = (x-1)/x$, $y = \sqrt[5]{x} + 2$, etc., cuya representación puede realizarse mediante procedimientos elementales a partir de otras conocidas).

Previamente al examen de esta situación digamos de entrada que, antes de iniciarse en las aplicaciones del Cálculo diferencial, los alumnos ya han representado funciones, aunque prácticamente con el único procedimiento de dar valores. Empiezan con la recta (al principio, hallando muchos puntos de la misma -probablemente demasiados- hasta que al fin llegan a necesitar sólo dos) y luego con la parábola, a la que a veces se acompaña la hipérbola $y = 1/x$; más tarde dibujarán también las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas. Pero, en cuanto se comienza a utilizar el Cálculo para resolver estos ejercicios, se pasa de golpe, de dar valores, a emplear toda su “artillería pesada” para la obtención de máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, concavidad ..., sin permanecer un tiempo en un estado intermedio ni preguntarse qué funciones podrían dibujarse -como por ejemplo las que indicábamos más arriba, y en general todas las de los tipos: $y = ax^n + b$, $y = a/x^n + b$, $y = a\sqrt[n]{x} + b$ - con tan solo los recursos elementales conocidos con anterioridad.

De cualquier modo, creemos que el principal culpable de estos automatismos es el profesor, que puede “obligar” a que se apliquen indiscriminadamente las derivadas aun en casos como esos últimos, desvinculando -como en otras tantas ocasiones- este nuevo procedimiento de los ya estudiados por el alumno, e incluso haciendo “tabla rasa” de sus antiguos conocimientos. Quisiéramos, sin embargo, animar abiertamente al profesor a que en vez de proceder de esa manera, y antes de empezar a valerse de la ayuda del Cálculo diferencial, recordara lo ya sabido por los estudiantes y, juntamente con ellos, elaborara un catálogo de esas funciones elementales y razonara sobre la posible extensión de su ámbito de aplicación.

5.4 Otros diferentes problemas de distinta etiología que podrían englobarse en esta sección, y que suelen resolverse automáticamente sin reflexionar antes de actuar.

Indicamos a continuación algunos ejemplos, que no parece necesario tener que comentar.

Ejercicio 15.- Resolver la ecuación: $2\,sen x + 3\,sen\,2x = 12$.

Ejercicio 16.- Calcular: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx$

Ejercicio 17.- Dibujar la curva de ecuaciones paramétricas: $x = t$, $y = 1 - t$
(en primer curso de una Licenciatura en Matemáticas, Física o Ingeniería, donde generalmente se estudian las curvas en forma paramétrica).

6 Situación paradójica

Si bien lo que vamos a exponer a continuación no es exactamente un automatismo -en todo caso sería más bien lo contrario-, nos ha parecido incluirlo en este estudio por su innegable relación con ese fenómeno. Nos referimos en concreto a que, como se ha visto a lo largo del artículo, mientras que es frecuente el uso indiscriminado de reglas, entre lo que posiblemente quepa incluir la aplicación de teoremas o resultados a casos particulares sin que algunas veces sea necesario o incluso conveniente; en cambio, también suele ser habitual que se omita o no se observe esa particularización en el supuesto más sencillo de todos: el que podríamos llamar caso límite.

Por otra parte, sin embargo no hay duda de que esta forma de actuar procede de otra causa bien distinta de la que origina los automatismos. Así, según nos parece, estaría motivada por la dificultad de contemplar ese caso especial como uno cualquiera más (algo posiblemente del estilo a lo que significa, por ejemplo, considerar el cero como un sumando o el uno como un factor).

A la vista de ello, nos permitimos sugerir la conveniencia de analizar este tipo de situaciones y de reflexionar sobre las mismas, pues pensamos que el profesor no suele ser consciente de las dificultades que pueden presentar para el alumno.

Finalizaremos exponiendo algunos ejemplos:

a) Factorizar polinomios sin término independiente o, lo que es lo mismo, considerar que $x = 0$ también puede ser raíz de una ecuación.

b) Admitir que una sucesión constante es una progresión aritmética de diferencia 0, y también una progresión geométrica de razón 1.

c) Tener en cuenta las dificultades que conlleva hallar e interpretar las expresiones de las ecuaciones de los ejes de coordenadas en el plano y de los ejes y planos coordenados en el espacio.

d) Considerar un número real como un número complejo y calcular su módulo.

e) Hallar la forma polar de los números complejos 1, -1, i,$-i$.

f) Extender la noción y el cálculo de las coordenadas del baricentro de un polígono al caso de un segmento.

g) Calcular la ecuación de la recta tangente a una recta en uno cualquiera de sus puntos.

h) Aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius en el caso de que el sistema lineal esté formado por tan solo una ecuación con una incógnita.

i) Hallar un conjunto de vectores que sean linealmente independientes, un sistema de generadores y una base en un espacio vectorial de dimensión 1.

j) Estudiar el conjunto $Z/(1)$.

Bibliografía

BOUVIER, A. et al. (1986), Didactique des mathématiques. Paris: Cedic/Nathan.
BUJANDA, M. P. (1981), Tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática. Madrid: SM Ediciones.
FERNÁNDEZ, J. A. (2000), Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. Barcelona: Monografías Escuela Española/Ciss Praxis Educación.
GRUPO CONSTRUIR LAS MATEMÁTICAS (2000), "Isoperímetros en la Grecia Antigua". Suma, n^o 34, pp. 95-98.
- (2001 a), "Isoperímetros: Ficha didáctica en geometría. Métodos trigonométricos". Suma, n^o 36, pp. 101-106.
- (2001 b), "Isoperímetros: El panal de abejas y Fejes Coth". Suma, n^o 38, p. 95-97.
NEWMAN, J. R. (1980), Sigma. El mundo de las Matemáticas, Vol. 6, 8^a ed. Barcelona: Grijalbo.
PALAREA, M. M. y SOCAS, M. M. (1995), "Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos". Suma, n^o 20, pp. 29-35.
PERALTA, J. (1994), "Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución". Educación Matemática, Vol. 6, n^o 2, pp. 56-71.

PERALTA, J. (1995), Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática. Madrid: Huerga y Fierro.
PERALTA, J. (1999), "Algunas ideas para la resolución de ecuaciones". Suma, n^o 32, pp. 79-89.
PERALTA, J. (2004), "Una caracterización de obtenida al resolver un problema en clase". Suma, n^o 45, pp. 59-67.
PERELMAN, Y. (1978), Álgebra recreativa. Moscú: Mir.
POLYA, G. (1986), Cómo plantear y resolver problemas, 13^a ed. México: Trillas.
SCHOENFELD, A. (1985), Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.
SOCAS, M. (1997), "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en La Educación Secundaria, en La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria, Luis Rico (Coord.), ICE Universidad de Barcelona/Horsori, pp. 125-154.

Javier Peralta
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
Cantoblanco, 28049 Madrid, España
javier.peralta@uam.es