DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

La integral de Lebesgue un poco más de cien años después

Diomedes Bárcenas

Resumen

Este es un artículo divulgativo donde pretendemos exponer algunos aspectos de la influencia de la integral de Lebesgue en el desarrollo de algunas disciplinas matemáticas como el análisis de Fourier, teoría general de la medida, teoría de las probabilidades, cálculo de primitivas y análisis funcional.

El nacimiento de la integral de Lebesgue ocurrió en un momento en que tres problemas fundamentales ocupaban el ambiente de los matemáticos

i) El problema de la medida.

ii) El cálculo de primitivas.

iii) Convergencia de series trigonométricas.

La aparición de la integral de Lebesgue contribuyó enormemente al esclarecimiento y posterior desarrollo en la dirección de cada uno de estos problemas.

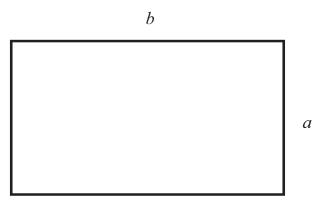
La integral de Lebesgue desde su aparición se enseñoreó como la integral de la investigación matemática del siglo **XX** con un surtido inmenso de posibilidades, entre las que es digno de destacarse su importancia en el análisis funcional, teoría de las probabilidades, análisis de Fourier e incluso un error afortunado cuya corrección permitió la introducción de nuevas teorías matemáticas.

Esta integral apareció en escena con una nota enviada a Comptes Rendu por Lebesgue la cual fue publicada en 1901 [33]. Esta nota que llevaba por título "Sur une généralisation de l'intégrale définie", sería desarrollada completamente por el autor en 1902 en su tesis doctoral.

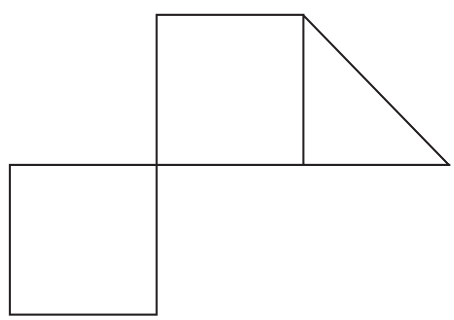
Para esa época, la integral de Riemann colmaba la escena de forma que, para ese entonces, hablar de funciones integrables era referirse a la integral de Riemann; una muy buena razón para que Lebesgue llamase funciones sumables a las que hoy conocemos como funciones Lebesgue integrables; gracias a que, según nos cuenta J. P. Kahane [26], Hardy y Litlewood acuñaran el término. La notación L^1 para designar el espacio de las funciones Lebesgue integrables fue un tributo de Banach a Lebesgue.

i) **El problema de la medida**
Hemos leído alguna vez que los griegos no rehuyeron ningún problema por difícil que éste fuera y el tema que nos ocupa no parece ser la excepción que confirme la regla. Partiendo del cálculo de áreas desarrollaremos la idea de medida usando algunos hechos primitivos conocidos por los griegos.

- El área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab.
- El área de un rectángulo es invariante por traslaciones.

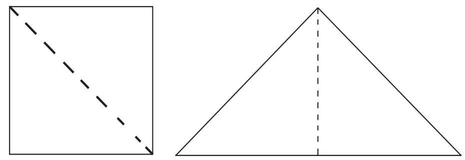


Definición *Un conjunto se llama* ***elemental*** *si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos.*
Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental.



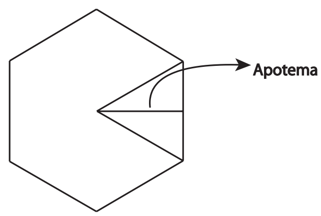
Axioma: *El área de un conjunto elemental es aditiva.*
Si A y B son conjuntos elementales tal que $A \cap B$ es vacío, un punto o un segmento, entonces el área de $A \cup B$ es igual a la suma del área de A más el área de B.
Esta axiomatización fue suficiente para que los griegos calcularan el área de las figuras elementales como por ejemplo:

El área de un triángulo es $\dfrac{base \times altura}{2}$



En general, el área de un polígono regular es

$$\frac{\textbf{perímetro} \times \textbf{apotema}}{2}$$



El método de exhausción (agotamiento) permitió a Arquímedes calcular el área de un círculo mediante aproximaciones sucesivas por polígonos inscritos y circunscritos, que como sabemos consiste en inscribir y circunscribir en la circunferencia polígonos regulares del mismo número de lados y observar que cuando el número de lados tiende a infinito, tanto las áreas de los polígonos circunscrito como la de los inscritos tienden a un mismo límite, al cual definimos como *área del círculo.*

Mediante el método de exhausción, Arquímedes fue capaz también de calcular el área de un arco de parábola.

Con la matemática griega, no hay problemas en demostrar que el área de una figura (si existe) es invariante por movimientos. Queda pendiente el problema de si toda figura en el plano es **medible**; es decir, si toda figura geométrica tiene área.

Resumiendo, con los griegos estamos en la siguiente situación: Si $\mathcal{M}$ son los conjuntos medibles del plano, tenemos una función de área

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{M} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longrightarrow \alpha(A) \end{aligned}$$

que satisface $\alpha(A \cup B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$; α es invariante por movimientos y si A es un rectángulo de lados a y b, entonces $\alpha(A) = ab$, quedando pendiente el problema de si todo conjunto del plano será medible.

En términos modernos, con los griegos se introduce la necesidad de una medida finitamente aditiva e invariante por movimientos.

Los orígenes de la integral de Riemann pueden rastrearse hasta encontrar un precursor en Arquímedes; pues, tratándose de esa integral, si observamos cuidadosamente la cobertura de la circunferencia en consideración mediante polígonos regulares, no nos será difícil persuadirnos de que ello antecede a las sumas inferior y superior de Darboux.

Dejemos de lado, por ahora, el problema del área de una figura geométrica llamando a esta área **medida** y estableciendo que las propiedades y definición de área se pueden extender hasta $\mathbb{R}^n$ y queda pendiente también la pregunta de si será posible asignar a cada subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ una medida α que sea finitamente aditiva, invariante por movimientos y satisfaga

$$\alpha A = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

para cada rectángulo $A = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$.
La integral de Riemann permite ampliar el conocimiento de los conjuntos medibles ya que si f es una función integrable en el sentido de Riemann, la integral de $|f|$ representa el área de la figura encerrada por la gráfica de $|f|$ y el eje de las abscisas, una noción que puede extenderse hasta el espacio de n dimensiones.

Mediante la integración de Riemann, la longitud de un conjunto elemental de la recta (aquellos que se expresan como la unión finita de intervalos) se puede obtener integrando su función característica.

ii) Aunque nuestra costumbre es motivar la enseñanza del cálculo integral mediante el cálculo de áreas, ésta también puede motivarse mediante la búsqueda de soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(x)$, algo posible y hasta natural en el estudio de la evolución de un fenómeno físico, un hecho que interesó sobremanera a Isaac Newton. Se trata del problema del cálculo de primitivas; es decir, se trata de hallar una función y tal que $y' = f(x)$.

El cálculo de primitivas resultó ser una herramienta espectacular gracias al Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann, el cual enunciamos y demostramos en los siguientes términos:

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable con* f' *integrable. Entonces* $\forall t \in [a, b]$*, se tiene que*

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(s)ds.$$

Demostración. Sea $\{x_o, \cdots, x_n\}$ una partición de $[a, t]$. Entonces

$$\begin{aligned} f(t) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) \\ &\overset{\text{T.V.M de Lagrange}}{=} \sum_{i=1}^{n} f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \to \int_a^t f'(s)ds \end{aligned}$$

□

El Teorema Fundamental del Cálculo representa una gran ventaja porque establece una estrecha relación entre el cálculo de áreas y el cálculo de primitivas, pero deja huecos en este último hecho como demostrara Vito Volterra en 1885 al construir una función derivable en $[a, b]$ con derivada acotada pero no integrable en el sentido de Riemann; un hecho sin duda interesante.

Ignoramos la demostración original de Volterra, pues la que ha llegado a quien esto escribe ([18], [40]), usa la caracterización de Lebesgue de las funciones Riemann integrables como aquellas cuyos puntos de discontinuidades tienen medida de Lebesgue igual a cero; una demostración que no pudo ser la originalmente dada por Volterra porque el ejemplo antecede en casi dos décadas a la teoría de Lebesgue.

iii) Series Trigonométricas. Los orígenes de las series trigonométricas se pueden trazar hasta llegar a Euler y Daniel Bernoulli; éste último propuso series trigonométricas de la forma

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{l} \right)$$

como solución a la ecuación de la cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

ya que cualquier curva tomada como valor inicial en el intervalo $[0, l]$ puede ser representada en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

Bajo la influencia de la invención de la máquina de vapor, Fourier desarrolló un modelo matemático exitoso para entender y predecir la difusión del calor, expresándolo en la siguiente ecuación en derivadas parciales para el caso de una dimensión:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

para cuya solución pretendió que toda función se expresase como una serie trigonométrica.

En términos generales, los problemas generados por los trabajos de Fourier son los siguientes:

(**A**) Si f es una función acotada en un intervalo $(-a, a)$, entonces f ¿Puede expresarse como una serie trigonométrica en los siguientes términos:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ b_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)?. \end{aligned}$$

(**B**) ¿Bajo cuáles condiciones es una función representable como una serie trigonométrica integrable término a término?
En otras palabras:

$$\text{si} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

¿Cuándo es permisible la operación

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-a}^{a} U_n dx \ ?$$

Fourier vivió convencido de la respuesta afirmativa a cada uno de estos problemas aunque sin precisar el sentido de la integración aludida. Un gran avance en esta dirección se obtiene mediante la integral de Lebesgue.

Si la respuesta a la pregunta (**B**) es afirmativa cuando cada $U_n \geq 0$ entonces ella es válida cuando

$$f = \chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n}$$

donde los conjuntos E_n son conjuntos disjuntos dos a dos y por lo tanto, la medida tendría que ser numerablemente aditiva. En efecto, si

$$f = \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n},$$

entonces si los conjuntos E_i son disjuntos dos a dos, se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)$$

y en este caso,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n);$$

lo cual nos dice que cualquier medida que nos permita acercarnos a la solución del problema (**B**) tiene que ser numerablemente aditiva; un hecho que satisface la medida de Lebesgue.

Mediante teoremas de convergencia se resuelve positivamente el problema (**B**) cuando

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n; \qquad U_n \geq 0.$$

El problema se resuelve positivamente usando el Teorema de la Convergencia Monótona, mientras que si $\exists g \in L^1(\mu)$ tal que $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \leq g \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces el Teorema de la Convergencia Dominada nos permite concluir que

$$\int_{-a}^{a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-a}^{a} f_n.$$

En este marco teórico aparece la integral de Lebesgue y en estas notas pretendemos hablar sobre el legado para la posteridad de la integral de Lebesgue en diversas ramas de la matemática como

1. Análisis de Fourier.
2. Teoría General de la Medida.
3. Teoría de Probabilidades.
4. Cálculo de Primitivas.
5. Análisis Funcional.
6. Conjuntos Analíticos.

1. Análisis de Fourier

Como hemos visto, la aparición de la integral de Lebesgue con sus teoremas de convergencia dió ímpetu al análisis de Fourier, el cual consiste en responder, en los términos más clásicos, dos preguntas estrechamente relacionadas:

¿Es $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cos \pi x}{a} + b_n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$, donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de f?

Si la respuesta es afirmativa, ¿Cuándo es f integrable término a término?. Este problema está relacionado íntimamente con la integral de Lebesgue y hoy día el análisis de Fourier se describe en términos de dicha integral; por ejemplo, el teorema de Plancherel que afirma que existe una única transformación lineal y acotada

$$\begin{aligned} T : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

para todo $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ con $\|Tf\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2 \ \forall \ f \in L_2(\mathbb{R})$ donde $\hat{f}$ denota la transformada de Fourier de f, nos dice que L_2 es uno de los espacios de funciones más adecuados para el análisis de Fourier.

Las investigaciones de Wiener contribuyeron al conocimiento de las propiedades del análisis de Fourier, al demostrarse que $L_1(\mathbb{R})$ es un álgebra con la multiplicación definida como la convolución.

Para poner las cosas en su contexto, Fourier vivió convencido de que toda función converge a su serie de Fourier, pero en 1873 P. G. Du Bois Reymond probó la existencia de funciones continuas cuya serie de Fourier no converge en un punto y en 1966 J. P. Kahane y I. Katznelson probaron que el conjunto de puntos donde diverge la serie de Fourier de una función continua tiene medida de Lebegue cero; mientras que ya antes, en 1936, Kolmogorov había demostrado que existe $f \in L^1[-\pi, \pi]$ cuya serie de Fourier no converge en ningún punto; y en 1966, Carlesson demostró que en $L^2[-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de una función converge casi en todas partes.

El problema de la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función $f \in L^p[-\pi, \pi]$, $1 < p < \infty$, quedó resuelto en forma definitiva por R. Hunt quien demostró en 1967 que la serie de Fourier de una función $f \in L^p[-\pi, \pi]$ casi en todas partes.

Los resultados precedentes sobre la divergencia admiten importantes generalizaciones en términos de categoría [25], [27]: una propiedad se llama **genérica** o **cuasi segura**, si dicha propiedad es válida sobre un G_δ denso. En este caso, decimos que la propiedad es válida **cuasi siempre** o cuasi en todas partes. Con esta terminología se obtiene lo siguiente:

En $[0, 2\pi]$ cuasi toda función continua tiene la propiedad de que su serie de Fourier diverge cuasi en todas partes.

Dado un conjunto $E \subset [0, 2\pi]$, F_σ de medida cero, entonces cuasi todas la series de Fourier de funciones continuas divergen sobre E.

En términos de categoría de Baire el teorema de Kolmogorov se generaliza como sigue:

Cuasi todas las series de Fourier en L^1 divergen casi siempre.

Finalizamos estos comentarios sobre el análisis de Fourier haciendo la observación de que en el año 2003, J. Alexopoulos y E. Sprague [1] demostraron el siguiente resultado en el marco de el Análisis Armónico Diádico.

*Si φ es una **N**-función, f pertenece al espacio de Orlicz $L^\varphi[0, 1]$ y*

$$S_n f = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$$

con $a_i = \int_0^1 f w_i$, entonces si $S_n f$ converge se tiene que $f \in E^\varphi[0, 1]$, donde $E^\varphi[0, 1]$ denota la clausura de las funciones continuas en $L^\varphi[0, 1]$ con la norma de Orlicz y ω_i denota i-ésima función de Walsh.

2. Teoría General de La Medida

Para Lebesgue la medida exterior de un conjunto A se define como

$$\text{ínf} \sum l(I_i) = m^*(A)$$

donde $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, con los $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ intervalos abiertos y la medida interior se define como

$$m_*(A) = \sup m^*(B); \qquad B \subset A,\ B \text{ cerrado}$$

y un conjunto A es *medible* si y sólo si $m^*(A) = m_*(A)$.

La definición de Lebesgue es sustituida por la siguiente por Caratheodory:

Un conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ es medible si y sólo si para cada $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}$ se cumple que $\mathbf{m}^*(\mathbf{E}) = \mathbf{m}^*(\mathbf{A} \cap \mathbf{E}) + \mathbf{m}^*(\mathbf{A}^\mathbf{c} \cap \mathbf{E})$

El concepto de conjunto medible según Caratheodory conduce a métodos de mensurabilidad de conjuntos conocidos como métodos I y II de Caratheodory, los cuales a su vez conducen al importante concepto de medidas de Hausdorff, las cuales han adquirido importancia desde el descubrimiento de los conjuntos fractales.

El método I tiene la dificultad, de que medidas exteriores construidas mediante este método no garantiza que los borelianos sean medibles ver Edgar [17].

Las medidas de Hausdorff construidas mediante el método II de Caratheodory evitan esta anomalía y permiten la construcción de las medidas de Hausdorff como una generalización de la medida n-dimensional de Lebesgue; es de observar que la medida n-dimensional de Hausdorff es un múltiplo K_n de la medida n-dimensional de Lebesgue [41]: Si A es un boreliano de $\mathbb{R}^n$, m_n la medida n-dimensional de Lebesgue y μ_n la medida n-dimensional de Hausdorff, entonces

$$\mu_n(A) = K_n m_n(A),$$

donde

$$K_n = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right).$$

Es de observar también que las medidas de Hausdorff permiten generalizar el concepto de dimensión hasta espacios métricos; así, por ejemplo, tenemos que la dimensión del conjunto de Cantor es $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

La invariabilidad por traslaciones de la integral de Lebesgue fue extendida por Alfred Haar hasta grupos topológicos localmente compactos, lo que muestra que el álgebra y en particular la teoría de grupos no ha sido insensible a la teoría de Lebesgue.

Las ideas de Haar se pueden extender hasta espacios homogeneos.

Sea G un grupo topológico compacto y Ω un espacio de Hausdorff compacto. Decimos que G **actúa transitivamente sobre** Ω si existe una aplicación continua

$$\begin{array}{rcl} G \times \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (g, \omega) & \longrightarrow & g(\omega) \end{array}$$

que satisface

(i) $e(\omega) = \omega$, donde $\omega \in \Omega$ y e es la identidad en G.

(ii) $g_1 g_2(\omega) = g_1(g_2(\omega))$, $(g_1, g_2 \in G, \quad \omega \in \Omega)$

(iii) $\omega_1, \omega_2 \in \Omega \Rightarrow \exists g \in G : g(\omega_1) = \omega_2$.

Es importante observar que si G actúa transitivamente sobre Ω, cada $g \in G$ es un homeomorfismo sobre Ω: $\omega \longrightarrow g(\omega)$ es continua con inversa $g^{-1}(\omega)$.

Teorema 2.1. *(**A. Weil**) Supongamos que G actúa transitivamente sobre Ω. Entonces existe un subgrupo cerrado $H \subset G$ tal que G/H y Ω son homeomorfismos bajo la acción de G.*

Un bosquejo de la prueba es éste:

Fijemos $\omega_o \in \Omega$. $H = \{g \in G : \ g(\omega_1) = \omega_o\}$ es un subgrupo cerrado de G y $\varphi(gH) = g(\omega_o)$ es el isomorfismo buscado.

Teorema 2.2. *Supongamos que el grupo compacto G actúa transitivamente sobre el compacto Ω. Existe una única medida de probabilidad η G-invariante y definida sobre Ω.*

Demostración. Sea $G \times \Omega \longrightarrow \Omega$. $H \subset G$ y $G/H \cong \Omega$. G tiene la medida de Haar normalizada μ. En $G|H$, definimos $\nu(E) = \mu(q^{-1}(E))$, q es la aplicación cociente ν es una medida de Haar normalizada en $G|H$.

Pongamos $\eta(E) = \nu(\varphi^{-1}(E))$. □

3. Probabilidades

Para la época de la aparición de la integral de Lebesgue, Borel estaba trabajando en la búsqueda de una medida de probabilidad en $[0, 1]$ que a cada intervalo abierto le asignase su longitud. Es la época del nacimiento de la σ-álgebra de Borel como la mínima σ-álgebra que contiene los intervalos de $[0, 1]$; por otra parte, la regularidad de la medida de Lebesgue implica que cualquier conjunto medible Lebesgue es un conjunto medible Borel unido con un conjunto de medida cero. Por esta razón, Borel opinó que el aporte de Lebesgue a la teoría de la medida fue introducir los conjuntos nulos. Esto molestó mucho a Lebesgue quien reaccionó con acrimonia y Kahane [26] al respecto trata de entender a Lebesgue porque además de padecer para el momento problemas familiares y financieros, estaba agobiado en un liceo de Nancy con una abrumadora carga docente de 21 horas semanales.

Según cuenta Kahane, [26], [24], la influencia de Lebesgue sobre la teoría de probabilidades sigue dos vías; la de Hugo Steinhauss, y la de Norbert Wiener en la misma década de los años 20 y 30. Por ejemplo, según Kahane, la idea de Steinhauss es la de fundamentar la teoría de probabilidades en el intervalo $(0, 1)$, para quien un evento sera un conjunto medible, una variable aleatoria una función medible cuya esperanza es la integral de Lebesgue de esa función, en caso que dicha integral exista.

El punto de vista adoptado por Kolmogorov es el aceptado por los probabilistas; Kolmogorov sustituye el espacio $[0, 1]$ de Steinhauss por la tripleta Ω, Σ, P donde Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y P una medida con $P(\Omega) = 1$.

Hay cierto consenso en que el gran éxito de la **teoría de medida** fue su uso en la **axiomatización de la teoría de las probabilidades**.

El programa de Wiener consistió en la búsqueda de una teoría matemática para explicar el movimiento Browniano, donde las trayectorias son continuas casi siempre pero no diferenciables. Hoy día el movimiento browniano encuentra apliaciones en matemáticas financieras a través de la teoría de martingalas y la integral de Ito [30].

Las martingalas nacen en probabilidades y ha jugado un papel unificador en las diferentes teorías aquí mencionadas; ya que el teorema de Doob que establece que toda martingala uniformemente integrable en $L_1(P)$, (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad, es convergente en norma, es equivalente al teorema de Radon-Nikodym, el cual es uno de los resultados más importantes de la teoría general de la medida, y a su vez es equivalente al teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue, gracias a las martingalas en análisis funcional la propiedad de Radon-Nikodym en espacios de Banach se ha convertido en una propiedad geométrica.

Para mencionar un hecho relativamente reciente en análisis de Fourier, el teorema de Doob ha sido utilizado por Alexopoulos y Sprague en [1], para caracterizar las series de Walsh que son series de Walsh-Fourier en $L^1[0,1]$.

4. Cálculo de Primitivas

La integral de Lebesgue proporcionó un gran avance en la solución al problema de la Primitiva en los términos siguientes:

Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si f es derivable casi en todas partes de $[a,b]$, f' es integrable y para cada $t \in [a,b]$,

$$f(t) - f(a) = \int_a^t f'(s)ds.$$

Lebesgue demostró que toda derivada acotada es integrable pero que existen derivadas no acotadas que no son integrables.

El teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue tiene su contraparte en la teoría general de la medida: El teorema de Radon Nikodym, el cual admite una formulación probabilística en términos de martingalas ([2] [11] [36] [45]).

El teorema de Radon Nikodym implica la existencia y la convergencia de martingalas uniformemente integrales pero hay más: El teorema de Radon Nikodym es equivalente al teorema de convergencia de martingalas uniformemente integrables.

El problema de la primitiva, el cual consiste en resolver el problema de Newton, lo resolvieron en 1912 Denjoy y en 1923 Perron, construyendo sendas integrales que a la postre resultaron ser equivalentes y donde toda derivada es integrable. De manera sorprendente en la segunda mitad del siglo XX; Henstock [21] y Kurzweil [32] en forma independiente definieron una integral que generaliza las integrales de Riemann y Lebesgue y es más fácil de definir que la integral de Lebesgue porque no usa el aparataje de la teoría de medida. Otra sorpresa es que esta integral coincide con la de Denjoy y en consecuencia, toda derivada es integrable.

En 1996 Benedetto Bongiorno [7] construyó una integral, que llamó $C-$integral, y, que resuelve el problema de la primitiva. Más tarde en el año 2000, Bongiorno, Luisa Piazza y David Preiss [9] demostraron que la integral de Bongiorno, la $C-$integral, es la más pequeña que resuelve el problema de la primitiva y contiene a la integral de Lebesgue, en el sentido de que cualquier integral que resuelva el problema de la primitiva y contenga a la integral de Lebesgue, también contiene a la de Bongiorno.

Para dar una idea del dinamismo de la investigación en esta área del análisis, reportamos que en 1966, Rudin [42] expresó que la integral de Denjoy carecía de interés en análisis por no ser una integral absolutamente convergente; mientras que 30 años más tarde (en 1996) [3] Bartle afirma que la integral de Lebesgue se había oficializado como la integral de la investigación matemática, pero que ya era tiempo de ser sustituida en la enseñanza por la integral generalizada de Riemann, refiriéndose a la integral de Henstock-Kurzweil; más general y más fácil de definir que la integral de Lebesgue.

En su apología a la integral de Henstock-Kurzweil en 2001 expresa Bartle [4] que aunque para esta integral no es válido el Lema de Riemann Lebesgue, se han obtenido resultados interesantes en análisis armónico.

Una buena exposición histórica de esta integral se encuentra en [8], mientras que [4] resulta un excelente texto sobre el tema.

5. Análisis Funcional

El aporte de la teoría de Lebesgue al análisis funcional es inmenso. Los espacios l_2 anteceden a dicha integral, pero cuando Riesz y Fisher caracterizan los coeficientes de Fourier de una función en $L^2[0, 2\pi]$ como aquellas sucesiones tales que el cuadrado de sus valores absolutos forman una serie convergente, estableciendo que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2,$$

donde c_n son los coeficientes de Fourier de f, lo que establecen es que la transformada de Fourier es un isomorfismo entre los espacios de Hilbert l_2 y $L^2[0, 2\pi]$

dos espacios que, como es sabido, son espacios de Lebesgue.

Una vez que tenemos los espacios de Banach a nuestra disposición (en particular los espacios de Lebesgue) es posible intentar generalizaciones de la integral de Lebesgue hasta estos espacios; tal es el caso de la integral de Bochner, para la cual no es válido el **Teorema Fundamental del Cálculo**. Al tratar de resolver este problema, Clarkson, según leemos en Diestel y Uhl [13], introdujo los espacios uniformemente convexos, los cuales han sido fuente de inspiración para muchos estudiosos de la geometría de los espacios de Banach.

Hoy sabemos que los espacios de Banach para los cuales es válido el teorema fundamental del cálculo son aquellos que tienen la propiedad de Radon Nikodym; los cuales han proporcionado una amplia gama de problemas de investigación y entre ellos no escapa el análisis convexo: **Dado un espacio de Banach real X, toda función convexa y continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en un G_δ denso si y sólo si X^* tiene la propiedad de Radon Nikodym.**

Un retículo de Banach se llama L**-espacio** si para cada par de vectores x, y en X se cumple que

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Es válido el siguiente resultado:

Todo L-espacio es isomorfo a un espacio de Lebesgue.

Pero no todo espacio de Banach es un L-espacio, como por ejemplo el caso de M-espacio. **Un M-espacio** es un retículo de Banach X que satisface, $x, y \in X$ con

$$x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \|x\| \vee \|y\|.$$

Ejemplos de M-espacios son los espacios $C(K)$, con K compacto; y hay un inverso parcial que afirma que todo M-espacio separable es un espacio de tipo $C(K)$ (El inverso en general no es cierto [5],[6]). Aunque los M-espacios no son L-espacios, hay una bella relación de dualidad entre ellos, puesta de manifiesto por Kakutani.

El dual de un L espacio es un M-espacio

El dual de un M espacio es un L-espacio

Particularmente importante es el caso del teorema de representación de Riesz: El dual de $C(K)$ es $M(K)$, donde $M(K)$ denota las medidas de Borel sobre $C(K)$; y en el caso en que el compacto K es el intervalo cerrado $[a, b]$, el Teorema de Representación de Riesz expresa que $C[a, b]^*$ son las medidas de Lebesgue-Stieltjes.

La dualidad entre $C[a, b]$ y las medidas de Lebesgue-Stieltjes la expresamos en los términos siguientes:

Sea $\wedge \in C[a, b]^*$. $\exists\, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada tal que $\wedge(f) = \int_a^b f dg$.

La dualidad recién mencionada la usó Bourbaki para la siguiente definición de integral en $[a, b]$.

Una **integral** en $[a, b]$ es una función $\wedge : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua. El valor $\wedge(f)$ se llama la **integral de** f entre a y b.

Según narra Kahane [26] L. Schwartz se inspiró en la integral de Bourbaki para la teoría de distribuciones, que más tarde le valiera la medalla field, una teoría de gran importancia en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales y análisis funcional.

La teoría de Lebesgue ofrece un marco teórico importante para el estudio de los espacios de Sobolev, que en cierta forma son un caso especial de distribución.

Unos de los resultado mías relevantes del análisis funcional lo constituye el teorema Dvoretzki–Rogers:

Sea X un espacio de Banach. Toda serie incondicionalmente convergente en X es absolutamente convergente si y sólo si X tiene dimensión finita.

En la demostración del teorema se usan argumentos de teoría de la medida ([19], [39]) el cual a su vez se usa para probar que la coincidencia de la integral de Bochner con la integral de Pettis caracteriza a los espacios de dimensión finita ([44])

6. El error afortunado de Lebesgue

Finalizamos hablando del error afortunado de Lebesgue. En una de sus publicaciones Lebesgue afirmó que la imagen mediante una función continua de un conjunto de Borel es un conjunto de Borel; particularmente, la proyección de un boreliano de $\mathbb{R}^2$, es un boreliano de la recta.

El matemático ruso M. Y. Souslin mostró mediante un ejemplo la falsedad de esta aseveración y definió la familia de los conjuntos analíticos, una familia comprendida entre los conjuntos de Lebesgue y los conjuntos de Borel; la familia de los conjuntos analíticos no forman una σ-álgebra porque existen conjuntos analíticos cuyo complemento no es analítico.

En concreto tenemos que un conjunto es **analítico** si es imagen continua de un espacio polaco; es decir, un subconjunto A de un espacio topológico Y es analítico si existe un espacio topológico metrizable y completo X tal que $f(X) = A$. Si denotamos por $\mathcal{N}$ al conjunto de todas las sucesiones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y por I al conjunto de todos los números irracionales contenidos en$[0, 1]$ tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos analíticos [29].

i) A es analítico

ii) A es la imagen continua de I

iii) A es la imagen continua de $\mathcal{N}$

para los interesados en los conjuntos analíticos [29] es una buena referencia.

En cuanto al título de esta sección, proviene de un comentario –según Dudley [14]– hecho por Lebesgue en el prólogo de un libro sobre conjuntos analíticos escrito por Luzin en 1930; donde escribió Lebesgue que el origen de la teoría fue producto de un grosero error ... un error fructífero cometido por él mismo.

Agradecemos a los árbitros las sugerencias que permitieron mejorar la presentación de este artículo.

Referencias

[1] J. Alexopolus and E. Sprague, Some Criteria to determine when a Walsh series is a Walsh-Fourier Series, Q. M. 26, 3 (2003) 267-278.

[2] D. Bárcenas, The Fundamental Theorem of Calculus for Lebesgue Integral, Divulgaciones Matemáticas, 8, 1 (2000) 75-85.

[3] R. G. Bartle, Return to the Riemann Integral, Amer. Mathematical Monthly, 103, 8 (1996) 625-632.

[4] R. G. Bartle, A Modern Theory of Integration, GSM, 32, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

[5] Y. Benyamini, Separable G-Space are Isomorphic to $C(K)$ Spaces, Israel J. Math., 14 (1973) 287-293.

[6] Y. Benyamini, An M-Space which is not Isomorphic to $C(K)$ Spaces, Israel J. Math., 28 (1977) 98-102.

[7] B. Bongiorno, Un Nuovo Integrale per il Problema delle Primitive, Le Matematiche, 7, 2, (1997), 299-313

[8] B. Bongiorno, The Henstock-Kurzweil Integral, Handbook of Measure Theory, Edited By E. Pap., Elsiever, Amsterdam (2002) 587-615.

[9] B. Bongiorno, L. Piazza and D. Preis, Constructive Minimal Integral which Includes Lebesgue Integrable Functions and Derivatives, London Math. Soc., 2, 62, (2000), 117-129.

[10] N. Bourbaki, Intégration, Hermann Paris, (1965) chs 1-4. (1967) chs 5-6.

[11] R. C. Bradley, An Elementary Treatment of the Radon Nikodym Derivative, Amer. Math. Monthly, 96, 5 (1989) 437-440.

[12] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, Absolutely suming Operators, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[13] J. Diestel and J. Uhl, Vector Measueres, Math. Surveys Num. 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1977).

[14] R. Dudley, Real Analysis and Probability, Wadsworth and Brooks, Pacific Grove, California, 1989.

[15] D. van Dulst, The Geometry of Banach Spaces whith the Radon Nikodym Property, Rediconti del Circolo Matematico di Palermo (1985).

[16] A. Dovoretzki and C. A. Rogers, Absolute and Unconditional X Convergence in Normed Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci., USA (1950) 192-197.

[17] G. Edgard, Measure, Topology and Fractal Geometry, UTM, Springer-Verlag, New York (1990).

[18] R. Gordon, The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, GSM, Vol 4, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1994).

[19] P. Habala, P. Hajek, and V. Zizler, Introduction to Banach Spaces, Vol. I, II, Matfypress, Prague (1996).

[20] T Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration, Chelsea Publishing Company, New York (1975).

[21] R. Henstock, Theory of Integration, Buttherworths, London (1963).

[22] E. Hewitt and K. Stromberg, Real and Abstract Analisys, GTM, Springer-Verlag, New York (1965).

[23] S. Igari, Real Analysis with an Introduction to Wavwlwt Theory, Translations of Mathematical Monographs, vol 177, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[24] J. P Kahane, L'intégrale de Lebesgue au Cours du Vingtième Siècle, Panoramas et Synthèses, 18 (2004) 1-16.

[25] J. P Kahane, Probabilities and Baire's Theory in Harmonic Analysis, J. S. Bynes (ed) Twentieth Century Harmonic Analysis a Celebration, Kluwer, Netherlands (2001) 57-72.

[26] J. P. Kahane, Naissance et postérité de l'Integrale de Lebesgue, Gaz. Math. 89, (2001) 5-20.

[27] J. P. Kahane, Baire's Category Theorem and Trigonometric Series, Journal D'Analyse Mathématique, 80, (2000) 143-182.

[28] J. P. Kahane and P. Lemarié-Rieusset, Fourier Series and Wavelets, Studies in the Development of Modern Mathematics, Vol. 3, Gordon and Breach (1995).

[29] A. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Springer Verlag, Berlin, (1995).

[30] R. Korn and E. Korn, Option Pricing and Portfolio Optimization, GTM, vol 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[31] T. W. Körner, Fourier Analysis, Cambridge University Press, Cambridge (reprinted) 1993.

[32] K. J. Kurzweil, Generalized Ordinary Diferntial Equation and Continuous Dependence on a Parameter, Czechoslovak Math. J. 7, (1957) 418-446.

[33] H. Lebesgue, Sur une Généralization de l'Integrale Définie, (1901) Paris, Ac. Sci., C.R., 1025-1028.

[34] H. Lebesgue, Measure and the Integral, Holden-Day, San Francisco (1966).

[35] Lindestrauss and L.-Tzafriri, Clasical Banach Spaces I, II, Springer-Verlag (1977).

[36] P. A. Meyer, Probabilités et Potential, Herman Paris (1966).

[37] D. Paunié, History of Measure Theory, Handbook of Measure Theory, Edited by E. Pap., Elsevier, Amsterdam (2002), 3-28.

[38] T. De Pauw, Autour Du Théorìeme de la Divergence, Panoramas et Synthéses, 18 (2004) 85-121.

[39] A. Pietsch, Absolut-p nummeriende Abbildunger in Normierten Räumen, Studia Math. 28 (1967) 333-356.

[40] I. K Rana, An Introduction To Measure and Integration, Narosa Publishing House, India (1997).

[41] C. A Rogers, Hausdorff Measures, Cambridge University, Press, Cambridge (1970).

[42] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, New York (1966).

[43] H. H. Schaefer, Banach Latices and Positive Operators, Springer Verlag (1974).

[44] Schwabik, S. and Guoju, Y, Topics in Banach Space Integration, Series in Real Analysis-Volume 10, World Scientific Pub Co Inc, Singapore (2005).

[45] C. Williamson, Probability with Martingales, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[46] L. P. Yee, Lanzou lectures on Henstock Integration, Scientific World, Singapore (1989).

DIOMEDES BÁRCENAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE CIENCIAS,
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, MÉRIDA, 5101, VENEZUELA.
barcenas@ula.ve