DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Kurt Gödel 1906-1978, una vida dedicada a la reflexión

Carlos Augusto Di Prisco

Kurt Gödel hizo contribuciones fundamentales a la lógica matemática y llevó a cabo profundas indagaciones filosf́icas. A pesar de la importancia de su trabajo, es poco lo que se sabe de su vida y de su obra fuera de reducidos círculos los especialistas. El centenario de su nacimiento es una ocasión apropiada para rendirle homenaje.

Gödel nació en Brno (o Brünn) ciudad de la antigua provincia astro-húngara de Moravia, el 26 de abril de 1906. Fue un niño extraordinariamente inquisitivo, y mostró desde muy joven un gran interés por las matemáticas. Su formación universitaria la obtuvo en la Universidad de Viena, en contacto con personajes de la talla del matemático Hans Hahn y el filósofo Rudolf Carnap, y bajo la influencia del grupo filosófico que dirigía Moritz Schlick, conocido posteriormente como el Círculo de Viena. Se casó con Adele Porkert en 1938, una mujer divorciada, seis años mayor que él, que trabajaba como bailarina. El matrimonio no se celebró sino años después de haberla conocido por las objeciones que ponía la familia de Gödel. Adele, quien no tenía grandes pretensiones intelectuales, lo acompañó por el resto de su vida y lo sobrevivió por tres años. Según testimonios de conocidos se trataban con devoción.

Los trabajos que publicó durante la década 1929-1939 transformaron la lógica matemática de una manera extraordinaria, por lo que se le ha considerado como el lógico más importante del siglo XX. Para comprender el alcance de los principales resultados que Gödel obtuvo durante estos años conviene recordar, aún si muy esquemáticamente, lo que es un sistema axiomático y algunos otros conceptos básicos de la lógica.

Un sistema axiomático consta de un lenguaje formal, con un conjunto definido de símbolos: variables, conectivas, cuantificadores, y posiblemente símbolos no lógicos que se usan para denotar relaciones, funciones o constantes de una teoría dada. Las expresiones bien formadas, o fórmulas del lenguaje, se obtienen agrupando símbolos mediante un conjunto bien determinado de reglas. Consta también de axiomas, y de reglas de inferencia . Los axiomas son expresiones del lenguaje formal tomadas como punto de partida para deducir otras, los teoremas, utilizando las reglas de inferencia.

Una demostración en el sistema axiomático de una expresión φ es entonces una sucesión finita de fórmulas,

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n,$$

cada una de las cuales o bien es un axioma o se obtiene de expresiones anteriores en la sucesión aplicando alguna regla de inferencia, y tal que $\varphi_n = \varphi$.

Diremos que una fórmula es un enunciado si todas sus variables aparecen bajo el alcance de un cuantificador.

Como ejemplo de un sistema axiomático presentamos un sistema para la aritmética, que llamaremos AP, abreviando Aritmética de Peano.

- Lenguaje
  - Símbolos lógicos: variables, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\forall$, (,).
  - Símbolos no lógicos: $+$, $\times$, S, 0.
    Para cada n, el término
    $$S(\ldots \text{ n veces} \ldots (S(0)) \ldots)$$
    se abrevia $\underline{n}$.
- Axiomas:
  - Axiomas Lógicos
  - Axiomas de Peano
- Reglas de inferencia:
  - Modus Ponens: de φ y $\varphi \rightarrow \psi$ se infiere ψ.
  - Generalización: de $\varphi(x)$ se infiere $\forall x \varphi(x)$.

Los axiomas lógicos son los de Hilbert y Ackermann [9], o algún sistema equivalente. A continuación listamos los Axiomas de Peano.

1. $0 \neq S(x)$
2. $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
3. $x + 0 = x$
4. $x + S(y) = S(x + y)$
5. $x \times 0 = 0$
6. $x \times S(y) = (x \times y) + x$

7. Para cada fórmula $\varphi(x)$,
$(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow \forall x \varphi(x)$

Un mismo lenguaje formal puede interpretarse de diversas maneras, y una expresión del sistema puede ser verdadera según una interpretación y falsa según otra.

Por ejemplo, el lenguaje de la aritmética puede ser interpretado en la estructura $\langle \mathbb{N}, +, \times, S, 0 \rangle$, donde $+$ y $\times$ son respectivamente la suma y el producto de números naturales, S es la función sucesor y 0 corresponde al número cero; o puede ser interpretado en la estructura correspondiente de los números enteros con sus operaciones de suma y producto, función sucesor y cero.

El enunciado $\forall x \exists y(x + y = 0)$ es falso en $\langle \mathbb{N}, +, \times, S, 0 \rangle$, pero es cierto en $\langle \mathbb{Z}, +, \times, S, 0 \rangle$.

Incluso se se podría pensar en una interpretación más caprichosa de este mismo lenguaje: dado un conjunto A, en $\mathcal{P}(A)$, el conjunto de subconjuntos de A, $+$ podría denotar unión, $\times$ intersección, S la función complemento, y 0 el conjunto vacío.

Un enunciado se dice lógicamente válido si es verdad en cualquier interpretación. Por ejemplo en un lenguaje con símbolos no lógicos H y M, la expresión silogística

Si todo H es M, y x es H, entonces x es M.

es lógicamente válida, ya que resulta una expresión verdadera independientemente de cómo se interpreten los predicados H y M.

En [9], se plantea por primera vez el problema de la completitud del cálculo de predicados. En ese texto, Hilbert y Ackermann presentan un sistema axiomático para el cálculo de predicados y preguntan si este sistema es suficiente para demostrar todos los enunciados lógicamente válidos.

En su tesis doctoral, titulada Uber die Vollständigkeit des Logikkalculus, de 1929 (y luego publicada como [3]), Gödel muestra que los enunciados demostrables a partir de los axiomas del cálculo de predicados son exactamente los lógicamente válidos, es decir, aquellos que son verdad bajo cualquier interpretación. De esta manera Gödel dió respuesta afirmativa al problema planteado por Hilbert y Ackermann.

Unos años después, Gödel sorprendió al mundo matemático con otro resultado de gran impacto, su teorema de incompletitud de la aritmética y sistemas relacionados, que ha trascendido el ámbito matemático y filosófico. Se ha especulado mucho sobre el significado y el alcance de este teorema, se ha dicho, por ejemplo, que establece límites para el pensamiento racional. Gödel prefería pensar más bien que su teorema reafirma la necesidad de la creatividad humana para el desarrollo de las matemáticas ya que como consecuencia del teorema se sabe que es imposible mecanizar completamente el quehacer matemático.

El teorema de incompletitud establece que todo sistema axiomático consistente, recursivo, y que contenga la aritmética, es incompleto en el sentido de que hay un enunciado φ no demostrable en el sistema y tal que su negación $\neg\varphi$ tampoco es demostrable.

Que el sistema sea consistente significa que no demuestra ninguna contradicción; y que sea recursivo quiere decir que hay un algoritmo (un procedimiento mecánico) que sirve para determinar, dado un enunciado, si es o no uno de los axiomas del sistema.

Para un sistema que cumpla con las condiciones del teorema siempre habrá, entonces, algún enunciado aritmético verdadero (en la estructura de los números naturales) que no es demostrable en el sistema.

La demostración del teorema tiene dos ingredientes importantes, a saber, la aritmetización del lenguaje y, en segundo lugar, la representatividad en el sistema de las relaciones y funciones aritméticas recursivas. Esto da lugar a la aparición del fenómeno de la autoreferencia, lo que a su vez permite la construcción del enunciado indecidible de Gödel.

La aritmetización del lenguaje se logra asignando números a los elementos sintácticos, es decir a los símbolos del lenguaje, a las fórmulas, y a las sucesiones finitas de fórmulas, en particular a las demostraciones. Esta asignación se hace en forma algorítmica, de modo que existe un procedimiento que permite, dado un símbolo, calcular el número que le corresponde, e igualmente, dado un enunciado o una sucesión finita de enunciados, se puede determinar el número que le corresponde. Más aún, hay un procedimiento algorítmico para determinar en un número finito de pasos, dado un número, si ese número corresponde a algún símbolo, término, fórmula, enunciado, o sucesión finita de fórmulas o enunciados; y en caso afirmativo, el mecanismo permite determinar el elemento sintáctico correspondiente.

De este modo, mediante expresiones puramente aritméticas en el lenguaje formal del sistema podemos referirnos a enunciados, axiomas, demostraciones , y otros elementos sintácticos del mismo sistema axiomático.

Para lograr su demostración, Gödel inventó el concepto de función recursiva (y de relación recursiva). Ya esto es un logro extraordinario, puesto que ese concepto ha resultado central en la teoría de la computabilidad. Hoy sabemos que una función numérica es recursiva si y solamente si existe un algoritmo para calcularla (por ejemplo, un programa en algún lenguaje de programación). Del mismo modo, una relación numérica $R(x_1, \ldots, x_n)$ (de n argumentos) es recursiva si hay un algoritmo que determina, para cada tupla $k_1, \ldots, k_n$ de números naturales, si está o no en la relación R. Gödel demostró que toda relación recursiva $R(x_1, \ldots, x_n)$ es representable en AP. Es decir, existe una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje, con las variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que si los números $k_1, \ldots, k_n$ están relacionados por R, entonces el enunciado $\varphi(\underline{k_1}, \ldots, \underline{k_n})$ es demostrable en el sistema AP (recordemos que $\underline{n}$ es una abreviación del término $S \ldots (\text{n veces}) \ldots S(0)$ que denota al número n). Y si esos números no están relacionados por R, entonces en AP podemos demostrar la negación $\neg\varphi(\underline{k_1}, \ldots, \underline{k_n})$.

Por ejemplo, la relación (unaria) "x es un número par" se representa por la fórmula $\exists y(y + y = \underline{n})$.

Es interesante mencionar que Gödel utilizó el Teorema Chino del Resto para demostrar la represntabilidad de las relaciones recursivas en el sistema AP.

Con estas herramientas, la demostración del teorema se centra en encontrar un número k, tal que el enunciado G de la aritmética que expresa:

"el enunciado aritmético cuyo número de Gödel es $\underline{k}$ no es demostrable en el sistema AP"

tiene número de Gödel k. En otras palabras, el enunciado G expresa de si mismo que no es demostrable. Se demuestra que si AP no es contradictorio, ese enunciado no es demostrable en AP; y su negación tampoco. El enunciado G es una versión sofisticada de la paradoja del mentiroso.

Para construir ese enunciado, Gödel consideró la relación $W(u, y)$ dada por

"u es el número de una fórmula $\varphi(v)$ (con variable libre v) y y es el número de la demostración en AP de $\varphi(\underline{u})$",

que, bajo las condiciones del teorema, es una relación recursiva, y por lo tanto representada en AP por una fórmula $\mathcal{W}(x, y)$.

Consideremos ahora la fórmula

$$(*)\ \forall y \neg \mathcal{W}(x, y),$$

y sea k su número de Gödel. Entonces

$$(G)\ \forall y \neg \mathcal{W}(\underline{k}, y)$$

expresa " yo no soy demostrable".

Se prueba que, si AP es consistente, entonces (G) no es demostrable en AP y $\neg(G)$ tampoco lo es.

Una consecuencia de el teorema de incompletitud (y de su demostración)es el llamado Segundo Teorema de Incompletitud, que afirma que si un sistema cumple las mismas condiciones del Teorema de Incompletitud, entonces en ese sistema no se puede demostrar que el sistema es consistente. En particular, la aritmética no puede demostar su propia consistencia, a menos que sea inconsistente.

Expliquemos esto de forma más precisa. Si n es el número de Gödel de una fórmula, denotemos por $\lceil n \rceil$ a dicha fórmula.

La relación

> "x es el número de una fórmula, y es el número de la negación de $\lceil x \rceil$, u es el número de una demostración de $\lceil x \rceil$, y v es el número de una demostración de $\lceil y \rceil$".

es recursiva, y luego representable en AP mediante una fórmula $\mathcal{K}(x, y, u, v)$. Por lo tanto

$$\forall x, y, u, v(\neg \mathcal{K}(x, y, u, v))$$

expresa que AP es consistente.

El Segundo Teorema de Incompletitud afirma que si AP es consistente, entonces

$$\forall x, y, u, v(\neg \mathcal{K}(x, y, u, v))$$

no es demostrable en AP.

Poco después de haber presentado su resultado de incompletitud como Habilitationsschrift en la Universidad de Viena, Gödel fue invitado por von Neumann a visitar Princeton, y entre 1933 y 1939 visitó los EEUU varias veces, donde llevó a cabo una intensa actividad. Entre una y otra visita sufrió serias crisis depresivas que lo obligaron a recluirse varias veces en sanatorios.

El otro resultado de Gödel que comentaremos se refiere a la hipótesis del continuo. La demostración de la consistencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo, otra de sus grandes contribuciones, fue anunciada en [5], en 1938, y desde entonces ha tenido una gran importancia en el desarrollo de la teoría de conjuntos.

Cantor demostró que para cualquier conjunto A, no hay una biyección entre A y su conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$. En ese sentido, $|A|$, la cardinalidad de A, es estrictamente menor que $|\mathcal{P}(A)|$, la cardinalidad del conjunto de partes de A. En particular, como el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se puede poner en biyección con los subconjuntos de $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, la cardinalidad de $\mathbb{N}$, es estrictamente menor que la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

¿Existe algún tamaño intermedio? La Hipótesis del Continuo (HC) afirma que no hay conjuntos de tamaño intermedio entre $|\mathbb{N}|$ y $|\mathbb{R}|$.

Cantor llamó $\aleph_0$ a la cardinalidad de $\mathbb{N}$, el primer cardinal infinito; $\aleph_1$ es el primer cardinal mayor que $\aleph_0$, y por lo tanto el primer cardinal no numerable; $\aleph_2$ es el primer cardinal mayor que $\aleph_1$, etc.

Los cardinales forman una colección bien ordenada

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \ldots$$

Como $2^{\aleph_0}$ es la cardinalidad de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, se tiene que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, y por lo tanto la Hipótesis del Continuo se expresa por:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Gödel halló un modelo, llamado L, o el universo de los conjuntos construbtibles, donde valen todos los axiomas de la teoría de conjuntos y también la HC. De aquí sigue que no se puede demostrar la negación de la HC a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos (a menos que la teoría de conjuntos sea contradictoria).

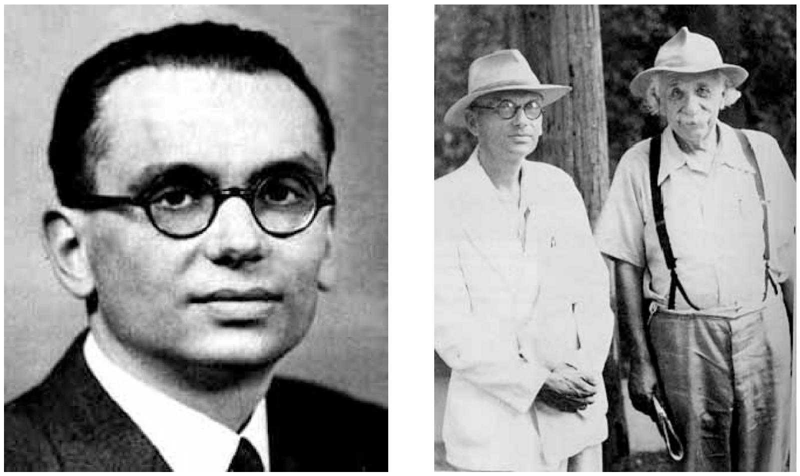
Gödel sospechaba que la HC tampoco es demostrable, lo quedó confirmado muchos años después por el trabajo de Paul Cohen. De modo que la HC es indecidible en el sistema usual de la teoría de conjuntos. Algunos autores afirmado que estos resultados indican que el problema del continuo no tiene sentido, y de esta manera ha sido definitivamente resuelto. La tendencia contemporánea se inclina más bien por considerar que la independencia de la HC indica la necesidad de reformular el sistema axiomático de la teoría de conjuntos para obtener un sistema más fuerte donde esta hipótesis se pueda decidir. En 1947 Gödel publicó un excelente ensayo ([6]) donde expone sus ideas sobre cual sería una vía para lograr esto. Las ideas contenidas allí ponen de manifiesto la profunda intuición de Gödel y de manera casi profética apuntan en direcciones que ha resultado sumamente enriquecedoras. (Véase [12] para una presentación de resultados recientes sobre la HC, o [2] para un resumen expositivo de algunos de estos resultados).

Gödel publicó algunos otros trabajos durante la década 1929-1938, pero los que hemos mencionado son ya suficientes para dar una idea de la importancia de su obra.

Gödel publicó poco, pero cada uno de sus artículos es una joya por su precisión y claridad, que pone de manifiesto la profundidad y el alcance del pensamiento de su autor.

En 1940 Gödel abandonó Europa, huyendo del militarismo totalitario impuesto por los nazis y de la guerra que se había iniciado. Viajó en pleno invierno, atravesando Siberia, para llegar a Vladivostok, luego Japón, y de allí a los Estados Unidos, para establecerse en Princeton. En el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton entabló una duradera amistad con Albert Einstein, con quien hablaba frecuentemente sobre temas científicos y filosóficos. Ya en los ú ltimos años de su vida, Einstein llegó a decir que su trabajo ya no significaba mucho para él, y que iba al Instituto para gozar del privilegio de caminar de regreso a su casa conversando con Gödel.

A partir de 1943, Gödel se dedicó casi exclusivamente a los estudios filosóficos, primero a la filosofía de las matemáticas y luego a la filosofía general. Sin embargo, entre 1947 y 1959 trabajó en problemas de la teoría general de la relatividad, y produjo unos sorprendentes resultados sobre modelos cosmológicos donde, en principio, es posible viajar al pasado. Gödel fue el primero en demostar que las ecuaciones de Einstein admiten soluciones que describen universos rotantes. Según el mismo Gödel, estos estudios no surgieron de discusiones con Einstein, sino de su interés en la filosofía kantiana del espacio y el tiempo.



Gödel (c. 1937), y con Einstein en Princeton (1950)

Debido a su personalidad complicada, llena de temores y fobias, Gödel fue aislándose de colegas y amigos, y llevó durante sus últimos años una vida de reclusión. Cuando la Universidad de Princeton decidió otorgarle un doctorado honoris causa, no quiso comprometerse a asistir, y el mismo día de la ceremonia decidió finalmente no presentarse, por lo que el título nunca fue conferido. Meses más tarde, recibió un reconocimiento aún más importante: la medalla nacional de ciencia, que por cierto se confería al mismo tiempo al Premio Nobel Linus Pauling. De igual forma, y a pesar de que le ofrecieron todo tipo de facilidades para trasladarse a Washington a recibir el galardón de manos del Presidente Ford, decidió no asistir, y la medalla fue recibida en su nombre por el Profesor Saunders Mac Lane, para entonces Presidente de la American Mathematical Society.

Gödel estaba convencido de que el mundo se rige por principios racionales susceptibles de ser comprendidos por la mente humana, y consideraba fundamental el papel de la reflexión introspectiva para alcanzar el conocimiento. Fue un pensador extraordinario, cuya vida estuvo signada por las tensiones entre su racionalidad científica y la inestabilidad emocional. Gödel trabajó en el Instituto de estudios Avanzados hasta que murió el 15 de enero de 1978, por desnutrición e inanición, como consecuencia de paranoias que lo llevaron a dejar de alimentarse por temor a envenenamientos. Su pensamiento, que ha orientado de manera significativa el desarrollo de la lógica matemática, merecería ser mejor conocido.

Después de su muerte han aparecido varios libros sobre Gödel, como las recomendables obras [1] y [11]. Parte del trabajo de Gödel ha sido presentado en el exitoso [10]. La obra [7] reúne todos los escritos de Gödel publicados hasta 1981, traducidos al castellano. Una edición en cinco volúmenes hecha por Oxford bajo los auspicios de la Association for Symbolic Logic ([8]) recoge toda la obra escrita por este extraordinario y singular personaje, incluyendo escritos no publicados anteriormente y toda su correspondencia. En esta extraordinaria recopilación, los artículos van precedidos de comentarios críticos escritos por renombrados especialistas.

Referencias

[1] Dawson, Jr., J. W., Logical Dilemmas. The life and work of Kurt Gödel. A K Peters, 1997.

[2] Di Prisco, C. A., Are we closer to a solution of the Continuum Problem? Manuscrito - Rev. Int. Fil., Campinas, v. 28 (2005) 331-350.

[3] Gödel, K., Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalkulus, Monatshefte für Mathematik und Physik 37 (1930) 349-360.

[4] Gödel, K., Über formal unentscheidbare Sätze des Principia mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931) 173-198.

[5] Gödel, K., The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis. Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A. 24 (1938) 556-557.

[6] Gödel, K., What is cantor's continuum problem?, American Mathematical Monthly 54 (1947) 515-525; errata 55, 151.

[7] Gödel, K., Obras completas. Alianza Editorial, 1981.

[8] Gödel, K., Collected Works. (S. Feferman et al. Eds.) Oxford University Press, Vol. 1, 1986; Vol. 2, 1990; Vol. 3, 1995; Vol. 4, 2003; Vol. 5, 2003.

[9] Hilbert, D. y W. Ackermann, Grundzuge der teoretischen logik. Springer, Berlin, 1928

[10] Hofstadter, D. R., Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid. Basic Books, Inc., 1979.

[11] Wang, H., Reflections on Kurt Gödel. MIT Press, 1988.

[12] Woodin, W. H., The Continuum Hypothesis, *Notices of the Amer.Math, Soc.*. 48 (2001). Part I 567-576, Part II 681-690.

Carlos A. Di Prisco
Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
Venezuela
cdiprisc@ivic.ve