EDUCACIÓN

La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica

J. M. Sigarreta, J. M. Rodríguez & P. Ruesga

Resumen

Este artículo aborda la evolución de la resolución de problemas matemáticos desde una perspectiva histórico-didáctica, tomando como guía cuatro etapas fundamentales: la Antigüedad, partiendo desde el 2000 a. n. e hasta la caída del Imperio Romano en el siglo V n. e; se sigue con la Edad Media, hasta el siglo XV; luego la Era Moderna, que finaliza con la alborada del siglo XX; y se concluye en la época Contemporánea.

Palabras claves: Solución de Problemas; Historia de la Matemática.

1. Introduccion

La resolución de problemas matemáticos siempre ha sido el corazón de la actividad matemática. Su evolución histórica revela la plena relación que ha tenido esta actividad con la enseñanza-aprendizaje de la propia Matemática.

Desde la Antigüedad se ha ido transmitiendo todo el caudal de conocimientos acumulados por la humanidad durante milenios; nuestra ciencia no ha sido ajena a esta transferencia, y se ha matizado por la implementación de diferentes métodos a la hora de realizar tal acción.

En el trabajo se pone de manifiesto que la didáctica de la resolución de problemas matemáticos y en general la Didáctica de la Matemática es una disciplina científica en plena formación. En el estudio de la evolución histórico-didáctica de la resolución de problemas se observa que en sus inicios muchos conceptos fueron manejados de manera intuitiva. Entre estos conceptos figuraron los de Matemática escolar, problemas matemáticos, entre otros. El propio desarrollo de técnicas para la resolución de problemas precisó que dichos conceptos dejaran de ser transparentes y pasaran a ser objeto de estudio en sí mismos.

A continuación se abordará la evolución antes mencionada, tomando como guía cuatro etapas fundamentales: la Antigüedad, partiendo desde el siglo VI a. n. e hasta la caída del Imperio Romano en el siglo V n. e; se sigue con la Edad Media, hasta el siglo XV; luego la Era Moderna, que finaliza con la alborada del siglo XX; y se concluye en la época Contemporánea.

2. La resolución de problemas en la Antigüedad

La aparición de la escuela se remonta a la misma época de la invención de la escritura. Investigaciones históricas demuestran que la enseñanza de la aritmética se iniciaba en una fase temprana en la vida escolar, al mismo tiempo que la lectura y la escritura; se debe aclarar que las Matemáticas eran consideradas elementos importantes en la formación de los escribas y que la escuela respondía a las necesidades de esa sociedad, es decir, a las necesidades del momento histórico concreto, aunque estaba dirigida a grupos muy restringidos.

De la lectura de un documento histórico en que se loa a uno de los reyes del tercer imperio de Ur en Mesopotamia se puede inferir que la finalidad fundamental de los problemas matemáticos propuestos era preparar al hombre para el cálculo. El soberano proclamaba muy orgulloso "Sé sumar y restar a la perfección, soy diestro en cálculo y en contabilidad". Muchos autores coinciden en plantear que fue el matemático griego Herón, quien vivió en Alejandría aproximadamente entre los siglos II y I a.n.e, el primero en incluir ejercicios con texto en sus trabajos; sin embargo, se conocen, de hecho, algunos textos matemáticos escolares más antiguos. Estos textos son de dos tipos: de tablas y de problemas; estos últimos proponen, por ejemplo, este "problema tipo", hallado en un papiro egipcio de mediados del segundo milenio: En una pirámide el lado tiene 140 codos y la inclinación es de 5 palmos y 1 dedo por codo. ¿Cuál es la altura?

Tanto en las tablillas de barro, como en los papiros más antiguos, se puede encontrar estos tipos de problemas totalmente "idealizados", que evidentemente fueron concebidos con el ánimo de enseñar los rudimentos aritméticos elementales. Los textos matemáticos en su generalidad se inician con una exposición del problema matemático que se trata de resolver, y los datos se representan como cifras concretas y no como variables abstractas. Sigue a la exposición del problema la forma de ir solucionándolo paso por paso, para llegar finalmente al resultado. Cada nuevo paso se basa en el resultado de un paso anterior, o bien en uno de los datos facilitados al principio. El "alumno"quedaba así capacitado para resolver cualquier otro problema del mismo tipo que pudiera presentársele. Además, estos problemas solían reagruparse de modo que las técnicas aprendidas pudieran aplicarse inmediatamente en otros casos (entiéndase la misma presentación teórica con otros números). Según Boyer: "los cientos de problemas de tipos muy parecidos que aparecen en las tablillas cuneiformes tienen todo el aspecto de ser ejercicios que debían resolver los escolares siguiendo ciertos métodos conocidos o reglas generales."(Boyer, C. B. 1986, p. 66).

El objetivo didáctico que se persigue con la utilización de los problemas resulta evidente con la explicación anterior. Además, la estructura de los textos de los problemas y las tablas permiten abordar desde otra óptica la cuestión de la abstracción y la generalización en las Matemáticas. En conclusión el planteamiento de los egipcios y babilonios consiste en crear una cadena de ejemplos típicos gracias a la cual es posible, por interpolación, establecer una relación entre un problema nuevo y los ya conocidos (principio de analogía).

Al penetrar en la Grecia se conoce que, aunque el cálculo se enseñaba en la escuela elemental, la sociedad griega se mostraba, realmente, poco interesada por la formación intelectual y técnica de los niños y jóvenes. Al igual que los textos babilonios o egipcios, los problemas planteados se refieren explícitamente a una situación concreta, incluso esta es muchas veces un artificio con fines pedagógicos. Se puede plantear que la aparición de escuelas, algunas de las cuales llegaron a ser famosas, se debieron a iniciativas individuales; así, los dos grandes filósofos atenienses de fines del siglo V y primera mitad del IV antes de nuestra era, Sócrates (470-399 a.n.e) y Platón (428-347 a.n.e), fundan sus propias escuelas. El primero, de retórica, que era el arte de persuadir al otro por medio de un discurso muy adornado y elaborado y el segundo, en el año 387, fundó en Atenas su escuela de Filosofía la "Academia", institución a menudo considerada como la primera universidad europea, la cual ofrecía un amplio plan de estudios que incluía temas de Astronomía, Biología, Matemática, Teoría Política y Filosofía.

Sócrates veía las Matemática como instrumento indispensable de la formación intelectual. Esta ciencia, en términos de Sócrates, al igual que los debates contradictorios que tanto atraían a la juventud, debían servir para formar mentes "bien hechas", aunque su contenido resultara inútil para el ciudadano cuyo ideal consistía en dedicarse a la vida política. Para Platón, dicha ciencia cumple una función propedéutica de magnitud distintiva, pues deben servir de introducción al estudio de la Filosofía, mientras que a la vez pretendía que esos conocimientos matemáticos sirvieran como base a un proyecto de reformas políticas. Según

Schoenfeld (1987), el filósofo griego Sócrates fue capaz de aislar la noción de "resolver problemas"para someterla a estudios; a pesar de su idea de que solamente podemos conocernos a nosotros mismos, hay que destacar en él ciertos elementos metacognitivos importantes, y estudiados en la actualidad, como factores que intervienen en la solución de problemas. De todos es conocida la importancia que concedió Platón al estudio de las Matemáticas, en especial a la enseñanza de la Geometría, y cómo la utiliza desde su posición de idealista objetivo. A él se le debe la concepción actual de los objetos matemáticos al señalar: "los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan."(Boyer, C. B. 1986, P.125). También aprecia la importancia de la resolución de problemas, así, en su obra "La República"plantea que si se quiere desarrollar la inteligencia es preciso proceder como se hace en Geometría, por medio de problemas.

El término "heurística"surgió entre los más destacados matemáticos y pensadores de la antigüedad, posteriores a Sócrates y Platón. Tal era el nombre de una rama del saber bastante mal definida y que se relacionaba tanto con la lógica, como con la Filosofía o la Psicología. En los trabajos llegados hasta la actualidad se observa la exposición frecuente de métodos geométricos, pero raras veces sus detalles; todo ello tenía como objeto de estudio las reglas y métodos del descubrimiento e invención.

En resumen, en la Antigüedad, partiendo de los puntos de vistas explicados y, en virtud de la finalidad didáctica del proceso de resolución de problemas matemáticos en esta época, se percibe un sentido utilitario de la matemática prehelénica frente a una óptica cosmológica de la griega, donde en ésta la instrumentación de las concepciones giran en torno a la comprensión de los elementos que componen el orden existencial del hombre y su medio, aspecto que responde a las características propias del desarrollo de la ciencia y de la cosmovisión humana en relación con la existencia. Es, en estos casos, la resolución de problemas matemáticos un vehículo socioclasista de dominación en manos de los que ostentaban el poder.

3. La resolución de problemas en la Edad Media

En la Edad Media, en la India, entre los siglos V-VII, las Matemáticas alcanzan un gran esplendor y su desarrollo estuvo ligado íntimamente con matemáticos de relieve como Aryabhata, Brahmagupta y Bháskara. Los principales aportes de estos notables científicos se pueden exponer en la resolución completa de la ecuación de segundo grado, la resolución de las ecuaciones indeterminadas y su aplicación a la solución de problemas prácticos. Además, al igual que los "Elementos" del griego Euclides, en el que se sintetizó gran parte de la matemática de su época, los conocimientos de esta etapa fueron recogidos por Bháskara en el siglo VII en su obra capital titulada "Sidhanta Ciromani".

El desarrollo matemático adquirió gran relevancia en el Mundo Árabe. Una de las principales escuelas de este período fue la de Bagdad, en lo fundamental, por la utilización de los recursos algebraicos en la solución de problemas matemáticos prácticos; entre los principales representantes se encuentra Al Juarisme (nombre que sirve como base al término actual algoritmo), que vivió en el siglo IX. A este estudioso le corresponde el honor de haber escrito el primer texto de Álgebra, que nominalizó esta disciplina científica. Otro representante de esta escuela fue Al Batani (858-929), que elaboró métodos prácticos e indicaciones para la resolución de problemas; muchos de estos resultados aparecen en un tratado de Álgebra escrito por Omar Khayyan en el siglo XII.

En la Edad Media en Europa, el objetivo de la enseñanza era conocer el orden del universo y la esencia de las cosas, sin importarles la preparación del hombre para la vida en la sociedad. Con el surgimiento de las universidades, los procedimientos seguidos por los profesores en casi todas partes eran los mismos; no se acudía a las fuentes originales, el docente leía un manual y luego se centraba en su discusión y debate. En esos tiempos ya existían grupos de graduados de las diferentes universidades que compartían el ejercicio de las Matemáticas: por un lado, los agrimensores, ingenieros y contables y, por otro, los médicos y astrólogos, que gozaban de una situación social superior; los del primer grupo, dentro de sus enseñanzas, enfatizaban en la resolución de problemas prácticos, ofreciendo determinados modelos para algunas situaciones específicas.

En el siglo XIV, en Europa, los cambios económicos así como el desarrollo de las ciudades y el comercio van a favorecer el ascenso social de los matemáticos prácticos. Los intercambios comerciales cada vez más complejos exigían técnicas idóneas de cálculo y contabilidad. Existían en esos momentos tratados donde se exponían reglas para la solución de problemas específicos relacionados principalmente con las tasas de interés, los cambios, la circulación y el peso de las monedas, o la repartición de los beneficios. En los tratados estos métodos solían presentarse en forma de casos concretos, integrándose en un contexto totalmente práctico.

La influencia de las interpretaciones escolásticas como instrumento para la generalización de la fe, durante la Edad Media, hacen que la dirección formativa de la resolución de problemas matemáticos evidencie una concepción teológica donde los procedimientos matemáticos constituyen un elemento básico en la multiplicidad existencial del hombre, evidenciando el rigor de un ordenamiento que, independientemente de la multiplicidad factorial que lo compone, confluyen en la existencia de una causa universal que descansa en la idea de Dios.

4. La resolución de problemas en la Época Moderna

En la Época Moderna, con el desarrollo del capitalismo, impera el espíritu utilitario y desde ese punto de vista fue puesta en práctica toda la enseñanza. Este proceso se inicia con el humanismo renacentista, incluyéndose en esta denominación aquellos que se apasionaron por las letras y las artes clásicas. Es atinado aclarar que en el siglo XVII comienza la decadencia de la enseñanza humanística y la sociedad pide a la escuela que provea a sus hijos de conductas y conocimientos teórico-prácticos, que les permitan actuar y desarrollarse en ella.

El hito fundamental, en esta época en la actividad matemática, fue marcado por el filósofo y matemático R. Descartes (1596-1650). Este genio francés fue el fundador del racionalismo, que se formó como resultado de interpretar de manera unilateral el carácter lógico del conocimiento matemático, dado que la naturaleza universal y necesaria de este conocimiento le parecía a Descartes derivada de la naturaleza del intelecto mismo. El matemático asigno dentro del proceso de conocimiento un papel extraordinario a la deducción, basada en axiomas, alcanzables por vía intuitiva. Para obtener el conocimiento, él creía necesario ponerlo todo en duda, salvo la cognoscibilidad misma; este principio se manifiesta en su máxima: "pienso, luego existo".

En el ámbito de la resolución de problemas, la trascendencia más especial se centra en dos de sus principales tratados: "Discours de la Méthode"(Discurso del Método, publicado por primera vez en Leyden, en 1637) y "Regulae ad Directionem Ingenii"(Reglas para la Dirección del Espíritu, publicado post mortem en "Obras Póstumas", Amsterdam, 1701). En 1627 comenzó a redactar sus Reglas en tres tomos, con una docena de ellas cada uno; pero después de arribar a la mitad del segundo volumen, solo alcanzó a poner el título de tres reglas más, ya que la muerte vino a sorprenderlo en febrero de 1650. En esta obra el gran pensador explica a los "mortales corrientesçómo ellos podrían pensar como él, y cómo, siguiendo su método, podrían resolver problemas tal y como él lo hizo.

Considera Polya que las palabras siguientes de Descartes describen el origen de las Reglas: "Cuando, en mi juventud, oí hablar de invenciones ingeniosas, trataba de saber si no podría inventarlas yo mismo, sin incluso leer al autor, así advertí que me conformaba a ciertas reglas."(Polya, G. 1945, p. 109).

La utopía de su gran proyecto descansaba sobre un plan muy simple: Fase I: reducir cualquier problema algebraico a la resolución de una ecuación simple. Fase II: Reducir cualquier problema matemático a un problema algebraico. Fase III: Reducir cualquier problema a un problema matemático. El primer libro culmina con las reglas IX-XII, que ayudan a consolidar el conocimiento. Enfatiza la necesidad de profundizar en las cuestiones más simples; en la importancia de la ejercitación; en la búsqueda de relaciones entre proposiciones simples; y en el empleo óptimo de cuatro facultades: la inteligencia, la imaginación, los sentidos y la memoria. Respecto a las facultades empleadas en el conocimiento, Descartes destaca que sólo la inteligencia puede percibir la verdad, pero no debe dejar de ayudarse del resto de las facultades señaladas.

En el segundo libro se examinan cuestiones más complicadas. Veamos las reglas más significativas: Regla XIII: Cuando se comprende perfectamente una cuestión es necesario abstraerla de toda concepción superflua, reducirla a sus más simples elementos y subdividirlas en tantas partes como sea posible por medio de la enumeración. Regla XIV: La misma regla debe ser aplicada a la extensión real de los cuerpos y es necesario representarla completa a la imaginación por medio de figuras claras; de este modo sería mucho mejor comprendida por la inteligencia. Regla XV: Es de gran utilidad trazar estas figuras y representarlas a los sentidos externos a fin de conservar la atención del espíritu. Como se puede apreciar, estas reglas son muy adecuadas para emprender la solución de un problema. En el primer caso se incita a descomponer el problema en otros más sencillos, poniéndose al descubierto los procesos de análisis y síntesis; en el resto se sugiere la construcción de una figura de análisis, con énfasis en la visualización de los elementos que interviene en el problema.

En el siglo XVIII resulta necesario destacar al suizo L. Euler (1707-1783). Este eminente científico no llegó a plantear explícitamente, como Descartes, un conjunto de reglas para abordar los problemas. El mérito fundamental radica en la educación heurística manifestada en su praxis pedagógica. Según testimonios de Condorcet (matemático contemporáneo con Euler): " Euler prefería instruir a sus alumnos con la pequeña satisfacción de sorprenderlos. Él pensaba no haber hecho bastante por la ciencia si no hubiese añadido a los descubrimientos la íntegra exposición de las ideas que le llevaron a ellos."(Polya, G. 1976, p. 66)

En la obra euleriana, no solamente los descubrimientos por analogías son dignos de mencionar, es importante decir que su capacidad de análisis era sorprendente, pero fundamentalmente se distinguió como: "el matemático más hábil para la creación de algoritmos y estrategias generales para la solución de problemas, que jamás haya existido"(Castro, I. 1996, p.3). También tiene un lugar preponderante la creación de nuevas teorías basadas en los métodos con los que resolvió grandes problemas matemáticos; un ejemplo de su prodigiosa capacidad para la resolución de problemas y su facilidad para la generalización de métodos de solución, se pone de manifiesto en uno de los problemas más populares que resolvió este genio, el de los siete puentes de Königsberg. La estrategia que empleó para su solución sirvió para desarrollar una rama de la matemática llamada Topología combinatoria.

Otro matemático no menos importante a tener en cuenta en la historia de la resolución de problemas el cual, si bien desarrolló su mayor actividad en el siglo XVIII murió en el XIX, es al francés J. L. Lagrange (1736-1813); su mayor contribución en esta dirección aparece en las memorias que escribió en Berlín en 1767, sobre la resolución de las ecuaciones numéricas, en la cual se exponen dos estrategias para la resolución de problemas utilizando como recurso las ecuaciones numéricas simples. No se debe pasar por alto, en el análisis de la época, al notable matemático B. Bolzano (1781-1848), que también incursionó sobre la forma de abordar aquellos problemas para los cuales no se poseía un procedimiento de resolución; en su libro Wissenschaftslebre dirigido a la Lógica, dedicó una extensa parte a la heurística. Modestamente relata: "No pretendo en lo absoluto presentar aquí ningún procedimiento de investigación que no sea conocido desde hace tiempo por los hombres de talento, no creo que encuentren aquí nada nuevo en la materia. Pero voy a esmerarme en asentar, en términos claros, las reglas y los caminos de la investigación seguidos por todo hombre capaz, aunque en la mayoría de los casos lo sigue sin tener plena conciencia de ello. Si bien ignoro si he tenido o no pleno éxito en esta empresa, guardo al menos la ilusión que mi modesta contribución sea del gusto de algunos y tenga aplicaciones más tarde". (Bernel, R. 1982, p. 73).

El verdadero valor de su obra está en proponerse hacer una recopilación y divulgar esos modos de actuación de los "hombres de talento". El trabajo tiene un valor educacional excepcional, por cuanto de todos es conocido que muchos científicos e investigadores destacados basan su actividad en recursos obtenidos de una larga experiencia o a veces instrumentados magistralmente por ellos mismos, pero que pocas veces son explicitados, saliendo a la luz sólo la exposición formal y rigurosa del resultado obtenido.

La resolución de problemas en el ámbito de la modernidad condiciona una perspectiva logológica, donde el hombre y su personalidad, constituyen el centro de la problemática. La propia perspectiva humanista de la ciencia advierte la necesidad de acrecentar la preocupación por el hombre en la relación con sus similares y la sociedad, donde los procedimientos matemáticos constituyen alternativas para satisfacer las demandas humanas e incrementar el éxito de la humanidad en el proceso de adaptación secular, social y cultural.

5. La resolución de problemas en la Época Contemporánea

En la alborada del siglo XX aparecen los aportes de H. Poincaré (1854-1912), matemático francés que se ocupó sobremanera de la metodología general de la ciencia. Poincaré consideraba que las leyes de la ciencia no pertenecen al mundo real, sino que constituyen acuerdos convencionales para hacer más cómoda y útil la descripción de los fenómenos correspondientes.

En su "Fundations of Science"(1913), Poincaré dedica un apartado al análisis de la creación de los conceptos matemáticos. Esta sección recibió el título de Creación Matemática, y había aparecido originalmente en una publicación francesa de 1908 ("Science et Méthode"). Lo más plausible en esta obra es la distinción que su autor hace respecto al acto creativo, destacando cuatro fases: Saturación (actividad consciente que implica trabajar en el problema hasta donde sea posible); Incubación (el subconsciente es el que trabaja); Inspiración (la idea surge repentinamente, "como un flash"según Poincaré) y Verificación (chequear la respuesta hasta asegurarse de su veracidad).

Otra importante contribución fue realizada por J. Hadamard (1865-1963) en su libro "An essay on the psychology of invention in the mathematical field", publicado en 1945. Hadamard prosigue y profundiza el punto de vista de Poincaré, resaltando la actividad consciente, la reflexión y el trabajo inconsciente. De manera similar, este matemático propone un esquema algo más exhaustivo para explicar el proceso de creación matemática. Sus fases son las siguientes: Documentación (informarse, leer previamente, escuchar, discutir); Preparación (realizar un proceso de ensayo-error sobre diferentes vías e hipótesis, considerando un cambio eventual de actividad en caso de no obtener ningún progreso); Incubación (al cambiar de actividad); Iluminación (ocurre la idea repentina); Verificación (la idea debe someterse al análisis y comprobación, al juicio crítico); Conclusión (ordenación y formulación de los resultados).

Salvando sus limitaciones idealistas estas ideas son bastante progresistas. Por primera vez se intentaba explorar los fenómenos que ocurren en el cerebro humano, durante la resolución de problemas. Ya no se trataba de describir ciertas reglas para conducir el pensamiento, sino de estudiar el pensamiento mismo. Resulta atinado plantear que ya Hadamard comprendió la necesidad de encarar el proceso de resolución de problemas desde la perspectiva matemática y psicológica cuando expresó:

"... este asunto envuelve dos disciplinas, Psicología y Matemática, y requerirá ser tratada adecuadamente en ese orden, por ambos, tanto por el psicólogo como por el matemático. Por la falta de esta composición, el asunto ha sido investigado por los matemáticos por un lado y por los psicólogos por el otro..."(Hadamard, J. 1945, p. 1).

En materia de resolución de problemas es corriente que los historiadores y estudiosos escindan sus análisis en dos etapas, claramente delimitadas por el año 1945. La razón es simple: en ese año salió a la luz "How to Solve It", del matemático y pedagogo húngaro G. Polya. La obra didáctica de Polya nace en el prefacio del trabajo "Aufgaben und Lehrstze auf der Analysis"del cual fue coautor. En las indicaciones sobre el uso de este libro los autores revelan una breve recomendación, a fin de lograr un pensamiento productivo. Ellos señalan:

"Reglas generales, capaces de prescribir detalladamente la más útil disciplina del pensamiento, no son conocidas por nosotros. Sin embargo, si tales reglas pudieran ser formuladas, ellas no serían muy útiles; uno tiene que asumirlas en carne y hueso y tenerlas listas para un uso inminente. La resolución independiente de problemas difíciles ayudará al estudiante mucho más que los aforismos que él sigue, aunque para un comienzo estos puedan no dañarlo". (Polya, G. y Szegö, G. 1925, p. 11).

Schoenfeld (1987) señala que en "How to Solve It"Polya no se contenta con este simple aforismo, así que realiza un estudio introspectivo del método cartesiano. Aunque su alcance se vio limitado al modesto enfoque de la heurística, hay que destacar un aporte fundamental: el aislamiento de cuatro fases claramente identificables durante el proceso de resolución de problemas: Comprensión del problema; Concepción de un plan; Ejecución del plan; y Visión retrospectiva. En cada una Polya propone una serie de reglas heurísticas bastante sugerentes, pero lo más notorio, en primer lugar, consiste en que la mayoría de ellas van dirigidas a la segunda fase. El propio Polya señala: "De hecho, lo esencial de la solución de un problema es concebir la idea de un plan."(Polya, G. 1976, p.30).

El mismo autor analiza la diferencia entre "heurística" y "heurística moderna" y expone, en lo fundamental, que en la segunda se trata de: çomprender el método que conduce a la solución del problema, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Un estudio serio de la heurística debe tener en cuenta el trasfondo tanto lógico como psicológico". (Polya, G. 1945, pp. 113-114).

A pesar de que "How to Solve It"marcó un hito en el campo de la Didáctica de la Matemática, en su fecha de aparición no causó gran impacto, ya que los currículos escolares estaban fuertemente influenciados por los asociacionistas, los cuales propugnaban un aprendizaje por repetición. Aún así, Polya continuó su emprendedora obra y en 1954 publicó en la misma dirección "Mathematics and Plausible Reasoning". Sin embargo, no es hasta la década de los ochenta que se toman en cuenta, en los EE.UU., para su instrumentación en el contexto del aula las ideas de Polya, sobre todo lo concerniente a las etapas en el proceso de resolución de problemas.

Es importante resaltar que los trabajos de Polya y Hadamard aparecieron en el mismo año y que abrieron el camino para la formalización de conceptos utilizados en la enseñanza de las Matemáticas. Por ejemplo el concepto problema.

Inspirado en la ideas de Hadamard sicólogos de la talla de Shaldon (1954) y Rubinstein (1965) estudian el concepto problema y plantean que: en todo verdadero problema el sujeto desconoce la vía de solución y al posicionarse frente al problema mismo adopta un carácter activo.

En el campo de la Didáctica de la Matemática aparecieron diferentes criterios en relación con lo que es un problema, al aparecer, en muchos casos, por la interferencia semántica mezclado con el término de ejercicio. La escuela de Didáctica de las Matemáticas de la antigua R.D.A elaboró una clasificación de los ejercicios, tomando como base el grado de abstracción en el reflejo de los elementos y relaciones. Como concepto superior tomó los ejercicios matemáticos propuestos a los alumnos, los cuales se subdividen en dos conceptos subordinados: ejercicios de aplicación (los que tienen su origen en la práctica) y ejercicios construidos (aquellos que se conciben con fines didácticos, o sea, para ejercitar, profundizar, aplicar, asegurar las condiciones previas, entre otros).

En 1981 Kantowski deja clara la diferencia entre ejercicio y problema cuando asevera: " un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que lo conducirá con certeza a la solución."(Kantowski, M. 1981, p. 111). A partir de este momentos se pueden encontrar en la literatura múltiples definiciones, pero las mismas no se contradicen y permiten delimitar dos importantes elementos.

1. La vía de pasar de la situación inicial a la nueva situación debe de ser desconocida; estableciendo diferencias esenciales entre ejercicio y problema.

2. La persona quiere realizar esa transformación, poniendo bien en claro que lo que constituye un problema para uno puede no serlo para otro.

Cabe señalar que desde el punto de vista didáctico, no hay un marco teórico explicativo completo sobre cómo se relacionan los variados aspectos del pensamiento matemático en el proceso de resolución de problemas. No obstante en este contexto, parece un acuerdo general sobre la importancia de los siguientes aspectos dados por Schoenfeld(1992):

- El conocimiento de base.
- Las estrategias específicas de resolución de problemas.
- Los aspectos metacognitivos.

- Los aspectos afectivos y el sistema de creencias.
- La comunidad donde se desarrolla la páctica.

Lester(1994) examinó 25 años de investigación publicada sobre la solución de problema en matemáticas, en función de estudiar los cambios evolutivos y la coherencia en la investigación sobre esta línea. Él concluyó que aunque hubo progresos significativos todavía se necesitaba trabajar en direcciones tales como:

- El papel del profesor en el tratamiento de los problemas en el aula.
- Estudiar la verdadera realidad de lo ocurre en el aulas.
- Profundizar en la resolución de problemas en grupo.

Otro elemento asociado al trabajo anteriormente citado es que en el mismo se enfatiza y explica la importancia para la resolución de problemas de intregar de manera coordinada la experiencia previa, los conocimientos y la intuición de los estudiantes. Es importante resaltar que Lester(1994) corrobora la importancia de los aspectos metacognitivos desarrollado en los trabajos de schoenfeld.

A partir de estas formalizaciones aparecieron aportes muy concretos respecto a la resolución de problemas por la ya mencionada escuela de Didáctica de la Matemática de la desaparecida R.D.A., en lo fundamental, las ideas y técnicas desarrolladas en relación con la instrucción heurística en el contexto de las Matemáticas escolares. La escuela alemana concebía un sistema de procedimientos heurísticos, clasificados en principios, reglas y estrategias (generales y particulares) que debía ser objeto de enseñanza a los estudiantes, durante el proceso de resolución de problemas.

Los trabajos realizados por la escuela alemana se proponían formular un Programa General Heurístico (PGH), que abarcara todo el proceso de resolución de ejercicios y problemas y, además, que estuvieran presentes todos los demás programas como subprogramas o en forma de casos especiales.

El primero de los modelos que se presenta es el más conocido por los profesores en la actualidad y de sus fases; la segunda es la de mayor importancia desde el punto de vista metodológico, pues en el proceso de la resolución de problemas buscar la idea y la vía de solución resulta lo más complejo para cualquier resolutor. Pues como afirma Polya:

"Poner en pie un plan, concebir la idea de la solución, ello no tiene nada de fácil. Hace falta, para lograrlo, el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, y lo que es más, buena suerte."(Polya, G. 1976, p. 33).

Las ideas centrales de los principales modelos, son:

Polya:(Comprender el problema, Concebir el plan, Ejecutar el plan y Vista retropectiva.)

Schoenfeld:(Análisis y compresión del problema, Diseñar y planificar la solución, Explorar soluciones y Verificar las soluciones.)

Müller:(Orientación, Elaboración, Realización y Evaluación.)

Jungk:(Orinetación hacia el problema, Trabajo en el problema, Solución del problema y Evaluación de la solución.)

Es importante resaltar que en el PHG de Polya los elementos de sus fases no aparecen detallados; por lo tanto, su aplicación de manera directa resulta difícil. La estrategia desarrollada por Schoenfeld, aunque dirigida a alumnos talentos, es más explícita y aplicativa y pudiera aplicarse parcialmente, con adaptaciones, a los estudiantes de nuestras aulas. El de Müller y el de Jungk son similares y más completos que los anteriores; estos últimos plantean un PHG aplicable a cualquier tipo de problema.

A modo de resumen, en todo el universo de la contemporaneidad perpetua la asunción logológica constituyendo el elemento directriz de las pretensiones formativas cimentadas en la resolución de los problemas matemáticos, pero esta vez las asunciones didácticas tienden al análisis del rol dinámico y activo de los sujetos cognoscentes como resolutores de problemas, a partir de la preocupación, no solo por problemas relacionados con la enseñanza, sino, y esto es de suma importancia, por cuestiones que abordan el fenómeno del aprendizaje y su significación; factores estos devenidos en un conjunto de modelos que, aunque no resuelven en su totalidad los problemas existentes, condicionan una mayor racionalidad a las intenciones formativas y didácticas de la Matemática. En tal dirección cabe mencionar los trabajos de Zilmer(1989) y Sigarreta et al (2003,2004,2005).

Referencias

[1] Bernel, R., *Problem solving and mathmatics*, Seymour publishers, Palo Alto, 1982.

[2] Boyer, C. B., *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[3] Castro, I., *Leonhard Euler*, Prinomex, México D. F, 1996.

[4] Hadamard, J., *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*, Ed Princenton University Press, Princenton, 1945.

[5] Jungk, W., *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1979.

[6] Kantowski, M. G., *Mathematics Educations Research Implications for the 80's.* Problem solving(USA)**4**, 111-126, 1981.

[7] Lester, F. K., Musings about mathematical problems solving research:1970-1994, *Journal for Research in Mathematics Education* **25(6)** (1994),660-675.

[8] Müller, H., *Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la Enseñanza de la Matemática*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1987.

[9] Platón, *Obras completas*, Ediciones Aguilar, Madrid, 1996.

[10] Polya, G., *How to solve it*, Editorial Princenton University press, Princenton, 1945.

[11] Polya, G., *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, Editorial Combined edition, New York, 1976.

[12] Polya, G. y Szegö, G., *Aufgaben und Lehrstze auf der Analysis I*, Published by Springer. New York. 1925.

[13] Rubinstein, S. L., *El proceso de pensamiento*, Editora Nacional, La Habana, 1965.

[14] Shaldon, J., *Psicología y Matemáticas*, Editora Alianza,Madrid, 1954.

[15] Schoenfeld, A. H., *A brief and biased history of problem solving*, Ed University of California, Berkeley, 1987.

[16] Schoenfeld, A. H., *Learning to think mathematically* , In handbook for Research on mathematical teaching and learning. Macmillan, New York,1992

[17] Sigarreta, J. M. y J. Torres, Utilización de los problemas matemáticos en la formación de valores, *Edu. Matemática* **8** (2003),32-44.

[18] Sigarreta, J. M. y Ruesga, P, Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para interacción sociocultural, *PREMISA* **20** (2004),15-29.

[19] Sigarreta, J. M. y Arias, L, La resolución de problemas: Un recurso para la formación de la personalidad, *SOAREM* **17** (2003),13-23.

[20] Zilmer, W., *Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1989.

J. M. Sigarreta
J. M. Rodríguez
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid, España
jsigarre@math.uc3m.es. jomaro@math.uc3m.es
P. Ruesga
Departamento de Didácticas Específicas
Universidad de Burgos, España.
pruesga@ubu.es