El truco de m pilas de Gergonne y el sistema de numeración de base m

Roy Quintero*

Resumen

En este artículo, consideramos el truco de m pilas de Gergonne y su relación con el sistema de numeración de base m. El caso $m = 3$ produce uno de los más viejos trucos "mágicos" matemáticos que involucra el reordenamiento de 27 cartas. Joseph Diaz Gergonne [3], un matemático francés, fue el primero en analizarlo y generalizarlo en 1813. En [2, pág. 39], Gardner dice: *Mel Stover, of Winnipeg, Canada, calls my attention to the application of the ternary counting system to the Gergonne pile trick*. Inmediatamente, en [2, pág. 40], él también expresa: *Reflecting on the above matters led Mr. Stover to the invention of a truly stupendous breath-taking version of the trick. It makes use of the decimal system and a deck of 10 billion playing cards!*

Basados en estos casos ($m = 3$ y $m = 10$), demostramos matemáticamente la existencia de una relación formal entre la posición de la carta escogida después de aplicar el truco de Gergonne con una baraja de m^m cartas y el sistema de numeración de base m usando aritmética modular. También, damos pruebas matemáticas generales de algunas situaciones particulares como son: nombrar la posición de la carta, llevar la carta a una posición indicada y nombrar la carta.
Palabras y frases clave: A08 matemáticas recreativas, 11A07 congruencias; raíces primitivas; sistemas de residuos, 11B50 sucesiones (mod m).

The Gergonne m-pile trick and the base m counting system

Abstract

In this paper, we consider the Gergonne m-pile trick and its relation with the base m counting system. The case $m = 3$ produces one the oldest of mathematical "magic" tricks that involve the reordering of 27 cards. Joseph Diaz Gergonne [3], a French mathematician, was the first to analyze and generalize it in 1813. In [2, pag. 39], Gardner says: *Mel Stover, of Winnipeg, Canada, calls my attention to the application*

*El contenido de este trabajo es una versión ampliada de la ponencia, con igual título, presentada por el autor en el International Congress of Mathematicians celebrado en Madrid entre el 22 y el 30 de agosto de 2006.

of the ternary counting system to the Gergonne pile trick. Immediately, in [2, pag. 40], he also expresses: *Reflecting on the above matters led Mr. Stover to the invention of a truly stupendous breath-taking version of the trick. It makes use of the decimal system and a deck of 10 billion playing cards!*

Based on these cases ($m = 3$ and $m = 10$), we demonstrate mathematically the existence of a formal relation between the position of the selected card after applying the Gergonne trick with a deck of m^m cards and the base m counting system by using modular arithmetic. Also, we give general mathematical proofs of some particular situations as are: naming the position of the card, bringing the card to a named position and naming the card.

Key words and phrases: A08 recreational mathematics, 11A07 congruences; primitive roots; residue systems, 11B50 sequences (mod m).

1. Introducción

El truco de Gergonne, tal como lo conocemos hoy día, fue propuesto inicialmente por Joseph Diaz Gergonne en *Les Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, comúnmente llamados los Annales de Mathématiques de Gergonne, una especie de períodico matemático editado por Gergonne desde 1810 hasta 1832. En el cuarto tomo [3][1], Gergonne presenta la teoría general para un paquete de m^m cartas. En [5, pág. 328], Rouse Ball dice que el truco de tres pilas ($m = 3$) es mencionado por Bachet [1, prob. XVIII], pero que su análisis es insuficiente.

Existen algunas generalizaciones a su vez del truco de m pilas de Gergonne, una excelente referencia es el artículo de Harrison, Brennan y Gapinski [4].

En la Sección 2, una fórmula general (Teorema 2.1) será desarrollada para el caso general de m pilas con m^{m-1} cartas cada una, la cual permite expresar la posición de cualquier carta escogida después de la m-ésima recolección en términos del sistema de numeración de base m. Lográndose así formalizar matemáticamente y de manera general lo comentado por Gardner en [2], como fue mencionado en el resumen. Para éllo, empleamos aritmética modular con módulo m y tomamos, por razones de conveniencia técnica, como sistema

[1]Mi agradecimiento al Dr. Christian Gerini de la *Université du Sud Toulon Var* de Francia, por suministrarme una copia electrónica del artículo original de Gergonne.

de residuos el conjunto $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. En el artículo original de Gergonne [3], el autor utiliza teoría de combinaciones en lugar de aritmética modular y la posición final de la carta escogida se expresa por medio de dos fórmulas, una para el caso par y otra para el impar.

En la Sección 3, damos pruebas matemáticas de algunas situaciones particulares, pero para cualquier m. Las situaciones consideradas son aquellas cubiertas heurísticamente en el capítulo 3 del excelente libro sobre el tema de Gardner [2] y que corresponden al caso $m = 3$. Específicamente, nombrar la posición de la carta, llevar la carta a una posición indicada y nombrar la carta.

2. El truco de m pilas de Gergonne y el sistema de numeración de base m

Sea $m \geq 3$ un entero fijo. Supongamos que tenemos una baraja de m^m cartas boca abajo y que n es la n-ésima carta contando desde el tope del paquete. El ejecutante realiza un paso del truco de Gergonne asumiendo que la carta escogida por el espectador es n; es decir, reparte las cartas boca arriba en m pilas o columnas con m^{m-1} cartas cada una, tal como se muestra en la Figura 1. Mientras tanto, el espectador observa con cuidado y al finalizar la repartición, indica la pila en la que ha caído la carta escogida. Inmediatamente, el ejecutante recolecta todas las pilas -con las cartas aún boca arriba- y coloca la pila indicada en la posición k-ésima contando desde 1 (fondo) hasta m (tope), como lo indica la Figura 2. Entonces, volteamos la baraja y la carta escogida pasa a ocupar la posición $P_k(n)$ dada por la fórmula siguiente:

$$P_k(n) = \frac{n - j}{m} + 1 + (k - 1)m^{m-1},$$

si $n \equiv j \pmod{m}$ y j pertenece al sistema de residuos I_m. Esto se sigue claramente observando la Figura 1, ya que si $n = im + j$ $(0 \leq i \leq m^{m-1} - 1)$ entonces, $i + 1$ es la posición de la carta n dentro de la Pila j (contando desde el fondo) después de repartir las

Pila 1	Pila 2	…	Pila j	…	Pila m
$(m^{m-1}-1)m+1$	$(m^{m-1}-1)m+2$	$\dots$	$(m^{m-1}-1)m+j$	$\dots$	$m^{m-1}m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$im+1$	$im+2$	$\dots$	$im+j$	$\dots$	$(i+1)m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2m+1$	$2m+2$	$\dots$	$2m+j$	$\dots$	$3m$
$m+1$	$m+2$	$\dots$	$m+j$	$\dots$	$2m$
1	2	$\dots$	j	$\dots$	m

Figura 1: Repartición de las cartas

cartas. Realizando algunos cálculos simples obtenemos que,

$$\frac{n-j}{m}+1=i+1\in\{1,2,\dots,m^{m-1}\}.$$

Por otra parte, observe que luego del ensamblaje de la pilas hay exactamente $k-1$ pilas debajo de la pila que contiene la carta escogida. Pero, cada pila tiene m^{m-1} cartas, así que hay exactamente $i+(k-1)m^{m-1}$ cartas debajo de la carta seleccionada. Por tanto, una vez que el paquete completo es volteado boca abajo para la próxima repartición, la carta escogida tendrá sobre sí misma $i+(k-1)m^{m-1}$ cartas y su nueva posición será $i+1+(k-1)m^{m-1}=P_k(n)$.

A continuación, presentamos una definición precisa del truco de Gergonne. Seguidamente, damos otra definición y una proposición referentes a una clase finita de conjuntos finitos, así como un lema sobre sucesiones módulo m, los cuales serán de suma utilidad para probar el principal resultado de esta sección (Teorema 2.1).

Definición 2.1 Sea $m\geq 3$ un entero fijo. Sean $n,k_1,\dots,k_m$ enteros que satisfacen las condiciones:

1. $1\leq n\leq m^m$.
2. $1\leq k_i\leq m$.

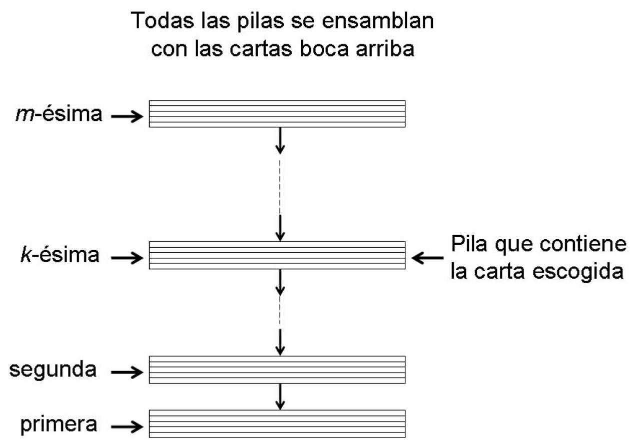

Figura 2: Recolección de las pilas

Diremos que el truco de m pilas de Gergonne se ha ejecutado sobre la carta n según el esquema $\{k_i\}_{i=1}^{m}$, si la función $G_{\{k_i\}_{i=1}^{m}} = P_{k_m} \circ \cdots \circ P_{k_1}$ es evaluada en n.

Observemos que ejecutar el truco es equivalente a hallar la posición final de la carta escogida. También es importante mencionar que existen m^m diferentes esquemas posibles para cada n y en total existen m^{2m} posibles variantes del truco de m pilas de Gergonne, sin considerar las diversas formas cómo pueden ser colocadas las restantes $m-1$ pilas que no contienen la carta escogida en cada recolección.

Definición 2.2 Sean $m \geq 3$ un entero fijo y $\{J_i\}_{i=0}^{m^{m-2}-1}$ la clase finita de conjuntos finitos de números naturales definida por:

$$J_i = \{lm^{m-1} + im + j : 0 \leq l \leq m-1 \text{ y } 1 \leq j \leq m\}.$$

Proposición 2.1 La clase finita $\{J_i\}_{i=0}^{m^{m-2}-1}$ satisface las siguientes propiedades:

(1) $J_{i_1} \cap J_{i_2} = \emptyset$, si $i_1 \neq i_2$.

(2) $\bigcup_{i=0}^{m^{m-2}-1} J_i = \{1, 2, \ldots, m^m\}$.

Demostración: (1) Supongamos que $J_{i_1} \cap J_{i_2} \neq \emptyset$. Sea $x \in J_{i_1} \cap J_{i_2}$. Entonces existen enteros $0 \leq l_1, l_2 \leq m-1$ y $1 \leq j_1, j_2 \leq m$ tales que

$$x = l_1 m^{m-1} + i_1 m + j_1 = l_2 m^{m-1} + i_2 m + j_2.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $j_2 \geq j_1$. Primero consideremos el caso $j_2 > j_1$. Entonces, $j_2 - j_1 = ((l_1 - l_2)m^{m-2} + (i_1 - i_2))m$, luego necesariamente $i_2 - i_1 = m^{m-2}(l_1 - l_2)$ y como $i_1 \neq i_2$, tenemos que $l_1 = l_2$. Esto a su vez implica que $j_2 - j_1 = (i_1 - i_2)m$, lo cual es imposible porque $i_1 \neq i_2$ y $0 < j_2 - j_1 < m$. Así que el caso $j_2 > j_1$ es imposible, y en consecuencia $j_1 = j_2$. Pero en este caso tenemos nuevamente la ecuación $i_2 - i_1 = m^{m-2}(l_1 - l_2)$, lo cual es imposible porque $0 < |i_2 - i_1| < m^{m-2}$. Por tanto, nuestra suposición es falsa y los conjuntos J_{i_1} y J_{i_2} son disjuntos.

(2) Sea n, $1 \leq n \leq m^m$. Sea $j \in I_m$ (único) tal que $n \equiv j \pmod{m}$. Sea k el único entero $0 \leq k \leq m^{m-1} - 1$ tal que $n = km + j$. Por el algoritmo de la división, existen enteros l, i, $0 \leq l \leq m-1$ y $0 \leq i \leq m^{m-2} - 1$ tales que $k = lm^{m-2} + i$. Por tanto, $n \in J_i$, y tenemos que se cumple la inclusión $\bigcup_{i=0}^{m^{m-2}-1} J_i \supset \{1, 2, \ldots, m^m\}$. La otra inclusión es evidente porque cada J_i $(0 \leq i \leq m^{m-2} - 1)$ está contenido en $\{1, 2, \ldots, m^m\}$. ■

Lema 2.1 Sean $m \geq 3$ un entero fijo e i un entero $0 \leq i \leq m^{m-2} - 1$. Entonces existen sucesiones de enteros $\{i_s\}_{s=1}^{m-2}$ y $\{j_s\}_{s=2}^{m-2}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $0 \leq i_s \leq m^{m-(s+1)} - 1$.

(2) $j_s \in I_m$.

(3) $i_s + 1 = i_{s+1} m + j_{s+1}$ $(1 \leq s \leq m-3)$.

Demostración: Sea $i_1 = i$. Claramente, i_1 satisface (1). Sea $j_2 \in I_m$ (j_2 satisface (2)) tal que $i_1 + 1 \equiv j_2 \pmod{m}$. Entonces, existe un entero i_2 tal que $i_1 + 1 = i_2 m + j_2$ (se cumple (3), para $s = 1$). Observemos que,

$$-1 + \frac{1}{m} \leq i_2 \leq m^{m-3} - \frac{1}{m}.$$

Así que $0 \leq i_2 \leq m^{m-3} - 1$. Repitiendo, el procedimiento $m-3$ veces, producimos las sucesiones requeridas. ■

Ahora presentamos el siguiente teorema, el cual expresa que al ejecutar el truco de Gergonne sobre una carta de una baraja de m^m cartas, la posición final de la carta escogida no depende de la carta en sí, sino de la forma como han sido ensambladas las pilas que la contenían en cada paso; es decir, que depende del esquema considerado. Ciertamente, esto es conocido (ver [3]), pero la fórmula (1), expresa adicionalmente que su valor posicional siempre se puede expresar en términos del sistema de numeración de base m, unificando a su vez las fórmulas dadas en [3] (casos par e impar). Este resultado, demuestra que los comentarios hechos por Gardner en [2, págs. 39 y 40] sobre los casos ternario ($m = 3$) y decimal ($m = 10$) son ciertos y además los generaliza.

Teorema 2.1 Sea $\{k_i\}_{i=1}^m$ un esquema cualquiera. Entonces,

$$G_{\{k_i\}_{i=1}^m}(n) = [(k_m - 1) \dots (k_1 - 1)]_{base\ m} + 1, \tag{1}$$

para toda n ($1 \leq n \leq m^m$).

Demostración: Dado n, existe (Proposición 2.1) un único entero i tal que $n \in J_i$. Sean l, j enteros tales $n = lm^{m-1} + im + j$ y sean $\{i_s\}_{s=1}^{m-2}$ y $\{j_s\}_{s=2}^{m-2}$ como en el Lema 2.1. Denotemos $c_s = (k_s - 1)m^s + \cdots + (k_1 - 1)m + l$ ($1 \leq s \leq m-2$), entonces

$$\begin{aligned}
G_{\{k_i\}_{i=1}^m}(n) &= P_{k_m} \circ \cdots \circ P_{k_1}(lm^{m-1} + im + j) \\
&= P_{k_m} \circ \cdots \circ P_{k_2}(lm^{m-2} + i_1 + 1 + (k_1 - 1)m^{m-1}) \\
&= P_{k_m} \circ \cdots \circ P_{k_2}(c_1 m^{m-2} + i_2 m + j_2) \\
&= P_{k_m} \circ \cdots \circ P_{k_3}(c_1 m^{m-3} + i_2 + 1 + (k_2 - 1)m^{m-1}) \\
&= P_{k_m} \circ \cdots \circ P_{k_3}(c_2 m^{m-3} + i_3 m + j_3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots\\
&= P_{k_m} \circ P_{k_{m-1}} \circ P_{k_{m-2}}(c_{m-4}m^2 + i_{m-3} + 1 + (k_{m-3}-1)m^{m-1})\\
&= P_{k_m} \circ P_{k_{m-1}} \circ P_{k_{m-2}}(c_{m-3}m^2 + i_{m-2}m + j_{m-2})\\
&= P_{k_m} \circ P_{k_{m-1}}(c_{m-3}m + i_{m-2} + 1 + (k_{m-2}-1)m^{m-1})\\
&= P_{k_m} \circ P_{k_{m-1}}(c_{m-2}m + i_{m-2} + 1)\\
&= P_{k_m}(c_{m-2} + 1 + (k_{m-1}-1)m^{m-1})\\
&= P_{k_m}(((k_{m-1}-1)m^{m-2} + \cdots + (k_1 - 1))m + (l+1))\\
&= (k_{m-1}-1)m^{m-2} + \cdots + (k_1-1) + 1 + (k_m - 1)m^{m-1}\\
&= [(k_m - 1)\dots(k_1-1)]_{base\ m} + 1
\end{aligned}
$$

■

Observación 2.1 Del Teorema 2.1 concluimos lo siguiente:

1. El truco no depende de la carta sobre la cual se ejecuta, lo cual lo hace infalible.
2. El truco depende del esquema seguido, lo cual permite al "mago" ejecutarlo a su conveniencia.
3. La posición final de la carta escogida se puede calcular a través de una única fórmula general, lo cual unifica y simplifica el resultado original de Gergonne dado en [3].
4. La posición final se puede calcular utilizando el sistema de numeración de base m, lo cual demuestra en general lo comentado por Gardner en [2], sobre los casos de 3 y 10 pilas.

3. Situaciones particulares

En [2, pág. 33], Gardner dice, una vez que se ha ejecutado el procedimiento de las tres pilas, lo siguiente:

> *(...) the magician is able to do one of three things:*
>
> 1. *Name the exact position of the chosen card from the top of the packet.*
> 2. *Find the chosen card at a position previously demanded by the spectator.*

3. Name the card.

Inmediatamente, procede a discutir de manera heurística cada cosa separadamente, pero no da pruebas matemáticas formales de las mismas. A continuación, damos una prueba formal de cada situación en general; es decir, para toda m.

3.1. Nombrar la posición de la carta

En esta versión, le es permitido al espectador ensamblar las pilas después de cada repartición, recogiéndolas en cualquier orden que él desee. Incluso, la repartición puede ser hecha por el espectador. En realidad, no es necesario que el ejecutante ("mago") toque las cartas. Simplemente, debe observar cuidadosamente la colocación de la pila que contiene la carta escogida después de cada recolección. Establecemos esto, matemática y formalmente, en el siguiente corolario.

Corolario 3.1 Si el truco de m pilas de Gergonne es ejecutado, entonces la posición de la carta escogida siempre puede ser descubierta.

Demostración: Supongamos que una vez ejecutado el truco, las m posiciones que tomaron las pilas que contenían la carta escogida son: primero k_1 (k_1-ésima), luego k_2 (k_2-ésima), ..., y finalmente k_m (k_m-ésima), entendiendo que estos valores son 1 para el fondo, 2 para la segunda posición, ..., y m para el tope. Entonces, de acuerdo con el Teorema 2.1, la carta escogida, digamos n, -sin conocer su identidad- toma la posición:

$$
\begin{aligned}
[(k_m-1)\dots(k_1-1)]_{base\ m}+1 &= \sum_{i=m}^{1}(k_i-1)m^{i-1}+1 \\
&= k_1+(k_2-1)m+\cdots+(k_m-1)m^{m-1}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la posición de la carta escogida siempre puede ser descubierta. ■

En la práctica, el mago sólo tiene que observar cuidadosamente y hacer mentalmente los cálculos simples y parciales siguientes: primero memorizar k_1, después de la primera recolección; luego sumarle $(k_2-1)m$, después de la segunda recolección, ..., y finalmente, sumar $(k_m-1)m^{m-1}$ después de la última recolección.

3.2. Llevar la carta a una posición indicada

En esta segunda versión, le es pedido al espectador que establezca, antes de la ejecución del truco, la posición en la cual desea que aparezca la carta seleccionada por él una vez finalizado el truco. En este caso, debe permitírsele al mago ensamblar las pilas después de cada repartición. Al final del truco, la carta escogida debe encontrarse en la posición requerida por el espectador. Establecemos esto, matemática y formalmente, en el siguiente corolario.

Corolario 3.2 Si la posición requerida es la p-ésima $(1 \leq p \leq m^m)$, entonces la carta escogida siempre puede ser llevada a esa posición cada vez que se ejecuta el truco de m pilas de Gergonne.

Demostración: Supongamos que la carta escogida es n (nuevamente su identidad no es relevante). Expresemos el entero $p-1$ en base m, digamos que $p-1=[k_m \ldots k_1]_{base\ m}$. Entonces, por el Teorema 2.1, al ejecutar el truco colocando las pilas que contienen la carta escogida según el esquema $\{k_i+1\}_{i=1}^{m}$; es decir, k_1+1 para la primera recolección, k_2+1 para la segunda, ..., y k_m+1 para la última, tenemos que la carta escogida pasa a ocupar la posición:

$$[k_m \ldots k_1]_{base\ m}+1=(p-1)+1=p.$$

Por tanto, la carta escogida siempre puede ser llevada a una posición cualquiera preestablecida. ■

En la práctica, el mago sólo tiene que restar 1 al número indicado por el espectador y expresar el resultado en base m, luego sumar 1 a cada cifra obtenida e invertir el orden, y entonces proceder a ejecutar el truco utilizando este esquema.

3.3. Nombrar la carta

Finalmente, en esta versión también el truco puede ser ejecutado por el mismo espectador si lo desea, pero sujeto a las condiciones adicionales siguientes:

1. m es impar.
2. En las m recolecciones se coloca la pila que contiene la carta escogida en el medio de las demás.

Esta variante es llamada '*truco de m pilas de Gergonne clásico*'. Al final, la carta escogida ocupará siempre la $\frac{m^m+1}{2}$ -ésima posición, lo cual significa que la carta escogida pasa a ocupar la posición media de la baraja. Establecemos esto, matemática y formalmente, en el siguiente corolario.

Corolario 3.3 Si el truco de m pilas de Gergonne clásico es ejecutado, entonces la carta escogida siempre ocupará la $\frac{m^m+1}{2}$ -ésima posición y además puede ser nombrada.

Demostración: Supongamos que la carta escogida es n (nuevamente su identidad no es relevante). Observemos que la condición 1 garantiza que $m+1$ es par. Por otra parte, la condición 2 es equivalente a seguir el esquema $\{\frac{m+1}{2}\}_{i=1}^{m}$. Entonces, al aplicar el Teorema 2.1, tenemos que la carta n pasa a ocupar la posición

$$\left[\left(\frac{m+1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{m+1}{2}-1\right)\right]_{base\ m}+1 \quad =$$

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)\cdots\left(\frac{m-1}{2}\right)\right]_{base\ m}+1 \;&= \sum_{i=m}^{1}\left(\frac{m-1}{2}\right)m^{i-1}+1 \\ = \;\left(\frac{m-1}{2}\right)\left(\frac{m^m-1}{m-1}\right)+1 &= \frac{m^m-1}{2}+1 \\ &= \frac{m^m+1}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto, cada vez que la variante clásica es ejecutada la carta escogida siempre pasa a ocupar la $\frac{m^m+1}{2}$ -ésima posición. Finalmente, después de la última repartición el ejecutante observa las cartas medias de cada pila y una vez que el espectador indica la pila que contiene la carta escogida por él, simplemente recuerda la carta correspondiente a esa pila y la nombra. ■

En la práctica, el mago sabe que después de la m-ésima repartición debe memorizar la carta media de cada pila; es decir, la carta que ocupa la $\frac{m^{m-1}+1}{2}$ -ésima posición de cada pila, de manera que cuando el espectador diga cuál de éllas contiene la carta escogida, inmediatamente él sabrá cuál es la carta y entonces podrá nombrarla ("adivinarla").

Referencias

[1] BACHET C., *Problèmes plaisants & délectables qui se font par les nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1884.

[2] GARDNER M., *Mathematics Magic and Mystery*, Dover Publications Inc., Mineola, N. Y., 1956.

[3] GERGONNE, J. D., Récréations Mathématiques: Recherches sur un tour de cartes, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, IV (1813-1814), 276-283.

[4] HARRISON, J., BRENNAN, T., GAPINSKI, S., The Gergonne p-pile problem and the dynamics of the function $x \mapsto \lfloor (x+r)/p \rfloor$, *Discrete Applied Mathematics*, 82 (1998), 103-113.

[5] ROUSE BALL, W. W., COXETER, H. S. M., *Mathematical Recreations and Essays*, Dover Publications Inc., Mineola, N. Y., 1987.

ROY QUINTERO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS,
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, TRUJILLO, VENEZUELA
rquinter@ula.ve