DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

El Plano de Minkowski y la Geometría de los Espacios de Banach

Diomedes Bárcenas *

Resumen. Este es un artículo expositivo, donde se explica cómo algunas propiedades de los espacios de Banach pueden obtenerse a partir del estudio de los subespacios bidimensionales; en particular se estudian algunas caracterizaciones de espacios de Hilbert, uniformemente convexos, estrictamente convexos y lisos. Así mismo se muestra cómo obtener información de la estructura normal en un espacio de Banach partiendo de sus subespacios bidimensionales.

Abstract. In this article we explain how some properties of Banach's spaces can be obtained from the study of the two-dimensional subspaces; especially we studied some characterizations of Hilbert's spaces, uniformly convex, strictly convex and smooth spaces. We also show how to obtain information of the normal structure of a Banach's space from its two-dimensional subspaces.

1) Introducción.

Este es un artículo expositivo y la idea de escribirlo surgió de una Conferencia Plenaria dictada en las XVIII Jornadas de Matemáticas celebradas en la Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2005. En busca de un tema de interés general tomamos como punto de partida el artículo de Gao [15] donde sugiere (y demuestra) que nuestra enseñanza de pregrado en Geometría Elemental y Álgebra Lineal es útil en la investigación actual.

Con esta motivación y tomando en cuenta que en [3] se hallan muchas caracterizaciones de espacios de Hilbert partiendo de sus subespacios finito dimensionales, en varios casos partiendo de subespacios de dimensión 2; y que en los artículos de divulgación [30] y [31] se hace un estudio amplio de la Geometría de espacios de Minkowski (entendiéndose por espacio de Minkowski un espacio de Banach de dimensión finita) emprendimos la tarea que devino en la escritura

*Parcialmente financiado por CDCHT-ULA, proyecto C-1335-05-A

de este artículo, el cual está estructurado en la forma siguiente: En la sección 2 comenzamos con la ley del paralelogramo para presentar algunas caracterizaciones de espacios de Hilbert partiendo de sus subespacios bidimensionales. Una vez definida la ortogonalidad de James, en la sección 3 se muestra que no es posible sustituir rombos por paralelogramos para caracterizar espacios de Hilbert. La sección 4 está dedicada al estudio de la convexidad y lisura de espacios de Banach. Muchos de los resultados de esta sección son adaptados de [30] y [31], entre otros; los referentes a módulos de convexidad y lisura son adaptados de [4], [5], [9], [10], [21], [22] y [29] entre otras referencias; por su parte, la sección 5 está inspirada en [16], [17] y [18].

En este trabajo, para un espacio de Banach X, denotamos por S_X a $\{x : \|x\| = 1\}$.

2) Algunas caracterizaciones de los espacios de Hilbert mediante sus subespacios bidimensionales.

La ley del paralelogramo establece que un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in \mathrm{X};$$

lo cual geométricamente significa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

Dado que la ley del paralelogramo es de carácter bidimensional, ella se traduce en la siguiente caracterización de los espacios de Hilbert.

Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si cada uno de sus subespacios bidimensionales es un espacio de Hilbert.

De esta forma tenemos que es mucha la información que puede obtenerse acerca de los espacios de Hilbert conociendo la geometría de sus respectivos subespacios bidimensionales; lo cual muestra la vigencia de la obra de Euclides.

La norma de un espacio de Hilbert proviene de un producto escalar y respecto al producto escalar en $\mathbb{R}$ tenemos lo siguiente:

El producto euclídeo en $\mathbb{R}^2$ de dos vectores $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ se define por

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2;$$

y es posible demostrar que para cualquier producto escalar $(\cdot,\cdot)$ en $\mathbb{R}^2$ existe una matriz invertible A tal que

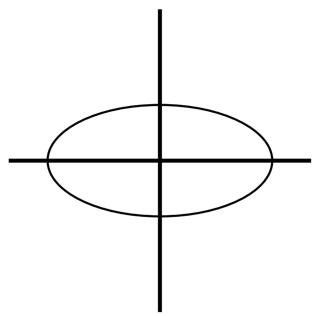
$$(x, y) = \langle Ax, Ay\rangle;$$

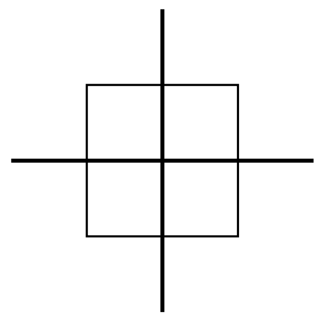
lo cual nos dice que el conjunto

$$\{x : (x, x) = \langle Ax, Ax\rangle = 1\}$$

es una elipse, un hecho que se transforma en la siguiente caracterización de espacios de Hilbert:

Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si la correspondiente esfera unitaria de cada uno de sus subespacios bidimensionales es una elipse centrada en el origen.





Esfera unitaria de un espacio de Hilbert bidimensional

El plano de Minkowski con esfera unidad como en la figura no es de Hilbert

Son muchas las caracterizaciones de espacios de Hilbert que se obtienen a partir de sus subespacios bidimensionales como consecuencia de la ley del paralelogramo y el libro de Amir [3] contiene un buen acopio de ellas.

Aquí nos referiremos tanto a algunas de las caracterizaciones aparecidas en el libro de Amir, así como a algunas más recientes: Entre las caracterizaciones de espacios de Hilbert reseñadas por Amir se encuentra una obtenida por Antonio Tineo [32]:

Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si el grupo de isometrías de cada subespacio bidimensional es infinito.

La demostración del Teorema de Tineo no es fácil; sin embargo, no hay duda de que su enunciado puede ser entendido por un estudiante de Álgebra Lineal.

Una prueba "más fácil", la ofrece Amir, módulo la existencia de medidas sobre grupos localmente compactos.

Para la demostración del Teorema de Tineo, Amir hace uso de una herramienta no disponible en 1980.

Teorema 1 (Borwein [6],1984)**.** *Un espacio de Banach* X *es un espacio de Hilbert si y sólo si existe $n \geq 2$ tal que para cualquier subespacio n-dimensional F, existe una medida de probabilidad μ sobre los borelianos del grupo de isometrías de F con*

$$\int T d\mu = 0,$$

para toda isometría T y

$$\int \|u + Tv\|^2 d\mu = 2 \quad \forall u, v \in \mathbf{S}_{\mathrm{X}}.$$

El Teorema de Borwein también es usado por Amir en la prueba de la siguiente caracterización de espacios de Hilbert.

Teorema 2 (Mazur (1938))**.** *Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si para todo subespacio finito dimensional F y $\forall u, v \in \mathbf{S}_F$, existe una isometría lineal T sobre F tal que $Tu = v$.*

Con estas herramientas demuestra Amir el Teorema de Tineo y obtiene un corolario de carácter geométrico:

Un espacio de Banach es un espacio de Hilbert si y sólo si la esfera unidad de cada uno de sus subespacios bidimensionales tiene infinitos ejes de simetría.

Resaltamos en este punto las relaciones entre Geometría Plana, Álgebra Lineal y Análisis Funcional.

El Teorema de Amir nos permite hacer la siguiente afirmación.

Si Γ es una curva de Jordan en $\mathbb{R}^2$ simétrica con respecto a un punto y la región acotada por Γ es convexa, entonces Γ tiene infinitos ejes de simetría si y sólo si Γ es una elipse.

Para ver esto, si la región acotada por Γ es convexa, suponiendo que el punto de simetría es el origen, entonces Γ es la esfera de un funcional de Minkowski, el cual es una norma. En este caso Γ tiene infinitos ejes de simetría si y sólo si

$\mathbb{R}^2$ es un espacio de Hilbert con dicha norma; un hecho que ocurre si y sólo si Γ es una elipse.

En 1970 Nathan Gurariy y Yu Sozonov [23] dieron una caracterización de espacios de Hilbert mediante la **ausencia de oblicuas**, lo cual nos recuerda nuestros cursos de Introducción a la Geometría Plana.

Definición 1. *Un espacio bidimensional* ***tiene oblicuas*** *si dada una cuerda de la circunferencia, la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda se alcanza en un punto distinto al punto medio de la cuerda.*

Teorema 3 ([23])**.** *Un espacio de Banach bidimensional es de Hilbert si y sólo si no tiene oblicuas.*

En el contexto del Teorema precedente, el recuerdo de la Geometría Plana nos viene en la siguiente forma:

En un triángulo isósceles la altura y la mediana coinciden.

En este contexto nos parece pertinente referirnos a la llamada **ortogonalidad de James**. En [2] se pueden estudiar diversas nociones de ortogonalidad.

Es sabido que dos vectores x e y son ortogonales en un espacio de Hilbert si y sólo si $\|x+y\| = \|x-y\|$ (Notación $x\#y$).

Esta propiedad de ortogonalidad en espacios con producto interno permitió que James generalizara a espacios de Banach arbitrarios la noción de ortogonalidad.

Definición 2. *[James [24]] Sea* X *un espacio normado. Dos vectores* $x, y \in \mathrm{X}$ *son ortogonales si y sólo si*

$$\|x+y\| = \|x-y\|.$$

James también es responsable de la siguiente caracterización de espacios de Hilbert.

Teorema 4 (James [24])**.** *Un espacio de Banach* X *es un espacio de Hilbert si y sólo si* $\forall x, y \in \mathrm{X}$ *con* $x\#y$ *se tiene que* $x\#\alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

La ortogonalidad de James, es usada por Tineo para obtener la siguiente caracterización de espacios de Hilbert:

El espacio de Banach X **es un espacio de Hilbert si y sólo si para todo subespacio maximal** H **de** X**, existe** $x \in \mathrm{X}, \quad x \neq 0$ **tal que** $x\#y \quad \forall y \in H$**.**

El teorema de James que recien hemos enunciado permite reescribir el Teorema de Gurariy-Sozonov, de acuerdo con la siguiente definición.

Si X es un plano de Minkowski, AB un segmento en X y C y D son puntos de X con $C \notin AB$ y $D \in AB$, decimos que CD es **altura de AB trazada por el punto C**, si $CD\#AB$ (CD y AB son ortogonales en el sentido de James).

Ahora podemos parafrasear el teorema de Nathan Gurariy y Yu Sozonov:

En un plano de Minkowski la norma viene dada por un producto interno si y sólo si en todo triángulo isósceles existe una única altura relativa a la base trazada por el vértice opuesto; y la altura es mediana de la base del triángulo.

Un resultado netamente de geometría plana.

Demostración. Sea ABC un triángulo isósceles con $\|AC\| = \|BC\|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C coincide con el origen de coordenadas. Si trazamos la circunferencia de centro C y radio $\|AC\|$, resulta que AB es una cuerda en esta circunferencia y por el Teorema de Gurariy-Sozonov, la norma de X proviene de un producto interno.

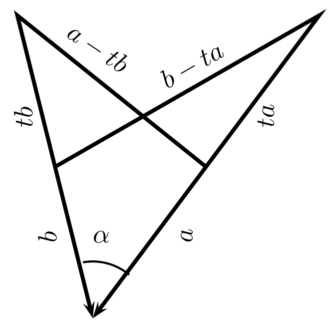
■

Quizás el más usado de los criterios de congruencia de triángulo sea el **criterio lado, ángulo, lado** (LAL), el cual establece en geometría plana, que dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes y congruente el ángulo formado por dichos lados.

Este criterio caracteriza los espacios de Hilbert:

Teorema 5 (Falkner [14], 1993)**.** *Sea* X *un plano de Minkowski. La norma de* X *es inducida por un producto interno si y sólo si*

$$\left.\begin{array}{c} \|a\| = \|b\| \\ y \\ t > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \|a - tb\| = \|b - ta\| \quad \forall a, b \in \mathrm{X}.$$



Note que la hipótesis del teorema se puede considerar como un caso particular del criterio LAL ya que el ángulo α es común a ambos triángulos; es decir, los ángulos no sólo son congruentes, si no que son iguales.

3) Un resultado negativo

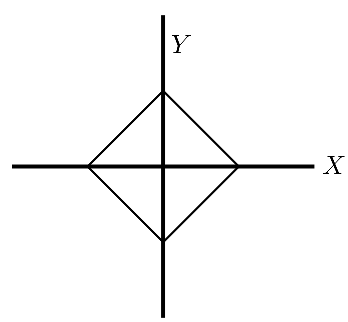
En 1980, J. Borwein y L. Keener [7], preguntaron si no era posible debilitar la hipótesis del paralelogramo y obtener la misma caracterización de espacios de Hilbert.

En esta dirección J. Gao en 1997, [15], llevó a cabo esta tarea sustituyendo paralelogramos por rombos y obtuvo un resultado negativo:

Recordemos que por definición, un **rombo** es un cuadrilátero convexo con sus cuatro lados congruentes y entre sus propiedades se encuentran las expresadas en el siguiente teorema:

Teorema 6. *a) Todo rombo es un paralelogramo.*

b) Las diagonales del rombo son mutuamente ortogonales.



La validez de la regla del paralelogramo para rombos nos dice todo rombo inscrito en la circunferencia unidad tiene lados igual a $\sqrt{2}$. Tomando como punto de partida la ortogonalidad de James la cual en última instancia caracteriza la ortogonalidad en espacios de Hilbert, tenemos lo siguiente:

Definición 3. *Un cuadrilátero en un plano de Minkowski es un* ***rombo*** *si*

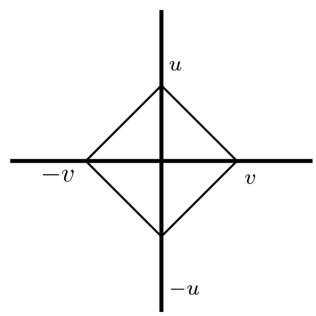
a) Los lados son congruentes

b) Las diagonales son ortogonales en el sentido de James:

$$\|u+v\| = \|u-v\|.$$

Supongamos que u y v son vectores unitarios con $\|u+v\| = \|u-v\|$ es decir, $(u+v)\#(u-v)$.

Si se vale la ley del paralelogramo para rombos en un plano de Minkowski se tiene que necesariamente los lados del rombo inscrito en el círculo unidad tienen una longitud igual a $\sqrt{2}$.



En este hecho se basa Gao para probar que los rombos son insuficientes para sustituir a los paralelogramos en la caracterización de espacios con producto interno al obtener el siguiente resultado:

Teorema 7. *Si la circunferencia unidad del plano de Minkowski es invariante bajo rotaciones de* $45°$*, entonces todo rombo inscrito en dicha circunferencia tiene lado de longitud* $\sqrt{2}$*.*

Dado que, como apunta Gao, todo polígono regular de $8n$ lados es la circunferencia de un plano de Minkowski, en particular el octógono regular, satisface la conclusión del teorema, resulta que la ley del rombo es insuficiente para caracterizar los espacios de Hilbert ya que, entre otras cosas ningún polígono regular tiene infinitos ejes de simetría.

4) Convexidad y Lisura

Además de los espacios de Hilbert, los espacios estrictamente convexos y los espacios lisos se caracterizan por la convexidad estricta y la lisura de sus subespacios bidimensionales; así mismo, el estudio de los subespacios bidimensionales proporciona información útil sobre los espacios uniformemente convexos.

Los espacios de Banach uniformemente convexos aparecieron en 1936 ante la búsqueda por parte de Clarkson [9] de una clase de espacios de Banach para la cual fuese válido el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Bochner, una integral que generaliza la integral de Lebesgue a espacios de Banach; y habida cuenta de la importancia del Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue, pareciera útil contar con una herramienta de esta envergadura para la integral de Bochner

La pregunta a responder en este caso es la siguiente. ¿Para cuáles espacios de Banach X es válido que toda función $f : [0,1] \to \mathrm{X}$ absolutamente continua es derivable casi seguramente con f' Bochner integrable y $f(t) = f(0) + \int_a^t f'(s)ds \quad \forall t \in [0,1]$?.

Pensando en la respuesta a esta interrogante, Clarkson introdujo los espacios uniforme y estrictamente convexos y probó que todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo, que en todo espacio uniformentemente convexo es válido el Teorema Fundamental del Cálculo, pero que existen espacios estrictamente convexos para los cuales no es válido este teorema.

Para ello demuestra que todo espacio de Banach separable admite una norma bajo la cual es estrictamente convexo, demostrando que $C_{[0,1]}$ es estrictamente convexo y luego hace uso del Teorema de Banach-Mazur que afirma que todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $C_{[0,1]}$.

Una demostración de este resultado utilizando el Teorema de Banach-Alaoglu, una herramienta inaccesible en la época del descubrimiento de Clarkson, fue obtenida por D. Bárcenas y L. Sánchez en 1998[5].

Clarkson también proporcionó ejemplos de espacios uniformemente convexos, demostrando que $L^p_{[0,1]} \quad 1 < p < \infty$ es uniformemente convexos, introduciendo al acervo matemático las famosas desigualdades de Clarkson.

Un espacio de Banach X se llama **estrictamente convexo** si $\forall x, y \in \mathrm{X}$, con $x, y \neq 0$

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = \lambda y$$

para algún escalar λ.

Un espacio de Banach X se llama **uniformemente convexo** si siempre que tengamos sucesiones $(x_n), (y_n) \subset \mathbf{S}_{\mathrm{X}}$ con $\|x_n - y_n\| \to 0$, se tiene que $\|x_n + y_n\| \to 2$.

Un concepto que ayuda en el estudio de la convexidad estricta y uniforme es el del llamado **módulo de convexidad**, el cual se define como la función

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{X}} : [0,2] &\rightarrow [0,1] \\ \varepsilon &\rightarrow \delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2},\ x,y \in \mathbf{S}_{\mathrm{X}} \quad \|x-y\| \geq \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

y se demuestra lo siguiente:

Teorema 8. *a)* X *es uniformemente convexo si y sólo si* $\varepsilon > 0 \Rightarrow \delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon) > 0$.

b) X *es estrictamente convexo si y sólo si* $\delta_{\mathrm{X}}(2) = 1$

Algunas caracterizaciones de los espacios estrictamente convexos a través de sus subespacios bidimensionales se expresan a continuación; la mayoría de ellas se encuentran en [30] para espacios finito dimensionales.

Sea X un plano de Minkowski, la convexidad estricta de X se caracteriza por:

i) $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ *implica que* x *e* y *son linealmente dependientes.*

ii) Una recta y una circunferencia se intersecan a lo sumo en dos puntos.

iii) Cualquier vector de norma menor que 1 es el punto medio de a lo sumo una cuerda en el círculo unitario.

iv) Cualquier vector de norma menor que 2 es la suma de a lo sumo un único par de vectores unitarios.

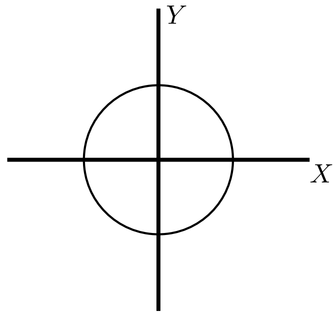
v) Cualquier par de círculos cuyos centros están a una distancia menor que 2 se intersecan a lo sumo en dos puntos.

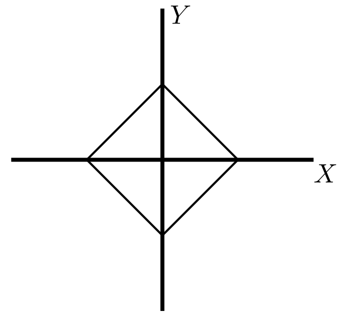
vi) Cualquier terna de puntos está contenida a lo sumo en un círculo.

vii) Cualquier punto de la bola es un punto extremo.

viii) La bola unitaria es redonda (no contiene segmentos rectilineos).

ix) Cualquier funcional lineal no nulo alcanza máximo en un único punto de bola unitaria.





Dada la importancia del módulo de convexidad en el estudio de los espacios uniformemente convexos, su estudio ha sido considerablemente amplio conociéndose entre otras cosas:

El módulo de convexidad es no decreciente y $\dfrac{\delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon)}{\varepsilon}$ *es estrictamemente creciente en* $[\varepsilon_0, 2]$*, donde* $\varepsilon_0 = \inf\{\varepsilon : \ \delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon) > 0\}$.

Hacemos la observación de que dado el carácter bidimensional de la definición de módulo de convexidad para probar que $\delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon)$ es creciente, lo que hacemos es probar esta propiedad en espacios bidimensionales ([5]).

De acuerdo con nuestra definición se tiene que X es uniformemente convexo si y sólo si $\varepsilon_0 = 0$ y es válido el siguiente resultado:

Teorema 9. $\lim_{\varepsilon \to 2^-} \delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon) = 1 - \dfrac{\varepsilon_0}{2}$*;*

El Teorema precedente arroja como corolario que si X es uniformemente convexo, entonces X es estrictamente convexo.

El siguiente resultado relaciona la convexidad estricta con la ortogonalidad de James:

Teorema 10. *(Kapoor-Prasad [26](1978))* X *es estrictamente convexo si y sólo si para cada par de vectores* $x, y \in \mathrm{X} \quad x \neq y$*, ambos distintos de cero, existe un único* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ *tal que* $x \# x + \alpha y$

La ley del paralelogramo también permite caracterizar los espacios de Hilbert mediante el módulo de convexidad:

X **es un espacio de Hilbert si y sólo si**

$$\delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \qquad 0 \leq \varepsilon \leq 2;$$

lo que significa que en un espacio de Hilbert el módulo de convexidad es constante en cada uno de sus subespacios bidimensionales.

Un concepto ligado al de estricta convexidad es el de lisura de un espacio de Banach.

Un espacio de Banach se llama **liso** si en cada punto de la bola unitaria existe a lo sumo un único hiperplano que lo soporta.

Una caracterización importante de los espacios lisos es la siguiente:

Un espacio de Banach X es liso si y sólo si su norma es Gateaux diferenciable en $\mathrm{X}\backslash\{0\}$.

Recordemos que la norma de un espacio de Banach X se llama Gateaux diferenciable si para cada $x \in X$, existe $l \in X^*$ tal que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\|x+th\|-\|x\|}{t} = l(h)$ $\forall h \in X$; mientras que la norma de un espacio de Banach X es Frechet diferenciable si y sólo si $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\|x+th\|+\|x-th\|-2\|x\|}{t} = 0$ uniformemente en $h \in S_X$.

La relación entre convexidad estricta y lisura se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 11. *a) Si* X *es estrictamente convexo, entonces su dual* X^* *es liso.*

b) Si X *es liso, entonces su dual* X^* *es estrictamente convexo.*

En analogía con el teorema precedente tenemos lo siguiente:

Teorema 12. *(a) Si* X *es uniformemente convexo, entonces la norma de* X^* *es uniformemente Frechet diferenciable en* $\mathrm{X}^*\backslash\{0\}$.

(b) Si la norma de X *es uniformemente Frechet en* $\mathrm{X}\backslash\{0\}$, *entonces* X^* *es uniformemente convexo.*

Los espacios de Banach cuya norma es uniformemente Fréchet diferenciable se llaman **uniformemente lisos.**

Motivado por las relaciones de convexidad y lisura, Day en 1944 [10]; define el siguiente módulo de lisura:

$$\eta_{\mathrm{X}}(t) = \sup\left\{\frac{2-\|x-y\|}{\|x-y\|} : \|x\| = \|y\| = 1, \quad 0 \leq \|x-y\| \leq t\right\} \quad 0 < t \leq 2$$

y demuestra que X es uniformemente liso si y sólo si $\lim\limits_{t\to 0} \eta_{\mathrm{X}}(t) = 0$; mientras que en 1963, en un intento por relacionar los módulos de convexidad y lisura, Lindenstrauss [29](ver [12] para un buen estudio del módulo de Lindenstrauss) introduce el siguiente módulo de lisura:

Se define el **módulo de lisura** de un espacio de Banach X como

$$\rho_{\mathrm{X}}(t) = \frac{1}{2}\sup\{\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2 \quad \|x\| = \|y\| = 1\},$$

y se demuestra que

X es uniformemente liso si y sólo si $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\rho_{\mathrm{X}}(t)}{t} = 0$.

Las relaciones entre módulos de convexidad y lisura se expresan a continuación.

Teorema 13 (Lindenstrauss 1963)**.** *Para un espacio de Banach* X *se verifica lo siguiente:*

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{X}^*}(t) &= \sup_{0\le\varepsilon\le 2}\left\{\frac{t\varepsilon}{2} - \delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon)\right\}\\
\rho_{\mathrm{X}}(t) &= \sup_{0\le\varepsilon\le 2}\left\{\frac{t\varepsilon}{2} - \delta_{\mathrm{X}^*}(\varepsilon)\right\}.
\end{aligned}$$

La búsqueda de una mejor expresión de la dualidad entre convexidad y lisura mediante módulos, condujo a que V. Gurariy 1965 [21] y 1967 [22] propusiera nuevos módulos de convexidad y lisura β y γ, en los términos de la siguiente definición:

Para un espacio de Banach X, se define el módulo de convexidad β mediante

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathrm{X}}(\varepsilon) &= \inf\{1 - \inf\{\|tx + (1-t)y\|, \quad \|x\| = \|y\| = 1\}, \quad \|x-y\| \ge \varepsilon\}\\
\gamma_{\mathrm{X}}(w) &= \inf_{x\in\mathrm{X}}\{\max(1-\rho(x,P_1), 1-\rho(x,P_2)) \quad \theta(P_1,P_2) \ge w \quad 0 \le w \le 1\},
\end{aligned}$$

P_1 y P_2 subespacios maximales de X donde $\rho(x,R)$ es la distancia de x a R y $\theta(P,Q) = \max(\sup\limits_{\substack{x\in P\\ \|x\|=1}}(\rho(x,Q), \sup\limits_{\substack{y\in Q\\ \|y\|=1}}\rho(y,P))$

P, Q subespacios de X.

Con estas definiciones, V. Gurariy obtiene la siguiente relación de dualidad:

Teorema 14. $\gamma_{\mathrm{X}}(w) = \beta_{\mathrm{X}^*}(w)$ *y* $\beta_{\mathrm{X}}(w) = \gamma_{\mathrm{X}^*}(w) \quad 0 \le w \le 1.$

Dado que los módulos β y δ determinan los mismos espacios estricta y uniformemente convexos, durante mucho tiempo se pensó que estos módulos coincidían; pero en 1993, Zanco y Zucci [33] mostraron que estos módulos son distintos, mientras que en 2004 en un trabajo conjunto con Vladimir Gurariy, Luisa Sánchez y Antonio Ullán [4] se da un ejemplo de un espacio de Banach bidimensional, donde se calcula explícitamente su módulo β; y se estudian algunas de sus propiedades; por ejemplo en la relación obtenida por V. Gurariy

$$\delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon) \leq \beta_{\mathrm{X}}(\varepsilon) \leq 2\delta_{\mathrm{X}}(\varepsilon), \qquad 0 \leq \varepsilon \leq 2;$$

demostramos que 2 es la mejor constante posible.

Hemos visto entonces que el módulo β es introducido para el mejorar el estudio de la dualidad entre convexidad y lisura. Con respecto a esta última tenemos la siguiente caracterización:

Teorema 15 ([30]). *Un espacio de Banach es liso, si así lo es cada uno de sus subespacios bidimensionales.*

De forma que para caracterizar la lisura de un espacio en muchas ocasiones basta concentrarse en los respectivos planos de Minkowski por él determinado.

Por esta razón ponemos especial énfasis en el siguiente teorema en los espacios de dimensión 2.

Teorema 16 ([30]). *En un plano de Minkowski* X *las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) X es liso.

b) Dados tres puntos no colineales, existe al menos una circunferencia que los circunscribe.

c) Para cada $x \in \mathbf{S}_{\mathrm{X}}$, existe un único elemento $x^* \in \mathbf{S}_{\mathrm{X}^*}$ tal que $x^*(x) = 1$

Espacios de Banach con estructura normal

Los espacios de Banach con estructura normal adquirieron gran importancia desde que Kirk demostró en 1965, [28], que los conjuntos débilmente compactos con estructura normal tienen la propiedad del Punto Fijo, una herramienta fundamental en el estudio de ecuaciones diferenciales e integrales, ver [19] y [20] para más información. Como consecuencia, esto añade importancia a los espacios uniformemente convexos (por ejemplo $L^P[0,1] \quad 1 < p < \infty$) por ser ejemplos de espacios con estructura normal.

Comencemos con algunas definiciones:

Dado un espacio métrico X*, una aplicación $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ se dice* ***no expansiva*** *si existe $k \in (0,1]$ tal que $d(x,y) \leq kd(f(x), f(y))$.*

X tiene la **propiedad del punto fijo** si toda aplicación no expansiva en X tiene un punto fijo.

Un subconjunto convexo y acotado K de un espacio de Banach X se dice que tiene **estructura normal**, [11], si todo subconjunto convexo M de K que tenga más de un punto contiene un punto $x_0 \in M$ tal que

$$\sup\{\|x_0 - y\|,\ y \in M\} < d(M),$$

donde $d(M)$ denota el diámetro de M.

Si existe $\alpha \in (0,1)$ tal que para cada $x \in M$

$$\sup\{||x - y|| : \quad y \in M\} \leq \alpha d(M)$$

decimos que M tiene **estructura normal uniforme**.

Un espacio de Banach X se dice que tiene estructura normal (uniforme), si todo subconjunto convexo y acotado tiene estructura normal (uniforme).

Como ejemplos de espacios de Banach con estructura normal uniforme tenemos los espacios $L^p[0,1] \quad 1 < p < \infty$; y en general, todos los espacios de Orlicz reflexivos [8].

Aquí nos ocupamos de los espacios con estructura normal porque a partir de los subespacios bidimensionales, es posible obtener información útil sobre estos aspectos geométricos de los espacios de Banach.

En conexión con los subespacios bidimensionales y la estructura normal de un espacio de Banach tenemos lo siguiente:

En 1991, Gao y Lau [18] introdujeron el siguiente parámetro en un espacio de Banach X:

$$J(\mathrm{X}) = \sup\{\|x+y\| \wedge \|x-y\| : x, y \in \mathbf{S}_{\mathrm{X}}\}$$

y con esto demuestra lo siguiente:

Si $J(\mathrm{X}) < \frac{3}{2}$, entonces X tiene estructura normal.

Otro parámetro introducido por Gao en 2001, [17], relacionado con la estructura normal de un espacio de Banach es el parámetro $R(X)$ que se define como sigue:

Para cada subespacio bidimensional Y de X definamos

$$r(Y) = \sup\{2(\|x+y\| + \|x-y\|)x, y \in \mathbf{S}_Y\}$$

(el supremo de los perímetros de los paralelogramos inscritos en la esfera con vértices $x,\ -x,\ y,\ -y$);

y
$R(X) = \inf\{\ell(Y) - r(Y) :\ Y$ subespacio bidimensional de X, $\ell(Y)$ la longitud de la circunferencia unidad de $Y\}$

Teorema 17 (Gao (2001))**.** *Si* X *es un espacio de Banach con* $R(X) > 0$*, entonces* X *tiene estructura normal.*

La propiedad de tener estructura normal no es invariante bajo isomorfismo; y por lo tanto, el hecho de que los espacios uniformemente convexos tengan estructura normal, ésta no tiene porque preservarse al sustituir la norma por una equivalente.

En 1991, Gao y Lau proponen el problema siguiente:

Si X admite una norma equivalente bajo la cual es uniformemente convexo, es decir si X es superreflexivo ¿X tiene estructura normal?

Hasta donde estamos informados no se sabe si todo espacio super-reflexivo tiene estructura normal o la propiedad del punto fijo.

Teorema 18 (Gao [16])**.** *Si* $R(X) > 0$*, entonces* X *admite una norma equivalente bajo la cual es uniformemente convexo.*

Teorema 19 (Gao-Lau)**.** *Si* $J(X) < 2$*, entonces* X *admite una norma equivalente bajo la cual es uniformemente convexo.*

El ejemplo siguiente debido a Alpath [1] muestra que $L^1[0,1]$ no tiene estructura normal.

Sea $K = \left\{ f \in L^1[0,1] :\ 0 \leq f \leq 2 \quad \int_0^1 f = 1 \right\}$
y definamos

$$\begin{aligned} T : K \ &\rightarrow \ K \\ f \ &\rightarrow \ \left\{ \begin{array}{ll} \min(2f(2t), 2), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ & \\ \max(0, 2f(2t-1) - 2) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

T es una isometría (y en consecuencia no expansiva) sin punto fijos y K es débilmente compacto. Otros ejemplos se encuentran en [13].

Ejemplos de espacios no reflexivos con estructura normal lo presenta el siguiente teorema:

Teorema 20 (Katirtzoglou [27])**.** *Sea* φ *una* N*-función* $\varphi \in \Delta_2 \Leftrightarrow L^\varphi[0,1]$ *tiene estructura normal.*

Agradecimientos. Agradecemos al Comité Organizador de las XVIII Jornadas Venezolanas de Matemáticas la invitación a dictar la conferencia que motivó la escritura de este artículo.

Agradecemos las conversaciones con la colega Luisa Sánchez durante la redacción final de este trabajo.

References

[1] ALPASCH D.: *A fixed point free no expansive mapping,* Proc. Amer. Math. Soc., **82**, (1981) 423-424

[2] ALONSO J.: *Ortogonalidad en espacios normados,* Tesis doctoral, Universidad de Extremadura, 1984.

[3] AMIR D.: *Characterization of Inner product spaces,* Birkaüser, Basel, 1986.

[4] BARCENAS D.,GURARIY V., SANCHEZ L. and ULLAN A.:*On moduli of convexity in Banach spaces,* QM, **27** (2004) 137-145.

[5] BÁRCENAS D. and SÁNCHEZ, L.:*Algunas notas sobre el módulo de convexidad.* Divulgaciones Matemáticas, **6**. No **1**, (1998) 21-29.

[6] BORWEIN J.M.: *An integral characteritation of euclidean spaces,* Bull. Austral. Math. Soc., **29**, (1984) 357-364.

[7] BORWEIN J.M. and KEENER L.: *The Hausdorff metric and Chebyshev center,* Journal of Approximation Theory, **28**, (1980) 366-376.

[8] CHEN S. and SUN H.: *Reflexive Orlicz spaces have uniform normal structure,* Studia Math., **109**, (1994) 197-208.

[9] CLARKSON J.: *Uniformly convex spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **40**, (1936) 396-414.

[10] DAY, M.M.: *Uniform convexity in factor and conjugate spaces.* Ann. of Math.,**(2)** 45, 375-385, 1944.

[11] DIESTEL J.: *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, LMN485, Springer-Verlag, Berlín, 1975.

[12] DICK VAN DULST: *Reflexive and superreflexive Banach spaces,* Mathematical Centre Tracts, **102**, Amsterdam, 1978.

[13] DOWLING P. N., LENNARD C.J. and TURETT B.: *Some more exemple of c_0 and $L^1[0,1]$ failing the fixed point property*, Contemporary Math., **228**, (2003) 171-194.

[14] FALKNER N.: *A characterization of Inner product spaces,* Amer. Math. Monthly. –, (1993) 246-249.

[15] GAO J.,: *An Application of Elementary Geometry in Functional Analisys,* The College Math. Journal **28**, (1997) 39-43.

[16] GAO J.,: *Normal hexagon Banach spaces with uniform normal structure,* J. of Math **20**, 3 (2000) 241-248.

[17] GAO J.,: *Normal Structure and the arc length in Banach Spaces,* Taiwanese Journal of Math, **5**, 2, (2001) 353-366.

[18] GAO J. and LAU K. S.: *On two classes of Banach spaces with uniform normal structure,* Studia Mat. **99**, 1, (1991) 41-56.

[19] GOEBEL, K.: *Convexity of balls and fixed point theorems for mappings with non-expansive square.* Compositio Math., **22**, (1970), 269-274.

[20] GOEBEL, K. and KIRK, W.: *Topics in metric fixed point theory,* Cambridge University Press, 1990.

[21] GURARIY, V.I.: *On moduli of convexity and flattening of Banach spaces* . Soviet Math. Dokl. 1965, Tom 161, No 5 1003-1006.

[22] GURARIY, V.I.: *On differential properties of the convexity moduli of Banach spaces.* Math. Issled., **2**, (1967) 141-148.

[23] GURARIY, N.I., SOZONOV, Y.U.: *Normed space in which the unit sphere has no bias.* Matematicheskie Zametki, **7**, (1970) 187-189.

[24] JAMES R.C.: *Orthogonality in normed linear spaces,* Duk Math J., **12**, (1945) 291-301.

[25] JAMES R.C.: *Inner products in normed linear spaces,* Bull. Amer. Math. Soc., **53**, (1947) 559-566.

[26] KAPOOR O.P. and PRASAD J.: *Orthogonality and characterizations of inner product spaces,* Bull. Austral Math Soc, **19**, (1978) 403-416.

[27] KATIRTZOGLOU E.: *Normal Structure of Musielak-Orlicz spaces,* Collect Math., **48**, 4-6, (1997) 571-585.

[28] KIRK W.A.: *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances,* Amer. Math. Monthly, **72** (1965) 1004-1006.

[29] LINDENSTRAUSS, J.: *On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces* , Mich. Math. J., **10**, (1963) 241-252.

[30] MARTINI H., SWANEPOEL K. and WEIB G.: *The Geometry of Minkowski Spaces*. A survey. Part I. Expo. Math., 19, (2001) 97-142.

[31] MARTINI H. and SWANEPOEL K.: *The Geometry of Minkowski Spaces.* A survey. Part II. Expo. Math., 22, (2004) 93-144.

[32] TINEO A.: *Isometrías y caracterización de espacios de Hilbert,* Notas de Matemáticas, **50**, 1980.

[33] ZANCO, C., ZUCCHI, A.: *Moduli of rotundity and smoothness for convex bodies*. Boll. Un. Mat. Ital., A (7) 7-b, (1993) 833-885.

Diomedes Bárcenas
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias, ULA
Mérida 5101, Venezuela
e-mail: barcenas@ciens.ula.ve