Una didascalia geométrica*

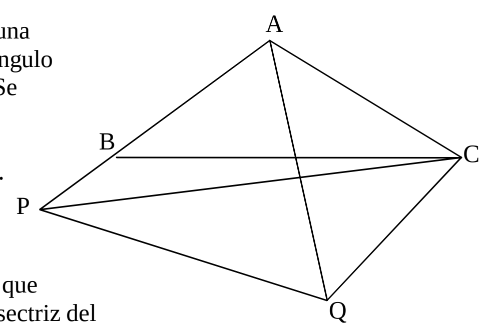
Darío Durán Cepeda

”Es innegable que, en cualquier caso, los problemas de geometría son algo que exigen mucho tiempo, muchos esfuerzos, una larga reflexión y una capacidad combinatoria de la que carece la mayor parte de los alumnos. Quizás la geometría euclidiana sea, al igual que el latín, una de esas tareas nobles y un poco en desuso, reservadas a una élite, y que no son compatibles con una enseñanza de masa. En este caso la eliminación de la geometría sería fundamentalmente un problema sociológico en cuya discusión preferiría no entrar. Pero, en cualquier caso, la creencia de que la sustitución de la geometría por unas estructuras algebraicas enseñadas masivamente de un modo prematuro puede contribuir a facilitar el aprendizaje de las matemáticas es totalmente errónea. Así por ejemplo, no parece indispensable hablar de números complejos en el último año del bachillerato”

René Thom
¿Son las matemáticas “modernas” un error pedagógico y filosófico? (1970)

El profesor José Heber Nieto y yo estamos encargados en el Estado Zulia desde hace algunos años de la preparación de los estudiantes zulianos para su asistencia a las Olimpíadas Nacionales e Internacionales de Matemáticas. En esta conferencia disertaré sobre la geometría euclidiana elemental y sus problemas. La referencia a lo elemental se refiere que las soluciones a los ejemplos que propondré se pueden hacer con las nociones básicas del bachillerato venezolano.

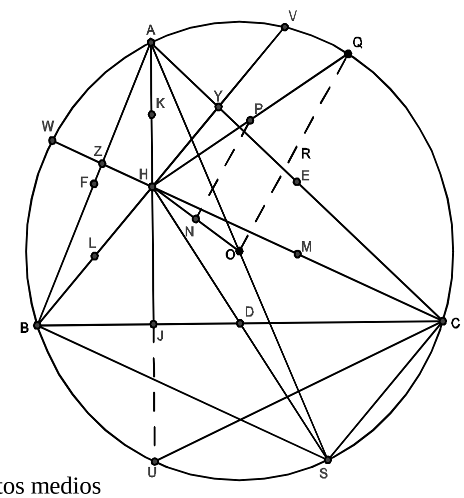
El primer ejercicio geométrico se lo debo a José Heber Nieto, cuya ausencia aquí hoy noto. Llamé a Heber para que me ayudara a eliminar los virus en mi computadora y me respondió una tarde que tan pronto le resolviera el siguiente ejercicio iría a mi casa. “En un triángulo ABC isósceles de base BC el ángulo A mide 100º. Se prolonga el lado AB hasta el punto P tal que AP = BC. ¿Cuánto mide el ángulo BCP?”



Esa misma tarde le envié la siguiente solución: Trace una semirrecta de origen C que forme con el lado AC un ángulo igual a 100º según se indica en la figura a la derecha. Se toma un punto Q en esa semirrecta tal que CQ = AC. Entonces el triángulo ACQ es isósceles y congruente con el triángulo original ABC. Luego, BC = AQ = AP. Ya que el ángulo BAC mide 100º y el ángulo QAC mide 40º vemos que el ángulo PAQ mide 60º. Por tanto, el triángulo APQ es equilátero Esto indica que el punto C esta en la mediatriz del segmento AQ y, ya que el triángulo ACQ es isósceles, se tiene que CP es la bisectriz del ángulo ACQ y así el ángulo PCB es igual al ángulo ACP = 50º menos el ángulo BCA = 40º. En consecuencia, el ángulo pedido mide 10º.

*Conferencia dictada en las XXI Jornadas de Matemáticas de la AMV realizadas en la UCOLA, Barquisimeto, del 10 al 13 de marzo de 2008.

En la figura se ha dibujado el triángulo ABC y su circuncírculo (la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo) de centro O. Sean AJ, BY, CZ las alturas del triángulo que se cortan en su ortocentro H. Sean D, E, F los puntos medios de los lados BC, AC, AB del triángulo. Sea U el corte de la altura AJ con el circuncírculo.



En 1765 Leonhard Euler (1707-1783) demostró mediante procedimientos analíticos que el circuncírculo del triángulo medial DEF coincide con el circuncírculo del triángulo órtico JYZ. En 1820 los geómetras franceses Charles Julien Brianchon (1783-1864) y Jean Victor Poncelet (1788-1867) redescubrieron el teorema anterior de Euler y demostraron además que ese circuncírculo pasaba también por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada vértice del triángulo. Debido a esto los segmentos AH, BH, CH se llaman **segmentos de Euler** y sus puntos medios K, L, M se llaman **puntos de Euler**. Poncelet llamó a esa circunferencia el **círculo de los nueve puntos**. En resumen, el círculo de los nueve puntos de un triángulo es la circunferencia que pasa por los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y por los puntos de Euler.

Sea HQ el segmento que une el ortocentro H del triángulo con cualquier punto Q de su circuncírculo. Este segmento lo he llamado **segmento de Poncelet** y a su punto medio lo he llamado **punto de Poncelet.** Dice la sana Pedagogía que cuando se introduce un nuevo concepto en las ciencias deben darse al menos tres ejemplos de él.

Ejemplo 1. Obviamente los segmentos de Euler son segmentos de Poncelet porque unen el ortocentro H del triángulo ABC con sus vértices A, B, C que son puntos del circuncírculo. Además, los puntos de Euler son puntos de Poncelet.

Ejemplo 2. El ángulo JHC es igual al ángulo AHZ por ser opuestos por el vértice. Este ángulo es el complemento del ángulo HAZ por ser el triángulo AZH rectángulo en Z. Este último ángulo es el complemento del ángulo B del triángulo ABC por ser ángulos del triángulo ABJ rectángulo en J. Por ende, los ángulos JHC y B son iguales. Además, el ángulo B está inscrito en el arco AVC y es igual al ángulo JUC por estar también inscrito en el mismo arco. Por tanto, los ángulos JHC y JUC son iguales por lo que el triángulo HUC es isósceles de base HU. Como JC es altura de la base de ese triángulo es también mediana por lo que HJ = JU. Pero, HU es un segmento de Poncelet. Por lo que acabamos de demostrar J es un punto de Poncelet, es decir, los pies de las alturas de un triángulo son puntos de Poncelet.

Ejemplo 3. Sea AS el circundiámetro del triángulo ABC que pasa por su vértice A. Los ángulos ABS y ACS son rectos por estar inscritos en las semicircunferencias de diámetro AS. Así, SC es perpendicular a AC y SB es perpendicular a AB. Por tanto, los pares de segmentos SC, BH y SB, CH son paralelos y tendremos que HBSC es un paralelogramo. Por tanto, sus diagonales HS y BC se bisecan, es decir, el punto medio del segmento HS es el punto medio D del lado BC.

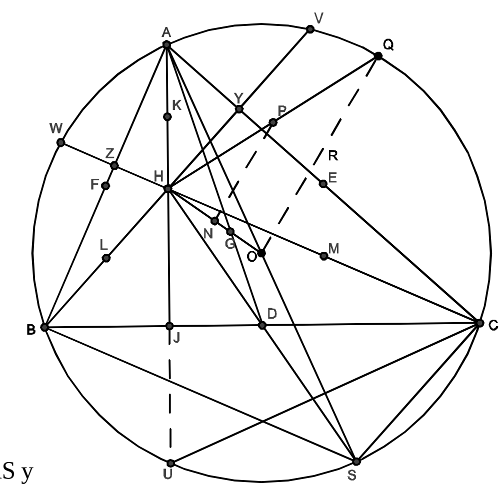
Hemos demostrado que los puntos medios de los lados de un triángulo son puntos de Poncelet.

En resumen los puntos de Euler de un triángulo, los pies de sus alturas y los puntos medios de sus lados son puntos de Poncelet. Nótese que de la definición de puntos de Poncelet se deduce que hay infinitos de esos puntos.

Después de haber visto estos tres ejemplos vemos que OQ = R es el circunradio. La paralela a OQ que pasa por P es el punto que hemos llamado N. Este punto N es el punto medio de HO porque P es el punto medio de HQ. Además, NP es la mitad del circunradio OQ = R. Por lo tanto, el siguiente resultado es verdadero.

Teorema 1. Todos los puntos de Poncelet están en una circunferencia de centro el punto medio N del segmento que une el ortocentro y el circuncentro del triángulo y su radio es la mitad del circunradio.

De acuerdo con los tres ejemplos anteriores esta circunferencia es el **círculo de los nueve puntos**.



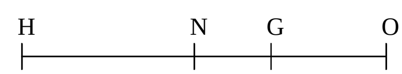
En el triángulo AHS el segmento HO es su mediana y al trazar la mediana AD se obtiene el baricentro G de ese triángulo. Pero, AD es también mediana en el triángulo ABC por lo que G es también su baricentro. En consecuencia, tenemos la siguiente afirmación.

Teorema 2. El ortocentro, el circuncentro, el baricentro y el centro del círculo de los nueve puntos de un triángulo son colineales.

La recta que contiene al ortocentro, al circuncentro, al baricentro y al centro del círculo de los nueve puntos de un triángulo se llama **recta de Euler.** El teorema anterior fue demostrado analíticamente por el mismo Euler en 1765.

Los puntos D y O son los puntos medios de los lados AS y HS del triángulo AHS. Por tanto, el segmento OD es paralelo e igual a la mitad del lado AH. Así, hemos probado el enunciado que sigue.

Teorema 3. La distancia del circuncentro de un triángulo a un lado es igual a la mitad de la longitud del segmento de Euler que llega al vértice opuesto a ese lado.



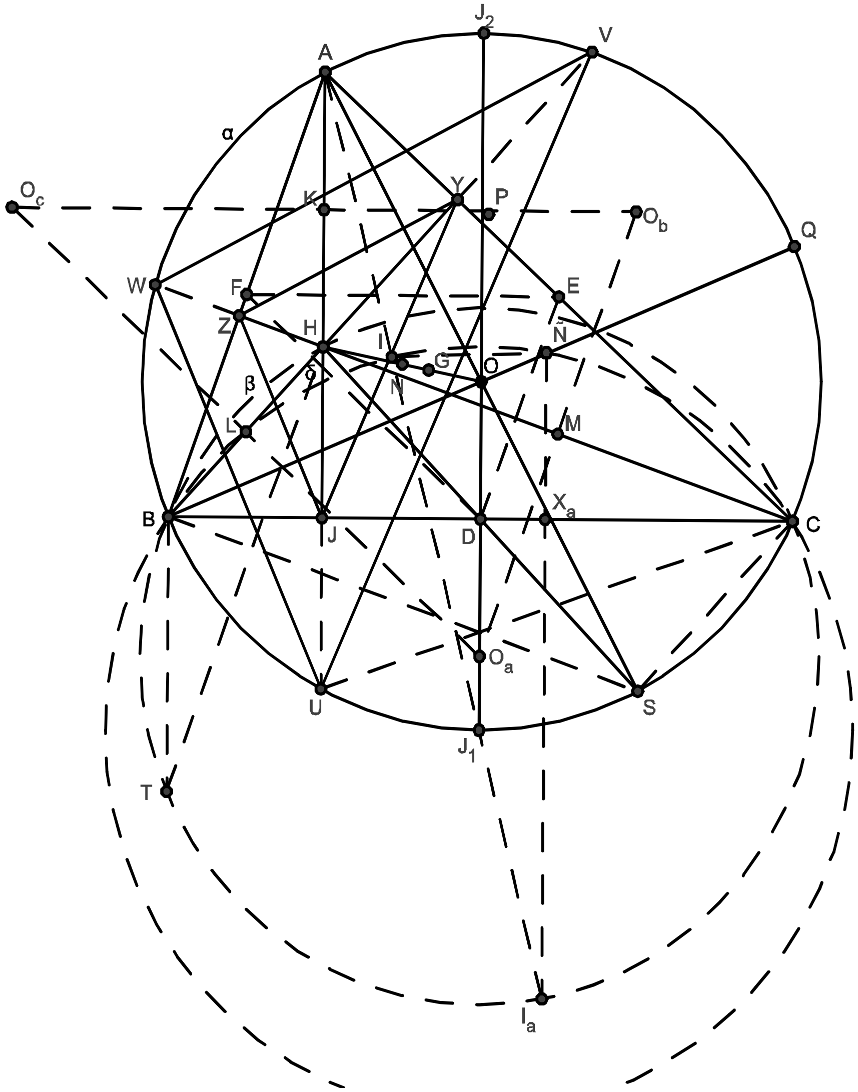
Considérese el ortocentro H, el circuncentro O, el baricentro G y el centro N del círculo de los nueve puntos de un Triángulo según ase indica en la figura a la derecha. Si se toma HO = 6, entonces HN = 3, NG = 1 y GO = 2. Por tanto, $\frac{HN}{NG} = \frac{HO}{OG} = 3$.

De esta manera, demostramos lo que sigue.

Teorema 4. El centro del círculo de los nueve puntos de un triángulo y su circuncentro son conjugados armónicos del segmento que une el ortocentero y el baricentro del mismo triángulo.

En el año de 2003 presenté a la comunidad profesoral de Barquisimeto una figura que titulé **La Didascalia Geométrica.**

LA DIDASCALIA GEOMÉTRICA 2008



En la figura de la página anterior se ha trazado un triángulo ABC con circuncírculo α y circuncentro O. Sus alturas son AJ, BY, CZ que se cortan en el ortocentro H. Estas alturas cortan al circuncírculo en los puntos U, V, W. Los puntos D, E, F son los puntos medios de los lados BC, AC, AB. Sean O_a, O_b, O_c

los puntos simétricos del circuncentro O respecto de los lados BC, AC, AB. Sean K, L, M los puntos de Euler. Sea β la circunferencia que pasa por B, C, H. Sea J_1J_2 el circundiámetro que es perpendicular al lado BC.Sea I el incentro del triángulo. Sea I_a el excentro respecto del lado BC. Sea δ la circunferencia de diámetro II_a. Sea T el corte la perpendicular a CH que pasa por H y la circunferencia β.

Del centenar de resultados que se pueden obtener de esa figura mencionamos los veinte primeros:

1. El simétrico del ortocentro de un triángulo respecto de un lado está en el circuncírculo.
2. En un triángulo dado los tres productos de los segmentos en que el ortocentro divide las alturas son iguales.
3. El producto de los segmentos en que un lado de un triángulo es dividido por el pie de su altura es igual a esa altura multiplicada por la distancia del lado al ortocentro.
4. Si H es el ortocentro del triángulo ABC, entonces los triángulos ABC, AHC, BHC, AHB tienen sus circunradios iguales.
5. El circuncentro del triángulo cuyos vértices son los extremos de un lado de un triángulo dado y su ortocentro es el simétrico del circuncentro del triángulo dado respecto de ese lado.
6. Las mediatrices de dos segmentos de Euler de un triángulo se cortan en un punto que es el simétrico, del circuncentro del triángulo dado, respecto del lado que une los vértices considerados.
7. El área del hexágono cuyos vértices son los puntos donde las alturas de un triángulo cortan a su circuncírculo es igual al doble del área del triángulo.
8. El triángulo de Euler de un triángulo y su triángulo medial son congruentes.
9. El circuncentro de un triángulo es el ortocentro de su triángulo medial.
10. Un vértice de un triángulo es el punto medio del arco en el circuncírculo determinado por las intersecciones de ese circuncírculo con las alturas que no parten de ese vértice.
11. El circunradio que pasa por un vértice del triángulo es perpendicular a un lado del triángulo órtico.
12. Las paralelas a OA, OB, OC que pasan por U, V, W son concurrentes.
13. La bisectriz de un ángulo de un triángulo corta la mediatriz del lado opuesto en un punto del circuncírculo.
14. Las bisectrices interior y exterior de un ángulo de un triángulo pasan por los extremos del circundiámetro que es perpendicular al lado opuesto al vértice considerado.
15. El simétrico del ortocentro de un triángulo respecto del punto medio de un lado está en el circuncírculo, y es el punto diametralmente opuesto al vértice opuesto al lado.
16. El otro extremo de un circundiámetro que pasa por un vértice de un triángulo, el punto medio del lado opuesto y el ortocentro son puntos colineales.
17. La altura y el circundiámetro de un triángulo que parten de un vértice son isogonales conjugadas respecto del ángulo del triángulo en ese vértice.
18. El ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.
19. Los lados de un triángulo son las bisectrices exteriores de su triángulo órtico.
20. Los vértices de un triángulo son los excentros (es decir, los centros de las circunferencias que son tangentes a un lado y a la prolongación de los otros dos) de su triángulo órtico.

Como se puede apreciar todavía hay geometría euclidiana elemental para un buen rato.

Darío Durán Cepeda
Universidad del Zulia