Dos aplicaciones de las topologías analíticas *

Carlos Uzcátegui Aylwin

Resumen

Presentamos una breve descripción de una clase especial de topologías sobre conjuntos numerables y dos de sus aplicaciones recientes.

Dedicado a Carlos Di Prisco

1 Introducción

Un subconjunto de un espacio métrico completo y separable (tales espacios son llamados Polacos) es *analítico* si es la imagen continua de algún subconjunto Boreliano de un espacio Polaco. La clase de conjuntos analíticos, que claramente contiene a la de los Borelianos, posee muy buenas propiedades. Por ejemplo, los conjuntos analíticos son medibles respecto a cualquier medida de Borel; tienen la propiedad de Baire y de Ramsey y si no son numerables, contienen un subconjunto perfecto. Los ejemplos bien conocidos de conjuntos patológicos, como los subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$ y los conjuntos Bernstein, no son analíticos. Los conjuntos analíticos fueron definidos por Suslin a comienzos del siglo XX, desde entonces sus propiedades estructurales han sido profundamente analizadas y constituyen uno de los principales objetos de estudio de la teoría descriptiva de conjuntos [5, 9, 14, 16].

En este trabajo mostraremos cómo se usan los conjuntos analíticos para estudiar topologías sobre un conjunto numerable. Veamos primero cual es la idea básica. El conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ de un conjunto X se identifica con el espacio producto $\{0,1\}^X$ a través de funciones características y en consecuencia, si X es numerable, $\mathcal{P}(X)$ es un espacio métrico completo y separable (homeomorfo al conjunto de Cantor). Por esta razón, si τ es una topología sobre X, podemos identificar a τ con un subconjunto de $\{0,1\}^X$ y así tiene sentido preguntarse si τ es, por ejemplo, un subconjunto Boreliano o analítico de $\{0,1\}^X$. El estudio de las topologías analíticas se inició con los trabajos [20, 22] y ha mostrado tener interesantes aplicaciones [21, 23, 25].

*Conferencia dictada en las XXI Jornadas de Matemticas de la AMV realizadas en la UCOLA, Barquisimeto, del 10 al 13 de marzo de 2008.

Por lo dicho antes, uno esperaría que un espacio topológico (X, τ) con τ analítica no debería ser patológico. Para ilustrar esta afirmación analizaremos una clase de topologías extremadamente patológicas: las topologías maximales. Una topología es *maximal* si es maximal (respecto a la inclusión) en la familia de topologías T_1 sin puntos aislados. Mostraremos que ninguna topología analítica es maximal.

Una aplicación reciente de las topologías analíticas tiene que ver con un problema planteado por Malykhin en 1978 sobre la metrización de grupos topológicos. Recordemos que un teorema clásico de Kakutani y Birkhoff afirma que todo grupo topológico primero numerable es metrizable. La pregunta de Malykhin es si todo grupo topológico separable y Frechet es necesariamente metrizable. Analizaremos las ideas usadas para demostrar que la respuesta es afirmativa para grupos (numerables) con topología analítica [21]. Un aspecto interesante de la demostración es que en ella se hace uso de la teoría de Ramsey, una rama de la combinatoria que ha tenido recientemente un enorme desarrollo debido a sus espectaculares aplicaciones [4, 19].

La teoría descriptiva de conjuntos, desde sus inicios, puso en evidencia que los axiomas usuales de la teoría de conjuntos pueden decidir, en términos generales, cualquier pregunta sobre los conjuntos analíticos. Por otra parte, también ha mostrado que para responder preguntas sobre conjuntos arbitrarios usualmente se requiere de axiomas extras [9, 14]. Este es un fenómeno que ocurre con frecuencia y un ejemplo de ello es el problema planteado por Malykhin. Se sabe que esa pregunta no se puede responder a partir de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos [13, 15]. Sin embargo, como ya lo hemos dicho, tiene respuesta afirmativa si la topología del grupo es analítica.

2 La jerarquía Boreliana y proyectiva

Los conjuntos *Borelianos* de un espacio topológico X se definen como la menor σ-álgebra que contiene a los abiertos. Los Borelianos se pueden definir recursivamente comenzando por los abiertos y usando las operaciones de tomar intersecciones y uniones numerables y complementos. Con este procedimiento se obtiene una jerarquía de longitud ω_1 (el primer ordinal no numerable) que se denota por $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ para $\alpha < \omega_1$. Se tiene entonces que los Borelianos son los conjuntos pertenecientes a $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ (o equivalentemente, a $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha$).

Los conjuntos *analíticos* de un espacio Polaco X se definen como las imágenes continuas de los Borelianos de algún espacio Polaco Y; de hecho, sin pérdida de generalidad, Y se puede tomar como el espacio de los irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es decir, un conjunto es analítico, si es la imagen continua de los irracionales. La clase de los conjuntos analíticos se denotan por $\mathbf{\Sigma}^1_1$. Sus complementos son los conjuntos *coanalíticos*, denotados por $\mathbf{\Pi}^1_1$. Un famoso teorema debido a Suslin afirma que la clase de los Borelianos es la intersección de los analíticos y los coanalíticos, es decir, $\mathbf{\Delta}^1_1 = \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$ es la clase de los Borelianos. Finalmente, tenemos los conjuntos *proyectivos*. Estos se definen recursivamente: Definimos la clase $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ como la colección de las imágenes continuas de conjuntos en $\mathbf{\Pi}^1_n$ y la clase $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ son los complementos de conjuntos de la clase $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$. En fin, los conjuntos proyectivos son los conjuntos que pertenecen a $\bigcup_n \mathbf{\Sigma}^1_n$. Obsérvese que $\bigcup_n \mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_n \mathbf{\Pi}^1_n$.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\text{Abiertos} & & F_\sigma & & G_{\delta\sigma} & & \text{Borelianos} & & \text{Analíticos} & & & \\
\mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & \mathbf{\Sigma}^0_3 & \cdots & & & \mathbf{\Sigma}^1_1 & & \mathbf{\Sigma}^1_2 & \\
 & \subseteq & & \subseteq & & & \mathbf{\Delta}^1_1 & \subseteq & & \subseteq & & \cdots \\
\mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & \mathbf{\Pi}^0_3 & \cdots & & & \mathbf{\Pi}^1_1 & & \mathbf{\Pi}^1_2 & \\
\text{Cerrados} & & G_\delta & & F_{\sigma\delta} & & & & \text{Coanalíticos} & & &
\end{array}
$$

3 Topologías analíticas

Sea X un conjunto numerable. Como dijéramos en la introducción, el conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$ podemos dotarlo de una topología de espacio Polaco identificándolo con el conjunto de Cantor 2^X a través de funciones características.

Definición 3.1. *Una topología τ sobre X es* analítica*, si τ es un subconjunto analítico de 2^X.*

La topología usual de $\mathbb{Q}$ es un subconjunto $F_{\sigma\delta}$ de $2^{\mathbb{Q}}$. Esto es una instancia de un hecho general, la topología de un espacio donde cada punto tiene una base local numerable (en particular, los metrizables) es $F_{\sigma\delta}$ [20]. Por otra parte, no existe una topología T_1 (i.e. donde cada punto es cerrado) distinta de la discreta que sea un subconjunto G_δ de 2^X [20]. Si τ es una topología sobre X, entonces su clausura $\overline{\tau}$ en 2^X también es una topología. La familia de topologías cerradas corresponde a la collección de topologías Alexandroff, que son aquellas topologías donde la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es también abierto [20, 26]. Una generalización de estos resultados sobre topologías cerradas se presenta en [24].

Aunque pudiera parecer que los espacios con topología analítica no son fáciles de conseguir, el próximo resultado nos indica que esto no es así. Recordemos que si Z es un espacio topológico, entonces $C_p(Z)$ (resp. $Borel_p(Z)$) es el conjunto de funciones continuas (resp. Borelianas) de Z en $\mathbb{R}$ con la topología de la convergencia puntual.

Teorema 3.2. *Sea τ una topología regular sobre X. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *τ es analítica.*

(3) *(X, τ) es homeomorfo a un subespacio numerable de $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.*

(4) *(X, τ) es homeomorfo a un subespacio numerable de $Borel_p(Z)$, donde Z es un espacio Polaco.*

En resumen, podemos decir que un espacio analítico no es otra cosa que un conjunto numerable de funciones borelianas con la topología de la convergencia puntual.

4 Topologías maximales

Una topología sobre X es *maximal* si es maximal entre las topologías T_1 sin puntos aislados sobre X. Una aplicación directa del lema de Zorn garantiza que existen topologías maximales Hausdorff. Sin embargo, obtener una que sea regular requiere un esfuerzo considerable [6].

El siguiente teorema de van Douwen [6] caracteriza las topologías maximales y muestra lo "extrañas" o "patológicas" que son. Para enunciarlo necesitamos recordar algunas nociones. Un espacio es *extremadamente disconexo* si la clausura de todo abierto es abierta; es *nodec* si todo conjunto nunca denso es cerrado y es *irresoluble* si cada par de conjuntos densos tienen intersección no vacía. Recordemos que un conjunto es nunca denso si su clausura tiene interior vacío.

Teorema 4.1. *(van Douwen) Sea (X, τ) un espacio T_1 sin puntos aislados. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) τ es maximal.

(b) τ es extremadamente disconexo, nodec y todo abierto no vacío es irresoluble.

Un ejemplo de espacio extremadamente disconexo es $\beta\mathbb{N}$, la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{N}$. Los espacios métricos o localmente compactos sin puntos aislados son resolubles. Los primeros ejemplos de espacios irresolubles se construyeron usando el lema de Zorn [1]. Recientemente se han desarrollado otros métodos para construir espacios irresolubles y maximales [7, 8].

Comenzaremos mostrando que no existen espacios analíticos extremadamente disconexos (ver [21]). En particular, no existen espacios maximales cuya topología sea analítica, es decir, al imponer la condición de analiticidad sobre la topología se evitan las patologías presentes en las topologías maximales.

Teorema 4.2. *Si X es Hausdorff, extremadamente disconexo y con topología analítica, entonces X es discreto.*

Demostración. Supongamos que X no es discreto y sea $x \in X$ un punto no aislado de X. Fijemos una colección $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos no vacíos tales que $x \notin \overline{O_i}$ para todo i y además $x \in \overline{\bigcup_i O_i}$. Definiremos a continuación una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

$$A \in \mathcal{I} \iff x \notin \overline{\bigcup_{i\in A} O_i}.$$

Entonces $\mathcal{I}$ es un ideal en $\mathbb{N}$, es decir, es una colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$ cerrada bajo uniones finitas y que contiene a todos los subconjuntos de sus elementos. Además, $\mathcal{I}$ es un ideal propio pues $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$ y cada conjunto finito pertenece a $\mathcal{I}$. Por otra parte, $\mathcal{I}$ es analítico como subconjunto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. En efecto, denotemos por τ la topología de X. Entonces

$$A \in \mathcal{I} \iff \exists V \in 2^X\, [V \in \tau \;\&\; x \in V \;\&\; (\forall i \in A)\, (V \cap O_i = \emptyset)\,].$$

Considere entonces el siguiente subconjunto de $2^X \times 2^X$:

$$R = \{(V, A) \in 2^X \times 2^{\mathbb{N}} :\ V \in \tau \;\&\; x \in V \;\&\; (\forall i \in A)\, (V \cap O_i = \emptyset)\}.$$

El lector interesado podrá verificar que R es un subconjunto analítico de $2^X \times 2^{\mathbb{N}}$. Como $\mathcal{I}$ es una proyección de R, entonces $\mathcal{I}$ también es analítico. Para concluir la demostración probaremos que $\mathcal{I}$ es un ideal maximal, esto provee la contradicción buscada, pues es conocido que ningún ideal maximal propio que contenga a todos los conjuntos finitos puede ser analítico (pues los ideal maximales no tienen la propiedad de Baire, ver [9, 18]). Para mostrar que $\mathcal{I}$ es maximal, sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $A \in \mathcal{I}$ o $(\mathbb{N} \setminus A) \in \mathcal{I}$. Supongamos que $A \notin \mathcal{I}$, entonces $x \in \overline{\bigcup_{i\in A} O_i}$. Como X es extremadamente disconexo, entonces $V = \overline{\bigcup_{i\in A} O_i}$ es abierto y claramente $V \cap (\bigcup_{i\notin A} O_i) = \emptyset$. Por lo tanto $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{I}$. □

El siguiente resultado indica que los espacios con topología analítica son "buenos" en el sentido que no son irresolubles (ver [25]).

Teorema 4.3. *Todo espacio T_1 con topología analítica es resoluble.*

La demostración usa un resultado que vale la pena mencionar pues es una herramienta importante en el estudio de las topologías analíticas. El resultado que enunciamos a continuación es una reformulación de un conocido teorema de Jalali-Naini y Talagrand (una demostración del mismo se puede leer en [18]).

Teorema 4.4. *Sea X un espacio T_1 con topología analítica, $A \subseteq X$ y x un punto de acumulación de A con $x \notin A$. Entonces existe una partición A_n de A*

en conjuntos finitos tal que para todo $I \subseteq \mathbb{N}$ infinito

$$x \in \overline{\bigcup_{n \in I} A_n}.$$

Regresemos a nuestra discusión sobre las topologías maximales. Ya hemos visto que no existen topologías analíticas que sean extremadamente disconexas o irresolubles, nos queda entonces por analizar lo que ocurre con las topologías nodec. En este caso la situación es diferente, pues es fácil construir ejemplos de espacios nodec analíticos. Sea X un espacio topológico. La siguiente colección es una topología más fina que τ:

$$\tau^\alpha = \{V \setminus N : \ V \in \tau \ \text{ y } N \text{ es } \tau\text{-nunca denso}\}.$$

No es díficil mostrar que esta topología es nodec. Por ejemplo, para $X = \mathbb{Q}$ con la topología usual se tiene que $\tau^\alpha_{\mathbb{Q}}$ es Borel. Pero τ^α no es regular, a menos que τ ya fuera nodec y regular (ver [17]). No obstante, si existen espacios regulares, nodec con topología analítica, pero su construcción es más elaborada (ver [25]).

5 Un problema sobre metrizabilidad de grupos topológicos

Todos lo espacios considerados en esta sección se supondrán Hausdorff. Comenzamos recordando un resultado clásico.

Teorema 5.1. *(Kakutani-Birkhoff, 1936) Todo grupo topológico primero numerable es metrizable.*

Una pregunta que ha recibido bastante atención es hasta que punto se puede debilitar la hipótesis de primero numerabilidad [13, 15]. Recordemos que un espacio es *Frechet* si para todo $A \subseteq X$ y todo $x \in \overline{A}$ existe una sucesión $(x_n)_n$ en A que converge a x. Tenemos entonces que

$$\text{Metrizable} \Rightarrow 1^{ero} \text{ numerable} \Rightarrow \text{Frechet}.$$

En 1978 Malykhin planteó la siguiente pregunta:

Pregunta: ¿Es todo grupo separable y Frechet necesariamente metrizable?

Antes de analizar esta pregunta veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.2. *Sea Y un conjunto. El espacio $\{0,1\}^Y$ es el espacio producto con $\{0,1\}$ discreto. La operación de grupo producto en $\{0,1\}^Y$ lo convierte en un grupo topológico. Si vemos cada elemento de $\{0,1\}^Y$ como función carasterística de un subconjunto de Y, entonces la operación de grupo en $\{0,1\}^Y$ es simplemente la diferencia simétrica.*

(a) $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *es metrizable (es homeomorfo al conjunto de Cantor).*

(b) El grupo $\{0,1\}^{\omega_1}$ *es separable (donde* ω_1 *es el primer cardinal no numerable). Recordemos que la separabilidad es un propiedad que se preserva bajo productos de tamaño a lo sumo* $2^{\aleph_0}$ *pero no es una propiedad hereditaria. Sin embargo,* $\{0,1\}^{\omega_1}$ *no es metrizable pues no es primero numerable.*

(c) Ahora consideremos el siguiente subgrupo de $\{0,1\}^{\omega_1}$*:*

$$G = \{f \in \{0,1\}^{\omega_1} : \ |\{\beta \in \omega_1 : \ f(\beta) = 1\}| \leq \aleph_0\}.$$

G *corresponde a la colección de subconjuntos numerables de* ω_1*. Entonces* G *es un grupo Frechet que no es ni primero numerable ni separable [15].*

El ejemplo dado en el apartado (c) nos indica que la hipótesis de separabilidad en la pregunta de Malykhin es necesaria. Por otra parte, se tienen los siguientes resultados (ver [15]):

(i) (Malykhin, 1978) Suponiendo el axioma de Martin y la negación de la hipótesis del continuo, existe un subgrupo numerable de $\{0,1\}^{\omega_1}$ que es Frechet y no es metrizable.

(ii) (Shibakov, 1999) Suponiendo la hipótesis del continuo, existen grupos Frechet numerables que no son metrizables.

El axioma de Martin es uno de los axiomas más utilizado como posible extensión de ZFC (los axiomas usuales de la teoría de conjuntos) [10]. Los resultados anteriores dicen que la pregunta de Malykhin no se puede responder en ZFC. A pesar de estos resultados negativos, el siguiente teorema ([21]) se prueba en ZFC.

Teorema 5.3. *Un grupo topológico numerable es metrizable si, y sólo si, es Frechet y su topología es analítica.*

Más adelante presentaremos los elementos cruciales de la demostración de este teorema. El siguiente resultado es una generalización a grupos separables.

Teorema 5.4. *Sea* G *un grupo topológico separable.* G *es metrizable si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones:*

(i) G *es Frechet.*

(ii) G *induce una topología analítica sobre un subgrupo numerable y denso de* G*.*

Demostración. Ya hemos dicho que todo espacio numerable que sea primero numerable (en particular, los métricos) tiene una topología analítica. Por otra parte, la metrizabilidad es hereditaria e implica la propiedad de ser Frechet. Por todo esto, sólo una dirección del teorema requiere demostración. Mostraremos que si G es un grupo Frechet y tiene un subgrupo numerable y denso cuya topología relativa es analítica, entonces G es metrizable.

Supongamos entonces que G es Frechet y que H es un subgrupo numerable y denso en G tal que la topología relativa de H es analítica. Por el teorema 5.3 tenemos que H es metrizable, por ser un grupo Frechet y analítico. Para ver que G también es metrizable, basta mostrar (por el teorema de Kakutani-Birkhoff) que G es primero numerable. De hecho, por ser un grupo topológico, basta mostrar que G es primero numerable en el elemento identidad e de G. Como H es metrizable, podemos fijar una base local numerable $(V_n)_n$ de e en H. Defina $U_n = int_G(cl_G(V_n))$. Entonces $(U_n)_n$ es una base local de e en G. $\square$

Para terminar esta sección, introduciremos otra noción, crucial para la demostración del teorema 5.3, que se ubica entre la de primero numerabilidad y la propiedad de ser Frechet.

Un *filtro* sobre un conjunto Y es una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de Y que satisface las siguientes condiciones: (i) Para todo A, B subconjuntos de Y, si $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{U}$, entonces $B \in \mathcal{U}$, (ii) $\mathcal{U}$ es cerrado bajo intersecciones y (iii) $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Para nuestra discusión, el ejemplo más importante de filtro es el *filtro de vecindades* $\mathcal{N}_x$ de un punto x en un espacio topológico X que se define a continuación.

$$\mathcal{N}_x = \{A \setminus \{x\} : \ x \in \mathrm{int}(A) \text{ y } A \subseteq X\}$$

Diremos que un filtro $\mathcal{U}$ sobre Y es un *ultrafiltro* si satisface que para todo $A \subseteq X$, se tiene que $A \in \mathcal{U}$ o $(Y \setminus A) \in \mathcal{U}$. Los ultrafiltros son objetos complejos, su existencia se demuestra usando el lema de Zorn, pues un ultrafiltro es un filtro maximal respecto a la inclusión.

Sea X un espacio topológico, diremos que un filtro $\mathcal{U}$ sobre $X \setminus \{x\}$ *converge* a x, si $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{U}$. Cuando $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, esto es equivalente a decir que $x \in \overline{A}$ para todo $A \in \mathcal{U}$.

Se dice que un espacio X es *bisecuencial en un punto* x [12] (que supondremos no es aislado), si para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ que converge a x, existe una sucesión de conjuntos $A_n \in \mathcal{U}$ tal que toda vecindad de x contiene alguno de los conjuntos A_n. La diferencia con el concepto de primero numerabilidad es que los conjuntos A_n, en general, no pertenecen a $\mathcal{N}_x$. Observemos también que si x admite una base local numerable $(V_n)_n$, entonces tomando $A_n = V_n \setminus \{x\}$ obtenemos que X es bisecuencial en x. Es decir, primero numerabilidad implica bisecuencialidad. El siguiente resultado indica que para grupos topológicos estos conceptos son equivalentes [13]. Un espacio se dice que es *bisecuencial*, si es bisecuencial en todo punto.

Teorema 5.5. *(Arkhangelíski-Malykhin). Todo grupo bisecuencial es primero numerable y en consecuencia metrizable.*

En vista de este resultado, la estrategia para mostrar que un grupo numerable y Frechet es metrizable consiste en mostrar que es bisecuencial. Esto sin embargo no es fácil y requerirá traducir bisecuencialidad a una propiedad de carácter combinatorio que veremos en la próxima sección.

Para ilustrar el significado de la bisecuencialidad, mostraremos que los espacios bisecuenciales son Frechet. De hecho, mostraremos una propiedad más fuerte.

Proposición 5.6. *Sea X bisecuencial en un punto x. Supongamos que $A_n \subseteq X$ es una sucesión decreciente de conjuntos tales que $x \in \overline{A_n} \setminus A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe un conjunto $A \subset X$ tal que $x \in \overline{A}$ y $A \setminus A_n$ es finito para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, X es Frechet en x.*

Demostración. Sea A_n, $n \in \mathbb{N}$ como en la hipótesis. Observe que la familia $\mathcal{A} = \mathcal{N}_x \cup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita (es decir, la interesección de cualquier colección finita de elementos de $\mathcal{A}$ no es vacía). Por lo tanto, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que extiende a $\mathcal{A}$. Por la bisecuencialidad de X, existe una sucesión $(B_n)_n$ con cada $B_n \in \mathcal{U}$ tal que toda vecindad de x contiene alguno de los B_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escoja $x_n \in B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap A_n$ y observe que $(x_n)_n$ converge a x. Para concluir el argumento, tome $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Finalmente, para obtener que X es Frechet en x basta usar una sucesión $(A_n)_n$ constante. $\square$

En resumen, tenemos que

$$\text{Metrizable} \Rightarrow 1^{ero} \text{ numerable} \Rightarrow \text{Bisecuencial} \Rightarrow \text{Frechet.}$$

6 La teoría de Ramsey y los espacios bisecuenciales

Una característica interesante de la demostración del teorema 5.3 es que hace uso de herramientas provenientes de la teoría de Ramsey. En esta sección presentaremos de manera sucinta algunas de esas herramientas y referimos al lector a los trabajos [2, 3, 4, 19] donde encontrará más información sobre esta fascinante área de la combinatoria.

La teoría de Ramsey debe su nombre a un teorema de Frank Ramsey publicado en 1930 sobre particiones de pares de elementos de un conjuntos. Denotaremos por $X^{[2]}$ a la colección de subconjuntos de X con dos elementos.

Teorema 6.1. *(Ramsey) Supongamos que $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ son disjuntos y además*

$$\mathbb{N}^{[2]} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

Entonces existe $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $M^{[2]} \subseteq \mathcal{A}_i$ para algún i.

Ahora enunciaremos un generalización del teorema de Ramsey sobre particiones de la familia de subconjuntos infinitos.

Denotaremos por $X^{[\infty]}$ a la colección de subconjuntos infinitos de X. No es dificil convencerse que $\mathbb{N}^{[\infty]}$ se puede ver como un subconjunto G_δ del espacio de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y por consiguiente (por un resultado clásico [9]) es un espacio Polaco. Diremos que un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ es analítico, si lo es respecto a esa topología.

Teorema 6.2. *(Galvin-Prikry, Silver) Sean $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ disjuntos tales que*

$$\mathbb{N}^{[\infty]} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1.$$

Suponga $\mathcal{A}_0$ es analítico. Entonces, existe M infinito tal que $M^{[\infty]} \subseteq \mathcal{A}_i$ para algún i.

Un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ de dice que es *Ramsey* si existe M infinito tal que $M^{[\infty]} \subseteq \mathcal{A}$ o $M^{[\infty]} \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Así que el teorema anterior afirma que los conjuntos analíticos son Ramsey. Usando el axioma de la elección se puede construir un conjunto que no es Ramsey, en otras palabras, la conclusión del teorema anterior no es válida si los pedazos $\mathcal{A}_i$ de la partición son arbitrarios.

Para ver cómo se usa esta herramienta de la teoría de Ramsey necesitamos introducir otros conceptos que han resultado ser interesantes por sí mismos.

Diremos que una colección $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es un *coideal* si satisface las siguientes condiciones:

(i) Si $B \subseteq A$ y $B \in \mathcal{H}$, entonces $A \in \mathcal{H}$.

(ii) Si $A \cup B \in \mathcal{H}$, entonces $A \in \mathcal{H}$ o $B \in \mathcal{H}$.

El ejemplo típico de coideal es el siguiente:

Ejemplo 6.3. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio topológico Hausdorff y x un punto de acumulación de $(x_n)_n$ con $x \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$\mathcal{H}_x = \{A \subseteq \mathbb{N} : \quad x \in \overline{\{x_n : n \in A\}}\}.$$

Entonces $\mathcal{H}_x$ es un coideal. La siguiente simple observación indica la relevancia de la teoría Ramsey para estudiar convergencia de sucesiones. Para $M \subseteq \mathbb{N}$ se cumple que

$$(x_n)_{n\in M} \to x \quad \Leftrightarrow \quad [M]^\infty \subseteq \mathcal{H}_x.$$

Ahora definiremos el tipo de coideales que jugarán un papel fundamental en todo lo que sigue. Diremos que un coideal $\mathcal{H}$ es *selectivo* si cumple con las siguientes condiciones:

(i) Para todo sucesión decreciente $(A_n)_n \subseteq \mathcal{H}$ existe $B \in \mathcal{H}$ tal que $A_n \setminus B$ es finito para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Para todo $A \in \mathcal{H}$ y cada partición $A = \bigcup_n F_n$ de A en conjuntos finitos y disjuntos, existe $B \in \mathcal{H}$ con $B \subseteq A$ y $|B \cap F_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es fácil verificar que $\mathbb{N}^{[\infty]}$ es un coideal selectivo. Los coideales selectivos fueron descubiertos por Mathias [11] y son objetos matemáticos difíciles de obtener. En [19] usando los trabajos de Rosenthal se presenta el ejemplo siguiente. Suponga que K es un subconjunto compacto, infinito y separable de $Borel_p(X)$ donde X es Polaco. Fijemos una enumeración $(x_n)_n$ de algún subconjunto numerable y denso de K. Entonces para cada $x \in K$ (no aislado) el coideal $\mathcal{H}_x$ (definido en 6.3) es selectivo. El lector interesado en saber más acerca de los coideales selectivos puede consultar [18, 19].

La clave para la demostración del teorema 5.3 es que, bajo ciertas condiciones, el concepto de coideal selectivo es equivalente al de bisecuencialidad.

Teorema 6.4. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Suponga que X es bisecuencial en x. Entonces el coideal $\mathcal{H}_x$ es selectivo.*

Demostración. Notemos que la Proposición 5.6 nos asegura que $\mathcal{H}_x$ satisface la propiedad (i) de la definición de coideal selectivo. Sólo resta verificar la parte (ii) de la definición. Sea $A \subseteq X$ tal que $x \in \overline{A}$ y $(F_k)_k$ una partición de A en pedazos finitos. Por la Proposicíon 5.6, X es Frechet en x, por lo tanto existe $(x_n)_n$ una sucesión en A convergente a x. Como cada F_k es finito, podemos hallar una subsucesión $(x_{n_i})_i$ tal que cada F_k tiene a lo sumo un elemento de la subsucesión. Entonces $B = \{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ satisface la conclusión en (ii). □

Teorema 6.5. *Todo coideal selectivo y coanalítico es de la forma $\mathcal{H}_x$ para algún espacio X bisecuencial en x.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ un coideal selectivo y coanalítico. Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La topología sobre X la definimos declarando aislados los elementos de $\mathbb{N}$ y las vencidandes de ∞ vienen dadas por los conjuntos en $\mathbb{N}^{[\infty]} \setminus \mathcal{H}$. Es inmediato verificar que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\infty$. Para ver que X es bisecuencial en ∞, fijemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X que converge a ∞, esto dice que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$.

Necesitamos una variante de la Teoría de Ramsey. El conjunto $\mathbb{N}^{[<\omega]}$ está ordenado por extensión final $\sqsubseteq$. Un *árbol* T en $\mathbb{N}^{[<\omega]}$ es un conjunto $\sqsubseteq$-cerrado hacia abajo. Dado un árbol T definimos el cuerpo del árbol de la siguiente manera:

$$[T] = \{A \in \mathbb{N}^{[\infty]} : A \cap \{0, \cdots, n\} \in T \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Un $\mathcal{U}$-árbol es un árbol T sobre $\mathbb{N}^{[<\omega]}$ con la siguiente propiedad:

$$\{n : t \cup \{n\}\} \in \mathcal{U}$$

para todo $t \in T$. La clave para completar la demostración de que $\mathcal{H}$ es bisecuencial es el siguiente resultado.

Lema 6.6. *[19] Para toda subconjunto analítico $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ existe un $\mathcal{U}$-árbol tal que*

$$[T] \subseteq \mathcal{A} \ \ o \ \ [T] \cap \mathcal{A} = \emptyset.$$

Como $\mathcal{H}$ es coanalítico, entonces por el lema anterior existe un $\mathcal{U}$-árbol T tal que $[T] \subseteq \mathcal{H}$ o $[T] \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Mostraremos que necesariamente se da la primera alternativa. En efecto, basta ver que $[T] \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Para esto, considere los siguiente conjuntos

$$A_t = \{n \in \mathbb{N} : \ t \cup \{n\} \in T\}$$

para $t \in T$. De la definición de $\mathcal{U}$-árbol se tiene que $A_t \in \mathcal{U}$ y por consiguiente $A_t \in \mathcal{H}$. Por ser $\mathcal{H}$ selectivo, existe $B \subseteq \mathbb{N}$ en $\mathcal{H}$ tal que $B/\max(t) \subseteq A_t$ para todo $t \subseteq B$ finito, es decir, $B \in [T]$.

Tenemos entonces que $[T] \subseteq \mathcal{H}$. Es fácil ver que si $E \subseteq \mathbb{N}$ es tal que $E \cap A_t \neq \emptyset$ para todo $t \in T$, entonces E contiene un conjunto en $[T]$ y por lo tanto $E \in \mathcal{H}$. Esto dice que la colección A_t con $t \in T$ genera el filtro de vecindades de ∞. □

Para concluir daremos un bosquejo de la demostración del teorema 5.3.

Sea G un grupo topológico numerable Frechet con topología analítica. Fijemos $x \in G$. Queremos mostrar que G es bisecuencial en x. Es claro que podemos suponer que x no es aislado, si lo fuera, entonces G sería discreto. Sea $(x_n)_n$ una enumeración de $G \setminus \{x\}$ y considere el coideal $\mathcal{H}_x$ definido en el ejemplo 6.3. Por el teorema 6.5 basta mostrar que $\mathcal{H}_x$ es selectivo y coanalítico.

(a) El coideal $\mathcal{H}_x$ es coanalítico. Denotemos por τ la topología de G. Tenemos que

$$A \notin \mathcal{H}_x \ \Leftrightarrow \ \exists V \ [V \in \tau \ \& \ x \in V \ \& \ \forall n \in A \ (\ x_n \notin V)].$$

De aquí no es difícil verificar que el complemento de $\mathcal{H}_x$ es analítico por ser la proyección de un conjunto analítico.

(b) $\mathcal{H}_x$ es selectivo. Verificaremos sólo la parte (ii) de la definición de coideal selectivo y para la parte (i) referimos al lector a [21]. Sea $A \subseteq G$ tal que $x \in \overline{A}$ y $(F_k)_k$ una partición de A en pedazos finitos. Como G es Frechet, un argumento similar al usado en la demostración del teorema 6.4 muestra lo deseado.

Referencias

[1] W. W. Comfort y Salvador García Ferreira. Resolvability: a selective survey and some new results. *Topology and its Applications*, 74:149–167, 1996.

[2] C. A. Di Prisco. *Combinatoria: Un panorama de la teoría de Ramsey*. En preparación.

[3] C. A. Di Prisco. Desarrollos recientes en la teoría de particiones. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, VI(1):9–24, 1999.

[4] C. A. Di Prisco y J. Lopez Abad. *Teoría de Ramsey y Espacios de Banach.* XXI Escuela Venezolana de Matemáticas. Asociación Matemática Venezolana, 2008.

[5] C. A. Di Prisco y C. Uzcátegui. *Teoría Descriptiva de Conjuntos y la Recta Real.* IV Escuela Venezolana de Matemáticas. Asociación Matemática Venezolana, 1991.

[6] E. K. van Douwen. Applications of maximal topologies. *Topology and its Applications*, 51(2):125–139, 1993.

[7] F. Hernández-Hernández, O. Pavlov, P. Szeptycki y A. Tomita. Realcompactness in maximal and submaximal spaces. *Topology and its Applications*, 154:2997–3004, 2007.

[8] I. Juhász, L. Soukup y Z. Szentmiklóssy. $\mathcal{D}$-forced spaces: A new approach to resolvability. *Topology and its Applications*, 153:1800–1824, 2006.

[9] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, 1994.

[10] K. Kunen. *Set theory. An introduction to independence proofs.* North Holland, Amsterdam, 1983.

[11] A. R. D. Mathias. Happy families. *Ann. Math. Log.*, 12:59–11, 1977.

[12] E. Michael, A quintuple quotient quest. *Topology and its Applications*, 2:91–138, 1972.

[13] J. Moore y S. Todorcevic. The metrization problem for Frechet groups. In E. Pearl, editor, *Open Problems in topology II.* Elsevier, 2007.

[14] Y. N. Moschovakis. *Descriptive set theory.* North Holland, Amsterdam, 1980.

[15] D. Shakhmatov. Convergence in the presence of algebraic structure. In M. Husek and J. van Mill, editors, *Recent Progress in General Topology II.* Elsevier, 2002.

[16] S. M. Srivastava. *A course on Borel Sets.* GTM 180. Springer, 1998.

[17] O. Njåstad. On some classes of nearly open sets. *Pacific. J. Math.*, 15:961–970, 1965.

[18] S. Todorčević. *Topics in Topology.* LNM 1652. Springer, 1997.

[19] S. Todorčević. *Introduction to Ramsey spaces.* Princeton University Press. Por aparecer.

[20] S. Todorčević y C. Uzcátegui. Analytic topologies over countable sets. *Topology and its Applications*, 111(3):299–326, 2001.

[21] S. Todorčević y C. Uzcátegui. Analytic k-spaces. *Topology and its Applications*, 146-147:511–526, 2005.

[22] C. Uzcátegui. On Borel topologies over countable sets. Notas de Matemática #169, Dept. de Matemática, Universidad de Los Andes, 1997.

[23] C. Uzcátegui. On the complexity of the subspaces of S_ω. *Fundamenta Mathematicae*, 176:1–16, 2003.

[24] C. Uzcátegui. Topologies generated by ideals. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 47(2):317–335, 2006.

[25] C. Uzcátegui. Maximal countable spaces. En preparación.

[26] C. Uzcátegui y J. Vielma. Alexandroff topologies viewed as closed sets in the Cantor cube. *Divulgaciones Matemáticas*, 13(1):45–53, 2005.

Carlos Uzcátegui Aylwin
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes
Mérida
e-mail: uzca@ula.ve