HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

La correspondencia entre Beppo Levi y Mischa Cotlar. Las primeras publicaciones de Cotlar.

Lucio R. Berrone

Resumen. En 1940 y desde Buenos Aires Mischa Cotlar entabló relación epistolar con Beppo Levi, director del Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral con sede en Rosario. La rica interacción entre los dos matemáticos se prolongó por muchos años. Exponemos aquí los resultados del estudio del epistolario correspondiente a los dos primeros períodos. El intercambio desembocó en sendas publicaciones de Cotlar en uno de los periódicos editados por Levi.

Abstract. In 1940 from Buenos Aires Mischa Cotlar engaged in correspondence with Beppo Levi, director of the Institute of Mathematics in the Faculty of Mathematics at the Universidad Nacional del Litoral based in Rosario. The rich interaction between the two mathematicians lasts for many years. We report here the results of correspondence for the first two periods. The exchange led to publications of Cotlar in a journal published by Levi.

1 Introducción: el contacto entre dos matemáticos del viejo mundo

Dos son los trabajos de Mischa Cotlar (1913-2006) que en los años 1940 y 1942, respectivamente, aparecieron en las "Publicaciones del Instituto de Matemática" de la Universidad Nacional del Litoral. Estos son presentados como [2] y [3] en la lista de referencias. Los artículos se cuentan entre los primeros de este matemático nacido en una población de Ucrania y emigrado junto con su familia a Uruguay[1] en 1928. La familia de Cotlar había conseguido establecerse en Montevideo, y en 1935 Mischa había cruzado el Río de la Plata hasta Buenos Aires, ciudad en donde podía desarrollar en mejores condiciones sus intereses

[1]Un esbozo biográfico de Cotlar puede leerse en [5]. A las suscintas notas biográficas [12] se accede a través de Internet.

matemáticos[2]. El creador y editor de las *Publicaciones* era el matemático italiano Beppo Levi (1875-1961), quien había desembarcado en el puerto de Buenos Aires hacia finales de1939 para hacerse cargo de la dirección del Instituto de Matemática[3], en la por entonces Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral con sede en la ciudad de Rosario, próspero puerto fluvial situado al sur de la provincia de Santa Fe.

Beppo Levi[4] había llegado a Rosario con 64 años de edad y, como otros de su generación y procedencia, era un hombre con una visión integral de la Ciencia. Y no sólo de la suya, la Matemática, aún cuando conformara esta la sustancia principal de sus reflexiones. Su formación inicial, regularmente adquirida en la Università di Torino (Italia), se había beneficiado con las enseñanzas de matemáticos como Giuseppe Peano, Corrado Segre y Vito Volterra. Había luego tenido lúcida participación en muchos desarrollos de la geometría algebraica de su época, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales. Había ganado una definida comprensión de los procesos intelectivos que sustentan las construcciones básicas del Análisis y había sido capaz de extraer de ellos consecuencias generales sobre el alcance y sentido general de la teoría matemática. No se había mantenido ajeno al debate que alrededor de las cuestiones de fundamentos se había desatado hacia fines del siglo XIX, ni tampoco a las ideas de la nueva Física nacida en las primeras décadas del XX. En Rosario, Levi inicia enseguida una activa y múltiple labor. Dicta seminarios avanzados de Matemática, edita las "Publicaciones" y también el boletín "Matematicae Notae", de aparición periódica desde 1941. Todo esto, desde luego, sustentado por un marco institucional adecuado, generoso[5].

La formación de Cotlar fue, en cambio, de sesgo azaroso. La lectura de [5] y otros escritos contenidos en el mismo volumen aportan un conocimiento de su desarrollo. Aquí señalaremos solamente que en 1940, Mischa sumaba 26 años de edad y llevaba unos cinco años de residencia en Buenos Aires. Había publicado en los periódicos de la Facultad de Ingeniería de Montevideo y de la Sociedad Científica Argentina algunos trabajos de contenido muy general y especulativo. Los títulos de estos primeros trabajos (*Aritmética Abstracta, Teoría de Anágenos)* son verdaderamente significativos. Su *Théorie d' Anagènes* la había anticipado en un congreso internacional celebrado en Bordeaux, Francia. El con-

[2]Contratado por la universidad para impulsar el desarrollo de la matemática superior, el matemático español J. Rey Pastor (1888-1962) había arribado a Buenos Aires en 1921. El traslado de Cotlar buscaba una aproximación al entorno de Rey Pastor y su escuela en Buenos Aires. En Montevideo, Mischa se había relacionado con el círculo de personas vinculadas a los matemáticos Rafael Laguardia y José Luis Massera.

[3]La inauguración oficial del Instituto se produjo luego de la llegada de Levi, en mayo de 1940.

[4]S. Coen (Bolonia) es biógrafo y editor de las obras completas de Levi. [11] es una biografía de Levi escrita por una de sus hijas. [22] es una reseña de la obra científica de Levi escrita por Luis Antonio Santaló.

[5]Al respecto, véase [20].

tacto con el recién llegado Profesor Levi se inicia por la intermediación del profesor Juan Carlos Vignaux. Por cierto, había sido Vignaux el destinatario de la carta de recomendación que portaba Cotlar cuando su traslado a Buenos Aires. Ambos habían luego compartido intereses matemáticos. En 1936, el artículo *Sobre las derivadas areolares simétricas de funciones de una variable compleja dual* había aparecido con sus firmas en los Anales de la Sociedad Científica Argentina. Vignaux, puntualicemos además, era aquel matemático argentino a quién Levi se había dirigido en 1938, luego de la promulgación de las leyes raciales en la Italia fascista, para "consultarle sobre sus posibilidades" ([11], pág. 43) de emigración al país.

Si el interés del trabajo presente fuera el de recordar las condiciones históricas y sociales que por aquellos años signaban las vidas tanto de Levi como de Cotlar, debiéramos emplear, entre otras, palabras como "exilio" y "emigración" tal vez atemperadas por el hecho de que Argentina y otros países del cono sur eran entonces tierra prometida para muchas personas en el mundo y sus universidades venían abonando el cultivo de las ciencias (cfr. [21]). Por otra parte, una equilibrada visión de conjunto de los primeros trabajos de Cotlar ha sido proporcionada ya por John Horváth en el artículo [6]; y como he podido leer la correspondencia que establecieran Cotlar y Levi en torno a las dos publicaciones mencionadas, me ha parecido de interés ofrecer, en las secciones siguientes, una síntesis de aquel intercambio epistolar.

El grupo de cartas que ha llegado a mis manos no es completo. Existen evidentes discontinuidades, vacíos postales en él. Se echan sobre todo en falta muchas de las cartas escritas por Levi. No obstante, la parte conservada me ha parecido alcanzar para la elaboración de un relato posible del intercambio de ideas. Además de devolver cierta ilusión de necesidad, la reconstrucción pondrá de relieve la importancia de las ideas matemáticas que sustanciaron el intercambio. Cuando tal reconstrucción ocurre, como en el caso del cuerpo de cartas que condujera al trabajo [3], dentro del contexto que ha sido llamado "de descubrimiento", el resultado final estará con mayor razón impregnado de cierto grado de subjetividad y limitado por los conocimientos de quien oficia el papel de reconstructor. La inclusión sólo parcial en dicho contexto de la correspondencia del año 1940 la hace quizá menos susceptible a esta ley. En cuanto a la exposición del material, el habitual orden cronológico seguramente facilitará estudios venideros.

1.1 Correspondencia del año 1940

La relación epistolar entre Beppo Levi y Mischa Cotlar comienza, como se dijo en la Introducción, en el año 1940, cuando el profesor Juan Carlos Vignaux envía a Levi un manuscrito de Cotlar titulado *Generalización de la Integral de*

Lebesgue. Levi se interesa rápidamente en él y en una carta fechada el 3 de septiembre de aquel año le ofrece publicarlo en las *Publicaciones* . Con fecha 10 de septiembre, Cotlar responde con entusiasmo al ofrecimiento de Levi, y ello da origen a un intercambio centrado tanto en el aspecto matemático como en el tipográfico[6] del trabajo que se extendió hasta finales de aquel año.

En su trabajo, Cotlar desarrolla una generalización de la medida y la integral de Lebesgue para conjuntos y funciones no-medibles en la dirección que a continuación describimos. Si $A \subseteq R^n$, un punto $x \in R^n$ se dice de densidad de A cuando

$$\lim_{r\to 0} \frac{|A \cap B_r(x)|}{|B_r(x)|} = 1,$$

donde $B_r(x)$ es la bola de rario r centrada en x. Un clásico teorema de Lebesgue (ver [8]) asegura que si $A \subseteq R^n$ es medible y $|A| > 0$, entonces casi todo punto de A es de densidad de A. Cotlar prueba que si $C \subseteq R^n$, entonces resulta medible el conjunto de los puntos de C que son de densidad de C, de donde obtiene que todo conjunto no medible C puede descomponerse en la forma

$$C = C_0 \cup N, \tag{1}$$

donde C_0 es el conjunto de los puntos de densidad de C y $N = C \setminus C_0$ es llamado *núcleo* de C. De manera más general, Cotlar denomina núcleo a todo conjunto $N \subseteq R^n$ tal que casi todos sus puntos no son de densidad del mismo, resultando que todo $C \subseteq R^n$ se descompone de manera única como $C_0 \cup N$, donde C_0 es medible y N es un núcleo. En particular, si N es un núcleo, el complementario N' de N se descompone en la forma $N' = N'_0 \cup \overline{N}$, donde el núcleo $\overline{N}$ es llamado *núcleo conjugado* de N. El conjunto $N \cup \overline{N}$ resulta medible, y Cotlar asigna entonces a cada núcleo una *seudo-medida*:

$$\mu(N) = \frac{1}{2}\left|N \cup \overline{N}\right|.$$

En virtud de la descomposición (1), a cada $C \subseteq R^n$ corresponde la seudo-medida

$$\mu(C) = |C_0| + \mu(N).$$

La medida μ no resulta numerablemente aditiva en el sentido usual, inconveniente que Cotlar supera considerando una apropiada restricción de la noción de conjuntos disjuntos. De hecho, Cotlar llama *no-rampantes* a dos núcleos N_1 y N_2, cuando satisfacen las condiciones

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset, \overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 = \emptyset.$$

[6]Una de las tareas del editor de aquella época era la de adecuar a las posibilidades tipográficas de la imprenta el simbolismo especial usado por el autor.

Dos conjuntos A y B se dicen *no-rampantes* cuando son disjuntos y sus núcleos son no-rampantes. Cotlar prueba entonces que la seudo-medida de una unión numerable de conjuntos no-rampantes de a pares es igual a la suma de las seudo-medidas de cada uno de los conjuntos. Apoyándose en este resultado y efectuando pertinentes modificaciones en el desarrollo habitual de la teoría de la integral de Lebesgue, Cotlar contruye una teoría de la integración respecto de la seudo-medida μ extendiendo entonces la integral de Lebesgue a una clase más amplia de funciones: las funciones *seudo-medibles*.

La cuestión quizá de mayor relevancia discutida por Levi y Cotlar en la correspondencia de aquel año se refiere a la posibilidad de construir conjuntos no medibles sin el uso del axioma de elección. La importancia del tema amerita el que transcribamos algunos párrafos. Es en la carta que hemos mencionado arriba donde Levi hace observar que la noción de función seudo-medible es, en realidad, bastante restrictiva. El 3 de septiembre, Cotlar replica diciendo que la construcción de conjuntos no medibles proporcionaría ejemplos no triviales de funciones seudo-medibles:

> *"...las consideraciones que Ud. hace, indican que la condición de seudo-integrabilidad impone limitaciones fuertes. Tratando de construir ejemplos de funciones seudo-medibles no elementales, me encontré con la dificultad de que conocía muy pocos ejemplos de conjuntos no medibles, y menos todavía métodos para construirlos; si Ud. quisiera orientarme al respecto le quedaría muy agradecido."*

En una carta fechada el 9 de octubre, Beppo Levi acota:

> *"Me parece que la dificultad está propiamente en esto: que las operaciones provechosas para el Análisis hasta ahora llevan necesariamente a funciones medibles, porque al cabo se reducen siempre a las operaciones elementales, más la operación de límite. Por esto, yo no sé que pueda tentarse la definición de conjuntos no medibles sino con la aplicación del postulado de Zermelo."*

Respecto del punto de vista de Levi, Cotlar responde con la siguiente objeción:

> *"Ud. me dijo (y esto me hizo pensar) que no se podrá demostrar la existencia de conjuntos no medibles, a menos que se haga uso del postulado de la libre elección, porque todos los ejemplos del Análisis consisten en el paso al límite combinado con las operaciones elementales, y los límites de conjuntos medibles son también medibles. Pero los mismos razonamientos sirven para los conjuntos borelianos, sin embargo he aquí una demostración de que existen conjuntos medibles L y no Borel ..."*

Lo que sigue en la carta es un argumento de cardinalidad que efectivamente prueba la existencia de conjuntos medibles Lebesgue que no lo son en el sentido de Borel. A esta objeción, Beppo Levi contesta de manera concluyente:

> *"La existencia de conjuntos no medibles L me parece fuera de toda duda, sea por razones lógicas, que la idea de conjunto es tan amplia y en ella no entre la noción de medibilidad, que no hay que pensar que la clase de "conjuntos no medibles" sea vacía. Sea también porque yo mismo en mis cartas anteriores le hablé de conjuntos conocidos y por cierto no medibles[7]. El problema me parece otro: el que estos conjuntos sean definibles en el dominio deductivo de los números reales o tan solo de las funciones. Y si yo uso una pequeña insistencia sobre este "dominio deductivo" (a lo que estaría muy dispuesto a admitir por parte de Ud. la contestación de que le parece inútil hablar de eso) es solo porque en efecto no me parece de poner una condición que Ud. pueda despreciar, sino que la palabra sirve solo para fijar la atención sobre una condición esencial del razonamiento. En efecto, cuando Ud. habla del mínimo conjunto medible que contiene un núcleo, tiene que tener un modo de determinar este mínimo conjunto medible; y de medirlo también; y estas operaciones solo puede hacerlas si sus conjuntos están definidos en términos referibles a los números reales."*

Aparece en el párrafo el concepto de *Dominio deductivo*, noción "metamatemática" que Levi introduce en el artículo [9] (véase también [10]) y resume sus personales reflexiones sobre los fundamentos del Análisis y que busca volcar la contrucción de nuevas teorías matemáticas en el molde del Análisis clásico.

En las cartas siguientes el centro de atención se desplaza a cuestiones de forma del trabajo de Cotlar. Beppo Levi encuentra demostraciones más sencillas para algunos de los resultados y hace varias observaciones sobre el estilo en que Cotlar ha redactado su trabajo. Sobre todo se ocupa de hacerlo apto para ser tipografiado. A fines de diciembre del 40, en una de las últimas cartas de ese año, Mischa Cotlar insiste en su punto de vista:

> *"Con todo, tengo el pleno convencimiento (intuitivo) de que pueden darse ejemplos de conjuntos no medibles sin acudir al principio de elección. Además me parece que en ciertos casos puede ser demostrado el postulado de Zermelo..";*

y más adelante

> *"...no veo porqué los ejemplos de conjuntos no medibles deben darse por el método de la libre elección y no en base de la definición*

[7] *Levi se refiere al conjunto de Vitali.*

> *misma de conjunto medible utilizando uno de los tantos algoritmos del Análisis; por ejemplo imponiendo condiciones al desarrrollo en fracción continua".*

La cuestión de la posibilidad de la construcción de conjuntos no medibles sin utilizar el axioma de elección tardará todavía unos veinte años en ser dirimida. Los trabajos de Jan Mycielski y Stanislaw Świerczkowski [19] junto a los de Robert Martin Solovay [23], muestran que puede construirse un conjunto no medible Lebesgue sólo con el auxilio del axioma de elección y que un principio de selección numerable no es suficiente para ello.

En su respuesta del 10 de septiembre, M. Cotlar hace la siguiente observación respecto del concepto de núcleo:

> *"El concepto de núcleo, como el de ideal de Kummer, o el de punto impropio, etc. es un caso particular del concepto de la cortadura de Dedekind abstracta, que yo llamo "anágeno". Los conjuntos medibles de Lebesgue pueden obtenerse como anágenos respecto a los rectángulos o cuadrados; análogamente, los núcleos son los anágenos respecto de los conjuntos medibles";*

llamando así la atención de Levi sobre su idea de *anágeno* [8] desarrollada en el trabajo [1] aparecido el año anterior en los Anales de la Sociedad Científica Argentina [9]. Propiamente, la idea de Cotlar consiste en sumergir un conjunto parcialmente ordenado A en un reticulado completo constituido por "cortaduras" de A , mediante una abstración similar a la que permitió a Dedekind completar la recta racional. Señalamos que en esta dirección de pensamiento había sido precedido por Holbrook Mann MacNeille, quien en su tesis doctoral [14] de 1935 (cfr. también [15] y [16]) desarrolla las mismas ideas.

1.2 Correspondencia de los años 1941-42

Con el trabajo [2] todavía en imprenta, en una carta fechada el 6 de febrero de 1941 Cotlar remite a Levi algunos resultados sobre un problema que ha estado estudiando *'desde hace un tiempo'*. Se trata

> *"...de una propiedad de las funciones holomorfas que tienen la particularidad de transformar el contorno del dominio (en el cual*

[8] Etimológicamente 'sin origen'. En [1], Cotlar explica: "Los nuevos entes creados por los métodos constructivos corresponden a conjuntos de entes primitivos que podemos llamar "sin origen", ya que el número irracional es una cortadura sin el menor (mayor) elemento, el ideal no principal es un anillo sin divisor común, el punto impropio es un conjunto de determinadas rectas sin punto común, etc."

[9] Por recomendación de Maurice Fréchet, Cotlar iba a publicar este trabajo en Fundamenta Mathematicae, proyecto que se vió impedido por el comienzo de la 2da. guerra.

> *están definidas) en una curva simple de Jordan, de modo que el dominio transformado resulte un dominio "Riemann" (es decir, de quien puede hacerse la representación conforme sobre un círculo) , y también de las funciones que son límites de aquellas."*

Cotlar llama funciones de clase R_0 a las primeras y funciones de clase R_1 a las últimas. Con esta carta comienza no sólo el intercambio alrededor de una cuestión matemática distinta, sino también una nueva etapa de la correspondencia entre Cotlar y Levi. A diferencia de la anterior, en la cual somete a la crítica incisiva del matemático italiano un cuerpo completo de resultados Cotlar va, a lo largo del año 41, madurando sus ideas bajo la escrupulosa mirada de Beppo Levi. El artículo [3], aparecido en las Publicaciones del Instituto de Matemática en 1942, será el producto de esta interacción.

Como era conocido desde los trabajos de Paul Montel realizados durante la segunda década del pasado siglo, la familia $\mathcal{E}$ de funciones univalentes (*slicht*) de funciones holomorfas en el círculo unitario $D(0;1)$ tales que $f(0) = 0$, goza de propiedades especiales (cfr. [17, 18]). Entre las más remarcables se cuentan las siguientes:

1. $\mathcal{E}$ es una familia quasi-normal de orden 1.
2. Toda función f de $\mathcal{E}$ cubre un círculo cuyo radio solo depende de $|f'(0)|$.
3. Sobre la circunferencia $|z| = r < 1$ toda función de $\mathcal{E}$ cumple la desigualdad
$$|f(z)| \leq |f'(0)| \frac{r}{(1-r)^2}.$$
4. Si $f \in \mathcal{E}$ es continua sobre el contorno $|z| = 1$, entonces su serie de Taylor converge uniformemente en todos los puntos de dicho contorno.

El propósito de Cotlar es el de extender estas propiedades a la clase de funciones holomorfas que son univalentes sobre un arco del contorno de $D(0;1)$. El 16 de marzo, escribe

> *"En los teoremas clásicos que aseguran la normalidad de la familia (o en las generalizaciones del teorema de Stieltjes) se exige en la hipótesis condiciones que deben verificarse en <u>todo</u> el interior del dominio D, y por esto pueden llamarse hipótesis del <u>interior</u> [...]. Ahora, en el teorema que discutimos se exigen condiciones que deben verificarse sobre una <u>curva</u> Γ que limita a D; esta curva puede ser interior o no a un dominio de holomorfismo de la función, sólo interesa que la hipótesis <u>exige</u> que $f_n(z)$ sea holomorfa al interior de Γ y continua sobre ella, y claro que verifica ciertas condiciones; por esto puede decirse que se trata de condiciones de <u>contorno</u>."*[10]

[10]Los subrayados de la citaciones corresponden siempre a los originales.

El teorema al que hace aquí referencia es una versión mejorada del resultado fundamental expuesto en la nota del 6 de febrero y puede leerse en una carta anterior (20 de marzo):

> *"Diremos que una función $f(\xi)$ es univalente en el conjunto E, cuando para dos puntos diferentes a y b de E es $f(a) \neq f(b)$. Ahora, si las funciones $f(z)$ de una familia son univalentes en un conjunto E del contorno, de medida > 0, entonces la acotación de las $|f(z)|$ en un círculo interior al dominio (arbitrariamente pequeño) es suficiente para asegurar la normalidad en todo el dominio que contiene dicho círculo. Tengo que confesar que todavía me falta completar algunos puntos de la demostración..."*

Más adelante, en la misma carta del 16 de marzo, Cotlar encuentra todavía obstáculos *"mucho más serios de lo que esperaba"* para resolver los problemas que se le han planteado. El 25 de abril, escribe:

> *"No le he escrito hasta ahora porque me di cuenta que las últimas demostraciones que estaba por enviarle podrían ser muy simplificadas y volví a rehacerlas..."*

Junto con esta carta, Cotlar envía a Levi una nota que contiene sus últimos resultados:

> *"Le envío los resultados concretos redactados así como los comprendo ahora, o sea como una extensión de los resultados de las funciones univalentes o multivalentes. En efecto, la función univalente puede definirse como una función de la clase R_0 que es univalente sobre todo el contorno Γ. En cambio, nosotros trabajamos con funciones de la clase R_0 pero univalentes tan solo sobre un pequeño arco del contorno. Estas funciones constituyen evidentemente una clase mucho más amplia que las univalentes y cuya forma analítica es aquella que Ud. me había indicado. El resultado concreto a que pude llegar se reduce entonces a que estas funciones conservan las propiedades principales de la teoría de las funciones univalentes."*

En la misma carta, Cotlar señala la posibilidad de aplicar sus teoremas a la teoría de iteración de funciones, desarrollada por Gaston Julia (1893-1978) y Pierre Fatou (1878-1929) a principios del pasado siglo. En realidad, expresa no tener todavía *"nada concreto de este lado"* y pide orientación al profesor Levi[11]. El 12 de junio, remite una nueva nota conteniendo sus avances en el tema. En ella hace constar las dificultades con las que ha tropezado:

[11] Sobre el desarrollo posterior de la teoría de iteración de funciones holomorfas en el círculo unitario puede consultarse la monografía de Doering y Mañé [4].

> *"Estoy adelantando muy lentamente, sobre todo por no manejar la teoría de fracciones iteradas, de la cual tenía conocimiento muy somero. Me vi en la necesidad de estudiar sistemáticamente la memoria de Fatou. Pero tengo muy poco tiempo para estudiar y menos para pensar* [12]*.Con todo, en lo que le envío hay dos resultados que me parecen ser verdaderamente importantes y que, si no es decir mucho, prometen fecundas aplicaciones. Uno de ellos profundiza un teorema de Hurwitz de que toda función límite de funciones univalentes es univalente o constante. Mi resultado es este. Si* $f(z)$ *es límite de funciones* $f_n(z)$ *univalentes sobre un arco* $\overline{AB}$*, y si para dos puntos* z_1 *y* z_2 *es* $f(z_1) = f(z_2)$*, entonces desde un* n *se verifica* $f_n(z_1) = f_n(z_2)$*. En particular, si* $\overline{AB}$ *es todo el contorno, las* f_n *son univalentes y también tendrá que serlo* $f(z)$*..."*

Pocos días después, Cotlar escribe nuevamente diciendo que ha detectado un error en los resultados que le ha enviado el 12 de junio, pero en una breve esquela, fechada el 25 de junio, anuncia que ya ha corregido *"bien todo lo que estaba mal y ya está arreglado todo"*. Durante las vacaciones del receso invernal, Mischa lee una memoria ([13]) de John Edensor Littlewood (1885-1977) en donde se expone el concepto subordinación de funciones. Los resultados de Littlewood permiten a Cotlar dar a los suyos gran generalidad. Puede decirse que recién en este momento Cotlar consigue dar forma definitiva a sus teoremas: con algunos agregados que comentaremos más adelante, ellos constituirán el corazón del trabajo [3]. En una carta llena de entusiasmo fechada el 30 de Julio, Cotlar comunica su hallazgo a Levi. Esta carta fundamental merece, creemos, transcribirse casi en su totalidad.

> *"He tenido unos días de vacaciones, y creo haberlos aprovechado bien, avanzando bastante en el trabajo. Por lo menos lo he llevado a una forma definitiva y lo he terminado en lo que al trabajo en si se refiere, pero todavía pueden hacerse muchas aplicaciones cuyo estudio dejo para más adelante. Leyendo a Julia* [13] *me llamó la atención una memoria importante de Littlewood que continúa con gran éxito las investigaciones empezadas por Lindelöf sobre el teorema de Schwarz y que sistematiza varias teorías de la teoría de funciones. Al leer esta memoria mis ideas se aclararon y por fin dí con lo que estaba buscando tanto tiempo. Combinando los resultados*

[12] En la introducción se mencionó aquella carta (presumiblemente firmada por Rafael Laguardia, por entonces el matemático de mayor relieve en Uruguay) que Mischa presentó a Vignaux luego de su llegada a Buenos Aires. Vignaux enseguida lo había recomendado para dar clases privadas de Matemática [5]. De ese modo proveía a su sustento Mischa cuando escribía estas líneas a Levi.

[13] En la segunda parte de su libro [7] (pág. 103), Julia hace una revisión de la memoria de Littlewood. Es a través de este libro que Cotlar toma contacto con dicha memoria.

mios con los de Littlewood, he podido dar en un instante una gran generalidad al trabajo extendiendo todos los resultados hallados, se puede decir, a casi cualquier función holomorfa. En una palabra, fue un verdadero hallazgo para mi esta memoria, además me di cuenta de que lo que estaba haciendo todo este tiempo era una solución recíproca del método de Littlewood; Ud. verá en la introducción los detalles. Los resultados de Littlewood me permitieron simplificar muchísimo todas las demostraciones y reducir las dimensiones del trabajo por lo menos a la mitad; creo que cuanto más sencillas son las cosas, más se está sobre el camino acertado. Ud. perdonará este entusiasmo excesivo, seguramente es cosa de los primeros días; pero me da la impresión que he obtenido algunos resultados interesantes. En resumen helos aquí:

Sea f *una función holomorfa cualquiera en el dominio* D *limitado por la curva de Jordan* Γ*; designaremos con* $\overline{D}$ *el dominio transformado de* D *por* f*, y con* $\overline{\Gamma}$ *la frontera de* $\overline{D}$*. Diremos que un arco* AB *del contorno (o un conjunto* E *del mismo) es un arco* <u>*propio*</u> *si: 1) la función está definida y es continua sobre dicho arco y 2) el arco* $\overline{AB}$ *transformado por la función puede unirse con una línea continua al infinito sin encontrar puntos de* $\overline{D}$*. Finalmente, al decir que la función es univalente sobre* AB *suponemos que este arco es propio. Si* f *es univalente sobre dicho arco y si* l *es la longitud del mismo, se tiene: 1) Existe un círculo con centro en el origen (suponemos* $D =$*círculo) cuyo radio depende de* l *pero no de la función, tal que el número de ceros de* f *en este círculo no excede a* $[2\pi/l]$*. 2) Más general, el número de ceros en el círculo* $|z| < r$ *no excede a* $\pi/arctan(\frac{1-r}{1+r}tan(\frac{l}{2}))$*. 3) Si* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ *son los primeros* $\nu = [2\pi/l]$ *coeficientes del desarrollo de* f*, se tiene* $|f(z)| \leq 2^{(\nu+2)!}\nu^{(\nu+2)!}(|a_1|+\cdots+|a_\nu|)\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$*, en particular si* $\nu = 1$ *se obtienen los resultados de las funciones univalentes. 4) Se tiene* $|f(z)| \leq (|f(\xi_\nu)|+64\delta_\nu\,|f'(\xi_\nu)|\,\frac{|z|}{(1-|z|)^2})2^{(\nu+2)!}\nu^{(\nu+2)!}$*, donde el punto* ξ_ν *depende tan solo de* ν*, lo mismo que el factor constante* δ_ν*. De aquí resulta que conociendo la posición y longitud del arco de univalencia* AB*, se puede delimitar las regiones en las cuales no hay ceros dobles de la función o ceros de la derivada. La mayoría de las desigualdades de la teoría de las funciones univalentes se extienden a este caso con la única diferencia de un factor proporcional a* $[2\pi/l]$ *y de una traslación análoga a la traslación de la propiedad 4 (si en la propiedad 4 es* $\nu = 1$*, entonces es* $\xi_\nu = 0$ *y se obtiene el teorema de Bieberbach* [14]*). Finalmente se extienden casi todas las*

[14] Cotlar hace referencia a la acotación de $|f(z)|$ que hemos indicado en 3.

desigualdades de Littlewood, como Ud. verá en la introducción.

A mi parecer lo que hay de interesante en todo esto es lo siguiente: se ha demostrado en la teoría clásica que la función queda perfectamente conocida por sus valores sobre un arco del contorno; mientras que aquí resulta que la sola longitud de un arco de univalencia (y no los valores de la función sobre el mismo) dan un conocimiento de la limitación del número y de la distribución de los ceros, así como también de su módulo y de las funciones convexas del módulo."

Comparemos ahora los resultados que Mischa expone en la carta precedente con la forma final que asumieron en el trabajo [3]:

"Si AB es un arco de univalencia de longitud l y ν es la parte entera de $2\pi{:}l$ se demuestran los siguientes resultados: 1) Toda familia $f(z)$ compuesta de funciones univalentes sobre AB es una familia quasi-normal en todo círculo $|z| < r < 1$ y de orden que depende solo de ν y de r. Si las funciones son acotadas en un $\nu + 1$ puntos de un círculo interior a D ellas son acotadas en D. 2) Toda función univalente sobre AB cubre (y a lo sumo ν veces) un círculo con centro en el origen, cuyo radio depende tan solo de las primeras ν derivadas $|f'(0)|, \ldots, |f^{\nu}(0)|$. 3) Si $f(z)$ es univalente en AB, en todo círculo $|z| < r < 1$ el número de ceros no excede a un número que depende de l y de r, a saber:

$$\frac{\pi}{2\arctan(\frac{1-r}{1+r} tan(\frac{l}{4}))}.$$

4) Si $f(z)$ es univalente sobre AB se tiene la limitación

$$|f(z)| \leq K(l)(|f'(0)| + \cdots + |f^{\nu}(0)|)\frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

donde $K(l)$ depende sólo de l ($K(2\pi) = 1$). 5) Si f es univalente sobre AB, existe una región Δ de D contigua a AB y que depende sólo de l, tal que en Δ la función es univalente y no se anula. 6) Si AB es un arco propio de una $f(z)$ continua, la serie de Taylor converge en todo punto de AB salvo a lo sumo en un conjunto no denso de AB. Estos resultados se extienden todavía para el caso en que se reemplaza el arco de univalencia por un conjunto de medida $l > 0$. En particular, para $l = 2\pi$ se obtienen las propiedades de las funciones univalentes ordinarias."

El estudio de las propiedades de convergencia en el contorno de la serie de Taylor de una función univalente sobre un arco AB es el último que emprende

Cotlar: recién a mediados de diciembre lo comunica a Beppo Levi. En una esquela de salutación por el fin de año, escribe:

> *"...como estos días tendré un par de días de vaciones espero terminar aquel teorema que le hablé y así ya redactar definitivamente el trabajo y contestarle. Estoy casi seguro que el teorema va a salir bien, faltan algunos detalles no más, y en tal caso sería verdaderamente una contribución importante a los teoremas tauberianos y las series de Fourier."*

El 14 de febrero Mischa ha completado su trabajo:

> *"...acabo de pasar en limpio el trabajo y lo adjunto con esta. Creo que ahora ya está listo; lo he modificado totalmente, teniendo siempre en vista las indicaciones contenidas en sus cartas..."*

Lamentablemente, de las cartas que Beppo Levi dirigió a Mischa Cotlar en esta época, pocas han llegado a mis manos. Aunque escasas, son ricas en comentarios e indicaciones. A continuación rescato las que he creido más importantes. La primera respuesta de Levi que se ha conservado —una carta fechada el 7 de marzo de 1941— transluce cierta incomprensión de los conceptos y del objetivo de los teoremas que Cotlar le ha remitido en sus apuntes. De este modo, las objeciones que allí plantea Levi —principalmente relacionadas con la corrección del uso que hace Cotlar en sus argumentos del principio de simetría— no nos han parecido muy ajustadas. Distinto caracter tienen las objeciones que Levi formula más tarde. En la demostración de su teorema que asegura la normalidad de una familia de funciones univalentes sobre un arco propio AB, uniformemente acotada sobre un círculo arbitrariamente pequeño interior a D, Cotlar necesita probar que cierta sucesión convergente de funciones de la familia no converge hacia una constante. Con ese fin, introduce cierta sucesión de transformaciones "de Riemman" del círculo unitario sobre un triángulo determinado $A_0B_0C_0$. En una carta con fecha del 7 de noviembre, Levi observa

> *"Todas las veces que ocurrió de encontrarme en una demostración que me pareció utilizar artificios que ocultaran el sentido íntimo de las propiedades que había que considerar, siempre he buscado de comprender hasta cuál punto el artificio fuese necesario y cuál fuese su significado. Una demostración engorrosa tiene siempre dentro de si el peligro que dentro del artificio se pase algo que no está completamente bien. En este caso, yo no comprendo la función que tiene la transformación del dominio en el triángulo y esto me hace obscuro todo el razonamiento..."*.

La contestación de Mischa no se hace esperar: en una carta fechada el 10 de noviembre explica

> *"...En eso no hay nada de artificial, y la razón de esta elección de un triángulo es la misma (aunque dentro de [un] orden de ideas algo distinto) por la cual en la definición de la función modular se representa el círculo sobre un triángulo y no sobre otra figura cualquiera (casualmente, al encontrarme con la dificultad en la demostración me acordé de la función de Schwarz y esto me dió la idea de la demostración). En dos palabras se podría decir que la razón de ello está en que el número de vértices del triángulo es el mismo que el número de puntos que puede prefijarse sobre el contorno en la representación conforme. Mas si me permite voy a explicarme con más detalle... ".*
>
> .

La explicación que sigue convence a Beppo Levi, quien en una carta del 5 de marzo de 1942 dice

> *"Aprovecho para comunicarle una observación que no tiene importancia fundamental, sino solo de detallle. Se trata del procedimiento con el cual Ud. demuestra que ninguna sucesión de funciones sigma* [15] *univalente sobre un arco de longitud inferiormente acotada puede tener límite constante. Mientras en la primera redacción el artificio de pasar del dominio de definición de la $f(z)$ al dominio triangular me parecía obscuro, me parece ahora del todo justificado y por lo tanto una idea admirable...".*

Como había sucedido con el trabajo [2], la forma final del trabajo [3] debe a Levi toda índole de mejoras: desde observaciones sobre la conveniencia tipográfica del uso de cierto símbolo matemático en lugar de otro dibujado con la pluma en el papel de renglones, hasta incisivas indicaciones que simplificaban algunas demostraciones y mejoraban el estilo de la "redacción". El siguiente párrafo, transcripto de una carta de Levi del 3 de diciembre de 1941, ilustra una clase de aporte bastante diferente de los señalados:

> *"Debo decirle, sin embargo, que me parece la redacción un poco cansadora y me permito señalarle un poco el porqué. No hay duda que yo soy un poco viejo y ciertas cosas yo no las veo muy modernamente. Una de estas ya se la señalé en otras oportunidades: no creo absolutamente que el matemático tenga derecho de decir: "yo estudio y publico una serie de deducciones sobre hipótesis que me pongo porque me gustan". Tampoco quiere esto decir que los problemas matemáticos deben ser problemas propuestos por razones*

[15] Levi hace referencia a lo que Cotlar llama funciones de Schwarz; i.e., aquellas funciones que satisfacen las hipótesis del lema de Schwarz.

prácticas; pero hay que darles por lo menos un interés especulativo o artístico. Aplicado al trabajo suyo, me parece que acrecentaría mucho el interés empezar con algunas consideraciones introductorias para mostrar cómo puede presentarse el problema de arcos de univalencia...".

La atmósfera platónica del grupo Bourbaki comenzaba a pesar sobre el mundo matemático y Levi se daba cuenta de ello.

Agradecimientos: expreso mi agradecimiento al *Instituto de Matemática Aplicada San Luis* (IMASL) y a la *Universidad Nacional de San Luis* (UNSL). La conclusión de este trabajo, iniciado muchos años atrás, ocurrió en el hospitalario marco provisto por estas instituciones. El cuerpo de correspondencia objeto del trabajo me fue presentado por Carlos D. Galles. Allanó mi labor el buen desempeño de M. Garro, bibliotecaria en la biblioteca "Esteban Agüero" de la UNSL.

Referencias

[1] M. Cotlar. *Estructuras de Anágenos.* Anales de la Soc. Científica Argentina, T. CXXVII, (1939), 328-347 y 432-461.

[2] M. Cotlar. *Sobre Conjuntos No Medibles y Generalización de la Integral de Lebesgue.* Publ. del Inst. de Matemática Vol. II $N°8$. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1940).

[3] M. Cotlar. *Funciones Univalentes sobre un Conjunto de Puntos del Contorno de un Dominio de Holomorfismo.* Publ. del Inst. de Matemática Vol. IV N°2. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1942).

[4] C. I. Doering, R. Mañé, *The Dynamics of Inner Functions*, Ensaios Matematicos, Vol. 3, Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Jameiro, 1991.

[5] D. G. Goldstein, *Mischa Cotlar: A Biography*, in *Analysis and Partial Differential Equations. A Collection of Papers Dedicated to Mischa Cotlar*, (C. Sadosky, Ed.), Marcel Dekker, Inc., (1990), xv-xviii.

[6] J. Horváth, *The early papers of Mischa Cotlar (1936-1955)*, in *Analysis and Partial Differential Equations. A Collection of Papers Dedicated to Mischa Cotlar*, (C. Sadosky, Ed.), Marcel Dekker, Inc., (1990), 689-714.

[7] G. Julia. *Principes Géométriques d'Analyse.* Gauthier Villars, Paris, I Partie (1930), II Partie (1932).

[8] H. Lebesgue. *Leçons sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives.* Paris, (1904).

[9] B. Levi, *La nozione di "dominio deduttivo" e la sua importanza in taluni argomenti relativi ai fondamenti dell'analisi.* Fund. Mat. XXII, (1934), 63-74.

[10] B. Levi, *La Noción de "Dominio Deductivo" como Elemento de Orientación en las Cuestiones de Fundamento de las Teorías Matemáticas.* Publ. del Inst. de Matemática Vol. II $N°9$. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1940).

[11] L. Levi, *Beppo Levi. Italia y Argentina en la vida de un matemático,* Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2000.

[12] E. Lima, L. Recht, *Mischa Cotlar. Notas Biográficas y Bibliografía.* Asoc. Mat. Venezolana, Boletín, Vol. 1 Nro. 1, (1994), 75-83.

[13] J. E. Littlewood. *On the inequalities in the theory of functions.* Proc. London Math. Soc., Serie II, Vol. 23.

[14] H.M. MacNeille. *Extensions of partially ordered sets.* Math. Soc. 42, (1937), 416-460.

[15] H.M. MacNeille. *Extensions of partially ordered sets.* Proc. Nat. Ac. of Sciences, Vol. 22, (1936), 45-50.

[16] H.M. MacNeille. *Partially ordered sets.* Trans. Am. Math. Soc. 42, (1937), 416-460.

[17] P. Montel, *Leçons sur les Familles Normales de Fonctions Analytiques.* Gauthier-Villars, Paris, (1927).

[18] P. Montel, *Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes.* Gauthier-Villars, Paris, (1933).

[19] J. Mycielski - S. Świerczkowski. *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness.* Fund. Mat. LIV.1, (1964), 67-71.

[20] C. Pla, *Antecedentes de la Creación del Instituto,* en Publ. del Inst. de Matemática Vol. II $N°5$. Fac. de Cs. Matemáticas de la Univ. Nac. del Litoral. Rosario, (1940).

[21] C. Pla, *La Matemática en el Litoral. La evolución de las ciencias en la Argentina (1920-1972)*, T. I, Sociedad Científica Argentina, (1972), 148-187.

[22] L. Santaló, *La obra científica de Beppo Levi*, Mathematicae Notae, Año XVIII, Vol. 1, (1962), XXIII-XXVIII.

[23] R.M. Solovay. *A model of Set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.* Annals of Math., 2nd. Series, 92, (1970), 1-56.

Lucio R. Berrone
IMASL, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas,
Departamento de Matemática, Fac. de Ciencias,
Universidad Nacional de San Luis,
Ejército de los Andes 850, (5700)
San Luis, Argentina.
e-mail: lberrone@unsl.edu.ar