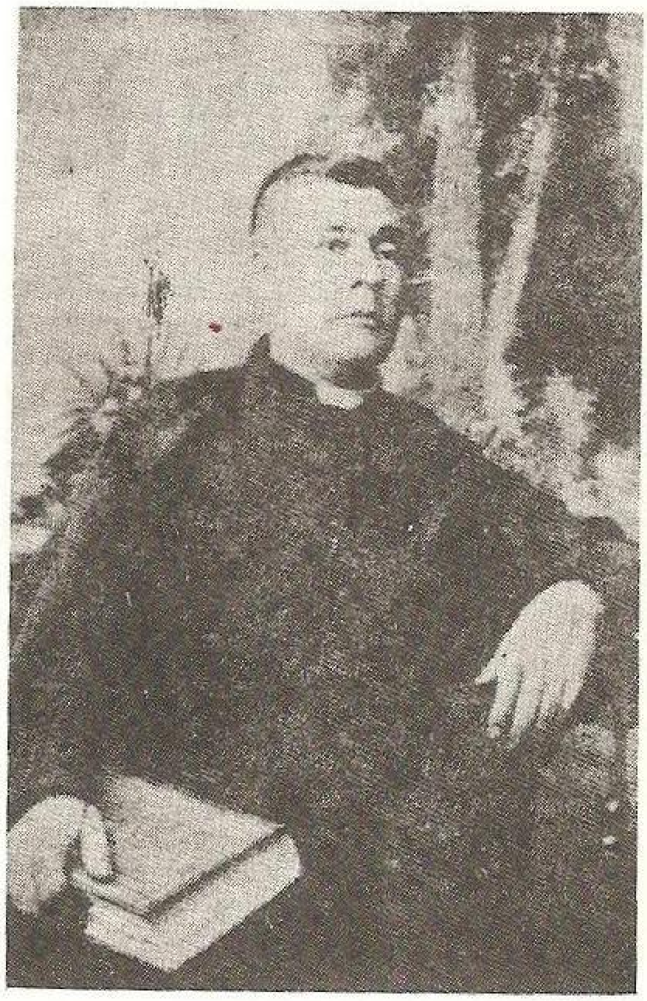


Jesús Manuel Jáuregui Moreno (1848-1905)

Vol. XVIII • No. 1 • Año 2011

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XVIII, Número 1, Año 2011
I.S.S.N. 1315–4125

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana se publica dos veces al año en forma impresa y en formato electrónico. Sus objetivos, información para los autores y direcciones postal y electrónica se encuentran en el interior de la contraportada. Desde el Volumen VI, Año 1999, el Boletín aparece reseñado en *Mathematical Reviews*, *MathScinet* y *Zentralblatt für Mathematik*.

Asociación Matemática Venezolana

La Asociación Matemática Venezolana fue legalmente fundada en 1990 como una organización civil cuya finalidad es trabajar por el desarrollo de la matemática en Venezuela. Para más información ver su portal de internet:
`http://amv.ivic.ve/` .

Asociación Matemática Venezolana

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana

Vol. XVIII • No. 1 • Año 2011

En este inicio del volumen XVIII, en la sección de artículos, presentamos los trabajos de investigación de Eusebio Ariza y Carmen Yudith Vanegas; Mohamed Akkouchi; Cirnu Mircea; Teodoro Lara y Edgar Rosales.

¿Qué libros eran usados en Venezuela en el siglo XIX para estudiar geometría? Roy Quintero y Alí Medina Machado nos ilustran al respecto al analizar la obra, "Geometría elemental", de Jesús Manuel Jáuregui Moreno, mejor conocido como el Monseñor Jáuregui.

Muchas son las preguntas que nos hacemos, hoy, cuando los administradores de la ciencia, en Venezuela, han lanzado un nuevo programa: Premio estímulo a la investigación (PEI). Con este premio el Gobierno procura promover e incentivar la investigación. A juzgar por el baremo propuesto aquellos investigadores que se dedican a las Ciencias básicas, en particular los matemáticos, quedarán excluidos o forzados a buscar vías trucadas para que su trabajo sea evaluado y reconocido. En ese contexto, el ensayo de Neptalí Romero, "La pertinencia de la matemática", y la conferencia de Rafael Sánchez sobre "La enseñanza-aprendizaje", no sólo destacan la relevancia de la matemática, en cualquier proyecto que propugne el desarrollo científico y técnico de una sociedad, sino que desmontan esa superchería de querer separar, la investigación de quienes la cultivan.

Por otro lado, refuerzan la necesidad que existe, en el país, de apoyar abiertamente la investigación en matemática con un verdadero conocimiento de la importancia de esa ciencia.

En la sección Información nacional, tenemos nuestra acostumbrada Esquina olímpica; gracias a su lectura nos enteramos, entre otras cosas, que la próxima Olimpiada internacional de matemáticas, se realizará en Amsterdan, del 12 al 24 de julio. Venezuela estará representada por los estudiantes, Diego Peña y Carlos Lamas, y los Profesores Laura Vielma y Rafael Sánchez.

También, informamos sobre la XXIV EVM-EMALCA 2011, evento a celebrarse del 4 al 10 de septiembre en la ciudad de Mérida, Venezuela; y publicamos la carta del Presidente de la AMV dirigida al Director general de investigación en ciencia y tecnología, del Ministerio del poder popular para ciencia, tecnología e industrias intermedias, solicitándole que la Matemática no sea excluida de los llamados Proyectos estratégicos ni del PEI.

Oswaldo Araujo G.

ARTÍCULOS

Teorema de extensión para funciones multi-monogénicas en álgebras parametrizadas

Eusebio Ariza y Carmen Judith Vanegas

Resumen. En este artículo se prueba un teorema de extensión tipo Hartogs para funciones multi-monogénicas con valores en el álgebra de Clifford $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$. Para lograr esto se muestra el desarrollo en series de potencias del núcleo de Cauchy en $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ y una extensión de las llamadas funciones monogénicas con parámetro. La unicidad proviene del teorema de continuación analítica.

Abstract. In this article we prove a Hartogs type extension theorem for multi-monogenic functions with values in a Clifford algebra $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$. To achieve this we show the power series expasion of the Cauchy nucleus on $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ and an extension of the so called monogenic functions with a parameter. The uniqueness comes from the continuation theorem of analitic continuation.

1 Introducción

El Teorema de Extensión de Hartogs es un resultado fundamental sobre funciones holomorfas en varias variables complejas. Considerando el polidisco $D^n(P, r)$, para $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ y $r > 0$, definido por

$$D^n(P, r) = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \; : \; |z_j - p_j| < r \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, n\} .$$

podemos dar el enunciado del Teorema de Hartogs [4] en su forma más clásica:

Teorema 1. *Sea $\Omega = D^2(0, 2) \setminus \overline{D}^2(0, 1)$ y suponga que f es una función holomorfa en Ω. Entonces existe una función holomorfa F en $D^2(0, 2)$ tal que $F|_\Omega = f$.*

2010 AMS Subject Classifications: 30G35, 32A10

Keywords: Funciones monogénicas con parámetro, funciones multi-monogénicas, teoremas de extensión, funciones real analíticas, álgebras de Clifford dependiendo de parámetros.

En 1961 Leon Ehrenpreis publicó una nueva demostración del teorema de Hartogs y una extensión del mismo, ver [3]. En su prueba él da algunas condiciones sobre una sucesión de operadores diferenciales parciales lineales de tal manera que el problema de extensión pueda ser resuelto. De esta manera extiende el teorema de Hartogs, por cuanto el operador considerado es mucho más general.

El teorema de Hartogs en su versión más conocida establece:

Teorema 2. *Sean G un dominio en $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, y K un subconjunto compacto de G tal que $G \setminus K$ es conexo. Entonces toda función holomorfa $f : G \setminus K \to \mathbb{C}$ posee una única extensión holomorfa $f^* : G \to \mathbb{C}$.*

En [9] se demuestra el Teorema 2 usando la unicidad de la continuacion analítica y soluciones para la ecuación de Cauchy-Riemann no homogénea en el plano complejo. En [8] se demuestra el resultado de Hartogs a partir de la Fórmula Integral de Cauchy y del concepto de índice de una curva con respecto a un punto. Por otro lado, en [6] y [7] se estudia un problema de extensión al estilo Hartogs para soluciones de sistemas de ecuaciones de la forma

$$L^l(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(l)}(x) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0,$$

donde $l = 1, \ldots, s, s \geq m$ y $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ es la función desconocida definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontera suficientemente suave. Los $A_{ij}^{(l)}$ son funciones real analíticas definidas en Ω. El resultado es aplicado a las soluciones del sistema de Riesz en $\mathbb{R}^3$: $div\ u = 0,\ rot\ u = 0$.

En el contexto del análisis de Clifford se tiene en [1] una demostración del teorema de Hartogs modificado para las funciones isotónicas, las cuales se definen de la siguiente manera:

Sea $\mathbb{C}_n$ el álgebra de Clifford compleja construida sobre $\mathbb{R}^n$ [2]

Definición 1. *Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}_n$ continuamente diferenciable es isotónica en un dominio Ω de $\mathbb{R}^{2n}$ si*

$$\partial_{\underline{x}_1} f + i\tilde{f}\partial_{\underline{x}_2} = \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_{x_j} f + i\tilde{f} \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_{x_{n+j}} = 0.$$

Aquí el símbolo $\tilde{}$ significa la involución principal en $\mathbb{C}_n$ definida en la base por $\tilde{e}_A = (-1)^k e_A$, $|A| = k$ y $A = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ es tal que $j_1 < \ldots < j_k$.

El teorema de extensión en este caso establece que toda función isotónica $f(\underline{x})$ en una vecindad U de $\partial\Omega$, que satisface la condición $\partial_{\underline{x}_1} f = 0$, puede ser extendida isotónicamente a todo $\overline{\Omega}$.

Sea ahora A_n el álgebra de Clifford clásica en $\mathbb{R}^n$. Para $m \leq n$, $\mathbb{R}^{m+1}$ está naturalmente incluido en A_n. Sean Ω y T dominios de $\mathbb{R}^{m+1}$ y $\mathbb{R}^{k+1}$ respectivamente con $m \leq n$ y $k \leq n$ y $\Omega \times T \subset \mathbb{R}^{m+k+2}$.

Definición 2. *Sea $f(x,t)$ una función definida en $\Omega \times T$ con valores en A_n, es decir,*

$$f(x,t) = \sum_{\alpha} f_\alpha(x,t) e_\alpha, \quad \textit{para} \ \ x \in \Omega \ \textit{y} \ t \in T,$$

donde las componentes $f_\alpha(x,t)$ son funciones reales definidas en $\Omega \times T$. Suponga que $f(x,t)$ es monogénica (a izquierda) con respecto a la variable $x \in \Omega$ para cada $t \in T$ fijo. Entonces $f(x,t)$ es (real) analítica con respecto a la variable $x \in \Omega$ para cada $t \in T$, (ver [2]). Cuando esto ocurre se dice que f es una función monogénica con parámetro.

En [5] Le Hung Son muestra la siguiente extensión para estas funciones:

Teorema 3. *Sea Σ una vecindad abierta de $\partial(\Omega \times T)$. Suponga que $f(x,t)$ es una función dada que es (real) analítica en Σ y monogénica (a izquierda) con respecto a x para cada t fijo. Entonces existe una única función $F(x,t)$ definida en $\Omega \times T$ con las mismas propiedades que f y además cumple que en la vecindad Σ, $F(x,t) = f(x,t)$.*

Usando este resultado el autor demuestra, en el mismo artículo, un teorema de extensión para las llamadas funciones multi-monogénicas, es decir, para funciones monogénicas en cada una de las variables $x^{(j)} = (x_0^{(j)}, \cdots, x_{m_j}^{(j)})$, donde $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{m_j+1}$, $\mathbb{R}^{m_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_l+1} = \mathbb{R}^M$, $1 \leq m_j \leq n$, $j = 1, \ldots, l$, $M = m_1 + \cdots + m_l + l$, $n \geq 2$. El teorema dice:

Teorema 4. *Para cada función multi-monogénica f en Σ, existe una única función multi-monogénica F en $\Omega \cup \Sigma$ tal que $F = f$ en Σ.*

En este artículo nosotros damos un teorema de extensión para funciones multi-monogénicas en el contexto de las álgebras de Clifford parametrizadas $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$. Para lograr dicha extensión, damos una representación en series de potencias del núcleo de Cauchy del análisis de Clifford parametrizado y demostramos que las funciones monogénicas con parámetro son también funciones real analíticas en el contexto de estas álgebras de Clifford más generales, lo que permite hacer una extensión de las mismas. De esta manera conseguimos una generalización del Teorema 4 en el caso de las álgebras de Clifford clásicas.

2 Álgebras de Clifford dependiendo de parámetros

Las álgebras de Clifford dependiendo de parámetros se pueden definir a través de clases de equivalencias sobre el anillo de polinomios en n variables $X_1, ..., X_n$

con coeficientes reales $\Re[X_1, ..., X_n]$, [9]. Decimos que dos polinomios P and Q son equivalentes si su diferencia puede ser reescrita como un polinomio para el cual cada sumando contiene al menos uno de los factores

$$X_j^{k_j} + \alpha_j \quad \text{y} \quad X_j X_i + X_i X_j - 2\gamma_{ij}, \tag{1}$$

donde $k_j \geq 2$ son números naturales, $i, j = 1, ..., n$ e $i \neq j$. Los parámetros α_j y $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ tienen que ser reales y pueden depender también de otras variables tal como la variable $x \in \mathbf{R}^{n+1}$.

Si los polinomios P y Q son equivalentes escribimos $P \sim Q$. Observemos que en particular es válido

$$X_j^{k_j} + \alpha_j \sim 0 \quad \text{y} \quad X_j X_i + X_i X_j - 2\gamma_{ij} \sim 0 \quad (j \neq i),$$

lo que significa en el lenguaje de las clases de equivalencia

$$X_j^{k_j} = -\alpha_j \quad \text{y} \quad X_j X_i + X_i X_j = 2\gamma_{ij} \quad (j \neq i).$$

Si los parámetros α_j y γ_{ij} no dependen de otras variables, el álgebra de Clifford generada por las relaciones de equivalencia definidas a través de los polinomios de estructura (1) se denotará por

$$A_n(k_j, \alpha_j, \gamma_{ij}) \quad \text{si} \quad n \geq 2 \quad \text{y} \quad A_1(k, \alpha) \quad \text{si} \quad n = 1. \tag{2}$$

Usando las relaciones de estructura correspondientes a estos polinomios, cada término de un polinomio en $X_1, ..., X_n$ puede ser escrito en la forma $cX_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$ donde c es una constante real y los exponentes ν_j satisfacen $0 \leq \nu_j \leq k_j - 1$.

Denotamos X_j por e_j, $X_1 X_2$ por e_{12} y así sucesivamente. Entonces el álgebra dada por (2) tiene la base $e_1^{\nu_1} e_2^{\nu_2} \cdots e_n^{\nu_n}$, $0 \leq \nu_j \leq k_j - 1$, $j = 1, ..., n$, y así tenemos

$$\dim A_n(k_j, \alpha_j, \gamma_{ij}) = k_1 \cdots k_n \quad \text{si } n \geq 2 \quad \text{y} \quad \dim A_1(k, \alpha) = k \quad \text{si } n = 1.$$

En el caso que los parámetros α_j sean todos iguales a 1 y los γ_{ij} sean todos ceros, se obtiene el álgebra de Clifford clásica.

3 Núcleo de Cauchy en $A_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$

El operador de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^{n+1}$ se define a través de $D = \sum_{j=0}^{n} e_j \partial_j$, donde denotamos las variables de $\mathbb{R}^{n+1}$ por $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y ∂_j significa la diferenciación con respecto a x_j. Su operador adjunto se define por $\overline{D} = \partial_0 - \sum_{j=1}^{n} e_j \partial_j$. De manera análoga al caso de un álgebra de Clifford clásica, una solución de la ecuacion $Du = 0$ es llamada monogénica (a la izquierda) y si satisface $uD = 0$ es llamada monogénica a la derecha. Adicionalmente tenemos que para cada función monogénica (dos veces continuamente diferenciable) obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{D}Du = \partial_0^2 u + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_j^2 u - 2\sum_{i<j} \gamma_{ij}\partial_i\partial_j u = 0. \tag{3}$$

La matriz de coeficientes de la ecuación (3) está dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\gamma_{12} & \cdots & -\gamma_{1n} \\ 0 & -\gamma_{21} & \alpha_2 & \cdots & -\gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\gamma_{n1} & -\gamma_{n2} & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Supongamos que la ecuación (3) es elíptica. Esto significa que la forma cuadrática con los coeficientes (4) es definida positiva. Por lo tanto el determinante de B es diferente de cero, lo que implica que existe la inversa B^{-1}. Como B es una matriz simétrica, entonces B^{-1} también lo es. Como la matriz B tiene la forma (4), entonces su inversa tiene la forma

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

donde $A_{ij} = A_{ji}$ (debido a que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$). Usando esos coeficientes, definimos una distancia ρ (no euclidiana) para dos puntos $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n)$ y $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ del espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\rho^2 = (x_0 - \xi_0)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j). \tag{6}$$

Usando la distancia (6), construimos la siguiente función $E(x, \xi)$:

$$E(x,\xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{1}{\rho^{n+1}} \left((x_0 - \xi_0) - \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k - \xi_k) \right), \tag{7}$$

donde ω_{n+1} es la medida de superficie de la bola unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$. Esta función recibe el nombre de *núcleo de Cauchy* del análisis de Clifford generalizado $A_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$. En [9] se prueba que esta función tiene una singularidad aislada en $x = \xi$ (en el caso elíptico) y es monogénica a izquierda y a derecha para $x \neq \xi$. Usando el kernel $E(x, \xi)$ se puede probar de manera similar al caso clásico el siguiente

Teorema 5. *(Fórmula Integral de Cauchy) [9] Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^{n+1}$ con frontera suficientemente suave y v una función continuamente diferenciable en $\bar{\Omega}$ y monogénica a izquierda en Ω con valores en $A_n(2, \alpha_j, \gamma_{ij})$. Entonces en puntos interiores de Ω, v se puede representar por*

$$c(\alpha_j, \gamma_{ij}) \cdot v(\xi) = \int_{\partial\Omega} E(x, \xi) \cdot d\sigma \cdot v. \tag{8}$$

Aquí el valor $c(\alpha_j, \gamma_{ij})$ depende continuamente de los parámetros α_j y γ_{ij} y $d\sigma = \sum_{j=0}^{n} e_j N_j d\mu$ es el elemento de medida de $\partial\Omega$ con valores en $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$, donde $N = (N_0, N_1, ..., N_n)$ es la normal unitaria exterior y $d\mu$ es el elemento de medida escalar de $\partial\Omega$.

Lema 1.

$$\rho^2 = \left[(x_0 - \xi_0) - \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k - \xi_k) \right] \cdot \left[(x_0 - \xi_0) + \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k - \xi_k) \right]$$

Demostración Para simplificar los cálculos, elegimos $\xi = (0, 0, \cdots, 0)$. Entonces el producto entre los corchetes es igual a

$$x_0 \left(x_0 - \sum_{i,k} e_i A_{ik} x_k \right) + \sum_{l,\nu} e_l A_{l\nu} x_\nu \left(x_0 - \sum_{i,k} e_i A_{ik} x_k \right). \tag{9}$$

Esto es un polinomio cuadrático en las variables $x_j,\ j = 0, 1, \ldots, n$. El coeficiente de x_0^2 es 1, mientras los términos lineales de x_0 se cancelan uno con otro. Como los coeficientes de los cuadrados de los restantes $x_j,\ j = 1, \ldots, n$. se calculan de manera similar, basta mostrar el cálculo de uno de ellos. Por ejemplo, el coeficiente de x_1^2 está dado por

$$\begin{aligned} -\sum_{l,i} e_l e_i A_{l1} A_{i1} &= -\sum_{l} e_l^2 A_{l1}^2 - \sum_{i<l} e_l e_i A_{l1} A_{i1} - \sum_{i>l} \cdots \\ &= \sum_{l} \alpha_l A_{l1}^2 - 2 \sum_{i<l} \gamma_{li} A_{i1} A_{l1} = \sum_{l} \left(\alpha_l A_{l1} - \sum_{l \neq i} \gamma_{li} A_{i1} \right) A_{l1} \end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis en la última línea es el producto escalar de la $(l + 1)$-ésima fila de (4) con la segunda columna de (5), es decir, obtenemos $\sum_l \delta_{l1} A_{l1} = A_{11}$ para el coeficiente de x_1^2.

Análogamente, para calcular los coeficientes de productos mixtos bastará con mostrar el cálculo del coeficiente de x_1x_2, el cual está dado por

$$\begin{aligned}
-\sum_{l,i} e_l e_i (A_{l1}A_{i2}+A_{l1}A_{i1}) &= \sum_{l} \alpha_l (A_{l1}A_{l2}+A_{l2}A_{l1}) - \sum_{i\neq l} \gamma_{li}(A_{l1}A_{i2}+A_{l2}A_{i1}) \\
&= \sum_l A_{l1}\left(\alpha_l A_{l2} - \sum_{l\neq i}\gamma_{li}A_{i2}\right) + \sum_l A_{l2}\left(\alpha_l A_{l1} - \sum_{l\neq i}\gamma_{li}A_{i1}\right)
\end{aligned}$$

El primer y segundo paréntesis en la línea anterior no son más que los productos escalares de la $(l+1)$-ésima fila de (4) con la tercera y segunda columna de (5) respectivamente, y por eso se sigue que $\sum_l A_{l1}\delta_{l2} + \sum_l A_{l2}\delta_{l1} = A_{21} + A_{12}$ para el coeficiente de x_1x_2.

En resumen, la expresión dada por (9) (con $\xi \neq 0$) es igual a

$$(x_0-\xi_0)^2 + \sum_{\nu,k} A_{\nu k}(x_\nu - \xi_\nu)(x_k - \xi_k) = \rho^2. \qquad \blacksquare$$

A continuación probaremos la representación en serie de potencias del núcleo de Cauchy en $A_n(2,\alpha_j,\gamma_{ij})$.

Teorema 6. *El núcleo de Cauchy generalizado $E(x,\xi)$ posee una representación en serie de potencias alrededor del origen para $\|\xi\|_\rho < \|x\|_\rho$ donde $\|\cdot\|_\rho$ es la distancia no Euclidiana ρ dada por (6).*

Demostración Sean

$$x'-\xi' = (x_0-\xi_0) + \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k-\xi_k), \quad \overline{x'-\xi'} = (x_0-\xi_0) - \sum_{i,k=1}^{n} e_i A_{ik}(x_k-\xi_k).$$

Por el lema anterior $(x'-\xi')\cdot(\overline{x'-\xi'}) = \rho^2$. Denotemos por $\|\cdot\|_\rho$ la distancia no euclidiana ρ. Así

$$E(x,\xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{\overline{x'-\xi'}}{\|x'-\xi'\|_\rho^{n+1}}.$$

Si n es impar, entonces $n+1 = 2l$ es par. Luego

$$E(x,\xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{\overline{x'-\xi'}}{\|x'-\xi'\|_\rho^2 \cdots \|x'-\xi'\|_\rho^2},$$

donde en el denominador hay l factores. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
E(x,\xi) &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot (\overline{x'-\xi'})(\overline{x'-\xi'})^{-1}(x'-\xi')^{-1}\cdots(\overline{x'-\xi'})^{-1}(x'-\xi')^{-1} \\
&= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot (x'-\xi')^{-1}\cdots(\overline{x'-\xi'})^{-1}(x'-\xi')^{-1}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Observe que podemos hablar del inverso debido a que $x'\overline{x'} = \|x'\|^2$, de manera que, para $x' \neq 0$, $x'^{-1} = \frac{\overline{x'}}{\|x'\|^2}$. Además se tiene

$$\begin{aligned}(x' - \xi')^{-1} &= \left((1 - \xi' x'^{-1})x'\right)^{-1} = x'^{-1}(1 - \xi' x'^{-1})^{-1} \\ &= x'^{-1}\left(1 + \xi' x'^{-1} + (\xi' x'^{-1})^2 + \cdots + (\xi' x'^{-1})^k + \cdots\right) \end{aligned} \tag{11}$$

la cual converge uniformemente en $\left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho < 1$, es decir, en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$. Así,

$$\begin{aligned} E(x,\xi) &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot x'^{-1}(1-\xi' x'^{-1})^{-1} \cdots \overline{x'}^{-1}(1-\overline{\xi}'\overline{x'}^{-1})^{-1}\left(x'^{-1}\right)(1-\xi' x'^{-1})^{-1} \\ &= \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot x'^{-1}\left(1 + \xi' x'^{-1} + (\xi' x'^{-1})^2 + \cdots\right) \cdots \\ &\cdots \overline{x'}^{-1}\left(1 + \overline{\xi}'\overline{x'}^{-1} + (\overline{\xi}'\overline{x'}^{-1})^2 + \cdots\right) x'^{-1}\left(1 + \xi' x'^{-1} + (\xi' x'^{-1})^2 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{12}$$

serie que converge uniformemente en $\left\|\overline{\xi}'\overline{x'}^{-1}\right\|_\rho = \left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho < 1$, es decir, en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$.

Si $n = 2l$ es par, entonces $n+1$ es impar. Luego

$$E(x,\xi) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{\overline{x' - \xi'}}{\|x'^{-1}\|_\rho \cdot \|1 - \xi' x'^{-1}\|_\rho} \frac{1}{\|x' - \xi'\|_\rho^2 \cdots \|x' - \xi'\|_\rho^2},$$

donde el producto en el denominador del segundo cociente tiene l factores. Como

$$\frac{1}{\|x' - \xi'\|_\rho^2 \cdots \|x' - \xi'\|_\rho^2}$$

posee una representación en serie de potencias que converge en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$ por lo visto en el caso anterior y

$$\frac{1}{\|1 - \xi' x'^{-1}\|_\rho} \leq 1 + \left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho + \left\|\xi' x'^{-1}\right\|_\rho^2 + \cdots$$

converge uniformemente en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$, entonces $E(x,\xi)$ también converge uniformemente en $\|\xi'\|_\rho < \|x'\|_\rho$. ■

4 Funciones multi-monogénicas

Observemos que el Teorema 6 permite mostrar, usando la Fórmula Integral de Cauchy (8) y los argumentos de convergencia uniforme usuales, que toda función monogénica en el álgebra de Clifford $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$ posee una representación en serie de potencias. Así tenemos el siguiente

Teorema 7. *Sea $f(x,t)$ una función a valores en el álgebra $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, monogénica a izquierda con respecto a $x\in\Omega$, para cada $t\in T$ fijo. Entonces $f(x,t)$ es una función real analítica con respecto a $x\in\Omega$, para cada $t\in T$ fijo.*

Sean $m\leq n$ y $k\leq n$, Ω y T dominios acotados en $\mathbb{R}^{m+1}(x)$ y $\mathbb{R}^{k+1}(t)$ respectivamente, $f(x,t)$ una función a valores en el álgebra $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, monogénica a izquierda con respecto a $x\in\Omega$ para $t\in T$ fijo y real analítica con respecto a $t\in T$ para $x\in\Omega$ fijo, entonces del teorema de continuidad analítica para funciones real analíticas se sigue el siguiente

Lema 2. *Si $f=0$ en un subconjunto abierto no vacío $\sigma\subseteq\Omega\times T$, entonces $f=0$ en todo $\Omega\times T$.*

Lema 3. *Sea Σ una vecindad abierta de $\partial(\Omega\times T)$, $f(x,t)$ una función real analítica en todas las variables $(x_0,\ldots,x_m;t_0,\ldots,t_k)$, para $(x,t)\in\Sigma$. Entonces la función $F(x,t)$ definida por*

$$c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F(x,t)=\int_{\partial\Omega}E(\xi,x)\cdot d\sigma\cdot f(\xi,t) \tag{13}$$

es una función real analítica en $(x,t)\in\Omega\times T$, donde $d\sigma$ es el elemento de medida de $\partial\Omega$ con valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$ y $c(\alpha_i,\gamma_{ij})$ es la constante dada en (8).

Demostración Es claro que $F(x,t)$ está definida en todo $(x,t)\in\Omega\times T$. Sea $(a,b)\in\Omega\times T$. Debemos mostrar que F puede ser escrita como una suma en serie de potencias que converge normalmente en una vecindad de (a,b). Sea $\xi^o\in\partial\Omega$. Como $(\xi^o,b)\in\Sigma$ se tiene que $f(\xi,t)$ está definida y es real analítica en una vecindad de (ξ^o,b). Por lo tanto existen números positivos ρ_o y ρ_b tales que

$$f(\xi,t)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}c_{\mu,\nu}(\xi-\xi^o)^{\mu}(t-b)^{\nu}$$

para $\xi\in B_m(\xi^o,\rho_o)$ y $t\in B_k(b,\rho_b)$, donde $B_m(\xi^o,\rho_o)$ y $B_k(b,\rho_b)$ son bolas en $\mathbb{R}^{m+1}$ y $\mathbb{R}^{k+1}$, respectivamente, $(\xi-\xi^o)^{\mu}=(\xi_0-\xi^o_0)^{\mu_0}(\xi_1-\xi^o_1)^{\mu_1}\cdots(\xi_m-\xi^o_m)^{\mu_m}$, $(t-b)^{\nu}=(t_0-b_0)^{\nu_0}(t_1-b_1)^{\nu_1}\cdots(t_m-b_m)^{\nu_m}$ y $c_{\mu,\nu}$ son constantes en el álgebra $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$. La serie converge normalmente en $\mathring{B}_m(\xi^o,\rho_o)\times\mathring{B}_k(b,\rho_b)$, donde $\mathring{B}_m(\xi^o,\rho_o)$ y $\mathring{B}_k(b,\rho_b)$ denotan el interior de $B_m(\xi^o,\rho_o)$ y $B_k(b,\rho_b)$ respectivamente (son las bolas abiertas). Además $B_m(\xi^o,\rho_o)\times B_k(b,\rho_b)\subset\Sigma$.

Sea ahora $\sigma_{\xi^o}=\mathring{B}_m(\xi^o,\rho_o)\cap(\partial\Omega)$ entonces el sistema $\partial=\{\sigma_{\xi^o}\ :\ \xi^o\in\partial\Omega\}$ es un cubrimiento abierto de $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ es compacta, existe un subcubrimiento finito de estos abiertos que denotaremos por $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p\}$.

Consideremos los conjuntos $\Gamma_1=\sigma_1,\ \Gamma_2=\sigma_2\setminus\Gamma_1,\ldots,\Gamma_p=\sigma_p\setminus(\Gamma_1\cup\ldots\cup\Gamma_{p-1})$. Luego $\partial\Omega=\bigcup_{j=1}^{p}\Gamma_j$ y $\Gamma_i\cap\Gamma_j=\emptyset$ si $i\neq j$. De aquí que podamos escribir

$$c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F(x,t)=\sum_{q=1}^{p}F_q(x,t),\quad \text{con}\quad F_q(x,t)=\int_{\Gamma_q}E(\xi,x)d\sigma f(\xi,t).$$

Por lo tanto basta con dar una representación en serie de potencias para estas F_q. Por definición vemos que, si $\xi\in\Gamma_q$, entonces $\xi\in B_m(\xi^q,\rho_q)$, donde $\xi^q\in\partial\Omega$ y $\rho_q>0$. Para estos ξ tenemos que

$$f(\xi,t)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}c_{\mu,\nu}^{(q)}(\xi-\xi^q)^{\mu}(t-b)^{\nu}$$

y esta serie converge normalmente en $B_m(\xi^q,\rho_q)\times\overset{\circ}{B}_k(b,\rho_b)$. Por otro lado, si x está suficientemente cerca de a tenemos

$$E(\xi,x)=\sum_{\beta=0}^{\infty}d_\beta(x-a)^\beta$$

donde $\beta=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_m)$, $(x-a)^\beta=(x_0-a_0)^{\beta_0}(x_1-a_1)^{\beta_1}\cdots(x_m-a_m)^{\beta_m}$, d_β son constantes del álgebra y la serie converge normalmente. De estas representaciones se sigue que

$$F_q(x,t)=\sum_{\beta,\nu=0}^{\infty}C_{\beta,\nu}^{(q)}(x-a)^\beta(t-b)^\nu$$

convergiendo normalmente en una vecindad suficientemente pequeña de (a,b).

Como $c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F$ es suma de las F_q, la propia $c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F$ puede ser representada como una serie de potencias que converge normalmente en una vecindad suficientemente pequeña de (a,b). Como $(a,b)\in\Omega\times T$ fue tomado de forma arbitraria, el resultado se sigue en todo $\Omega\times T$. ■

A continuación probaremos con la ayuda de los dos lemas anteriores un teorema de extensión para funciones monogénicas con parámetro y valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$.

Teorema 8. *Considere $m\le n$, $k\le n$ y Ω, T dominios acotados en $\mathbb{R}^{m+1}(x)$ y $\mathbb{R}^{k+1}(t)$ respectivamente. Suponga que Σ es una vecindad abierta de $\partial(\Omega\times T)$. Suponga también que $f(x,t)$ es una función con valores en $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, real analítica en Σ y monogénica a izquierda en la variable x, para cada t fijo. Entonces existe una única función $G(x,t)$ definida en $\Omega\times T$ con las mismas propiedades que f y que además satisface $G(x,t)=f(x,t)$ en Σ.*

Demostración Sea $F(x,t)$ definida por la fórmula (13), donde $f(x,t)$ es la función dada. Por el Lema 3, $c(\alpha_i,\gamma_{ij})\cdot F(x,t)$ está definida y es real analítica en $(x,t) \in \Omega \times T$. Además, por definición F es monogénica con respecto a $x \in \Omega$, para $t \in T$ fijo. Cuando t está suficientemente cerca de ∂T y $x \in \partial\Omega$ se tiene que $(x,t) \in \Sigma$ y la parte derecha de la ecuación (13) es la Fórmula Integral de Cauchy para $f(x,t)$. Con lo cual $c(\alpha_i,\gamma_{ij}) \cdot F(x,t) = f(x,t)$ para tales t. Por el teorema identidad para funciones real analíticas, se tiene que $c(\alpha_i,\gamma_{ij}) \cdot F(x,t) = f(x,t)$ en Σ. Luego, $G(x,t) = c(\alpha_i,\gamma_{ij}) \cdot F(x,t)$ es la extensión de $f(x,t)$ buscada. Por el Lema 2 se sigue que tal extensión es única. ■

Sea Ω el conjunto dado por $\mathbb{R}^{m_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_l+1} = \mathbb{R}^M$, donde $1 \leq m_j \leq n$ con $j = 1, \ldots, l$ y $M = m_1 + \cdots + m_l + l$. Al igual que antes, consideremos funciones f definidas en Ω y tomando valores en el álgebra de Clifford $A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$, es decir, $f(x^{(1)}, \cdots, x^{(l)}) = \sum_\alpha f_\alpha(x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}) e_\alpha$, donde $x^{(j)} = (x_0^{(j)}, \ldots, x_{m_j}^{(j)}) \in \mathbb{R}^{m_j+1}$ para $j = 1, \ldots, l$.

Definición 3. *Diremos que $f : \Omega \to A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij})$ es multi-monogénica en Ω si y sólo si $f \in C^1(\Omega; A_n(2,\alpha_i,\gamma_{ij}))$ y satisface el sistema $D_{x^{(j)}} f = \sum_{i=0}^{m_j} e_i \partial_i f = 0$.*

Sea f una función multi-monogénica en Ω y

$$B(a,r) = B_1(a^{(1)}, r_1) \times \ldots \times B_l(a^{(l)}, r_l),$$

donde $B_j(a^{(j)}, r_j)$ es una bola en $\mathbb{R}^{m_j+1}$ con centro en $a^{(j)} = (a_0^{(j)}, \ldots, a_{m_j}^{(j)})$ y radio $r_j > 0$. Suponga que $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$. Sea $(x^{(1)}, \cdots, x^{(l)}) \in \mathring{B}(a,r)$ y consideremos a f como una función de la variable $x^{(1)}$ solamente, manteniendo fijas las variables restantes. Entonces f es una función monogénica a izquierda y por lo tanto podemos usar la Fórmula Integral de Cauchy (8), obteniendo así

$$c(\alpha_j,\gamma_{ij}) f(x^{(1)}, \cdots, x^{(l)}) = \int_{\partial B_1} E(\xi^{(1)}, x^{(1)}) \cdot d\sigma(\xi^{(1)}) \cdot f(\xi^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}). \tag{14}$$

Un razonamiento análogo nos lleva a la expresión

$$c(\alpha_j,\gamma_{ij}) f(\xi^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}) = \int_{\partial B_2} E(\xi^{(2)}, x^{(2)}) \cdot d\sigma(\xi^{(2)}) \cdot f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, x^{(3)}, \cdots, x^{(l)}) \tag{15}$$

al considerar $f(\xi^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)})$ como función de la variable $x^{(2)}$ solamente, manteniendo las demás fijas. Sustituyendo ahora (15) en (14) obtenemos

$$\begin{aligned} &(c(\alpha_j,\gamma_{ij}))^2 f(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}) \\ = &\int_{\partial B_1 \times \partial B_2} E(\xi^{(1)}, x^{(1)}) \cdot d\sigma(\xi^{(1)}) E(\xi^{(2)}, x^{(2)}) \cdot d\sigma(\xi^{(2)}) \cdot f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, x^{(l)}). \end{aligned} \tag{16}$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos la Fórmula Integral de Cauchy para funciones multi-monogénicas en el álgebra $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$:

$$\begin{aligned}&(c(\alpha_j, \gamma_{ij}))^l f(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}) \\ &= \int_{\partial_0 B} E(\xi^{(1)}, x^{(1)}) \cdot d\sigma(\xi^{(1)}) \cdots E(\xi^{(l)}, x^{(l)}) \cdot d\sigma(\xi^{(l)}) \cdot f(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(l)}),\end{aligned} \tag{17}$$

donde $\partial_0 B = \partial B_1 \times \cdots \times \partial B_l$ y los $d\sigma(\xi^{(j)})$ están definidos como antes.

En lo que sigue sean $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_l \subset \mathbb{R}^M$ un policilindro, donde Ω_j son dominios en $\mathbb{R}^{m_j+1}(x^{(j)})$ para $j = 1, \ldots, l$, y Σ una vecindad abierta de $\partial\Omega$.

Teorema 9. *Para toda función multi-monogénica f en Σ con valores en $A_n(2, \alpha_i, \gamma_{ij})$, existe una única función multi-monogénica G en $\Omega \cup \Sigma$ tal que $G = f$ en Σ.*

Demostración Consideremos a f como una función monogénica con respecto a la variable $x^{(1)} \in \Omega_1$ y dependiendo de $t = (x^{(2)}, \cdots, x^{(l)})$ como parámetro, entonces del Teorema 8 se sigue que existe una función $G(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)})$ definida en $\Omega \cup \Sigma$, monogénica con respecto a $x^{(1)}$, real analítica con respecto a todas las variables en Ω y $G = f$ en Σ. Para $j = 2, \ldots, l$ sea

$$G_j(x^{(1)}, \cdots, x^{(j)}, \cdots, x^{(l)}) \;=\; D_{x^{(j)}} G.$$

Entonces G_j es real analítica con respecto a $x^{(j)}$ en Ω_j, fijando las otras variables. Si $x^{(j)}$ está suficientemente cerca de $\partial\Omega_j$ entonces

$$x = (x^{(1)}, \cdots, x^{(j)}, \cdots, x^{(l)}) \in \Sigma.$$

De aquí que $G = f$, es decir, $G_j = D_{x^{(j)}} f = 0$ en Σ. Por el teorema identidad para funciones real analíticas se tiene que $G_j = D_{x^{(j)}} G = 0$, $\forall x^{(j)} \in \Omega_j$. De manera que G es multi-monogénica en Ω y es la extensión requerida para f. La unicidad de dicha extensión se sigue del Lema 2. ■

Referencias

[1] Abreu Blaya, R. & Bory Reyes, J. (2008). Hartogs Extension Theorem for Functions with Values in Complex Clifford Algebras. *AACA*.V.18, 147-151.

[2] Brackx, F. Delanghe, R. & Sommen, F. (1982). *Clifford Analysis.* London. Research Notes in Mathematics 76, Pitman Books Ltd.

[3] Ehrenpreis, L. (1961). A new proof and an extension of Hartog's theorem. *Bull. Am. Math. Soc.* V. 67, 507-509.

[4] Hartogs, F. (1906). Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten, *Math. Ann.* 62, 1-88.

[5] Hung Son, L. (1990). Monogenic Functions with parameter in Clifford Analysis. *International Centre for Theoretical Physics*. IC/90/25.

[6] Hung Son, L. (1990). An Extension Problem for Solutions of Partial Differential Equations in $\mathbb{R}^n$. *CV*. V. 15, 87-92.

[7] Hung Son, L. (1990). Matrix Criterions for the Extension of Solutions of a General Linear System of Partial Differential Equatios. *CV*. V. 15, 75-85.

[8] Sobieszek, T. (2003). On the Hartogs extension theorem. *Annales Polonici Mathematici*. V. 80, 219-222.

[9] Tutschke, W. & Vanegas, C. (2008). *Métodos del análisis complejo en dimensiones superiores*. Ediciones IVIC, Caracas.

Eusebio Ariza, Carmen Judith Vanegas
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas,
Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.

e-mail: euariza@gmail.com, cvanegas@usb.ve

A remark on the ϕ-norms

Akkouchi Mohamed

Abstract. We introduce the concept of ϕ-norm on (complex or real) linear spaces for a class of functions ϕ which are J-convex, nondecreasing and having a fixed point on the set of nonnegative real numbers. The q-norms introduced by H. Belbachir, M. Mirzavaziri and M. S. Moslehian, (see A.J.M.A.A., Vol. 3, No. 1, Art. 2, (2006)) are particular cases of ϕ-norms. We establish that every ϕ-norm is a norm in the usual sense, and that the converse is true as well.

Resumen. Introducimos el concepto de ϕ-norma sobre espacios lineales (complejos o reales) para una clase de funciones ϕ que es J-convexa, no decreciente y con un punto fijo en el conjunto de los números reales no negativos. Las q-normas introducidas por H. Belbachir, Mirzavaziri M. y Moslehian MS, (ver AJMAA, vol. 3, No. 1, del art. 2 (2006)) son casos particulares de ϕ-normas. Probamos que cada ϕ-norma es una norma en el sentido usual, y que el converso también es cierto.

1 Introduction

In [3], S. Saitoh noticed that in any arbitrary linear space E, the so-called parallelogram inequality $\|x+y\|^2 \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, for vectors x, y in E, may be more suitable than the usual triangle inequality. He considered this inequality in the setting of a natural sum Hilbert space for two arbitrary Hilbert spaces.

It is easy to see that any arbitrary norm $\|.\|$ on E satisfies the parallelogram inequality.

The reader is referred to [2] for undefined terms and notations.

In [1], the authors have introduced an extension of the triangle inequality by using the concept of a q-norm.

Definition 1.1. *Let $\mathcal{X}$ be a real or complex linear space and $q \in [1, \infty)$. A mapping $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to [0, \infty)$ is called a q-norm on $\mathcal{X}$ if it satisfies the following conditions:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *for all* $x \in \mathcal{X}$ *and all scalar* λ,
3. $\|x+y\|^q \le 2^{q-1}\left(\|x\|^q + \|y\|^q\right)$ *for all* $x, y \in \mathcal{X}$.

In [1], the following result was proved.

Theorem 1.1. *Every* q*-norm is a norm in the usual sense.*

The purpose of this paper is to extend the result above by using the notion of a ϕ-norm which is more general than the notion of a q-norm.

2 Definitions and preliminaries

Let Φ be the set of functions $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ which are not identically zero and satisfying the following properties:

(ϕ_1) ϕ is non-decreasing on $[0, +\infty)$.

(ϕ_2) $\phi\left(\dfrac{s+t}{2}\right) \le \dfrac{\phi(s)+\phi(t)}{2}$, for all $s, t \in [0, +\infty)$.

(ϕ_3) There exists a positive number $r > 0$ such that $\phi(r) = r$.

Example 1. For each $q > 1$, the function $\phi_q(t) = t^q$ satisfies the properties (ϕ_1), (ϕ_2) and (ϕ_3) with $r = 1$.

Example 2. Consider $\phi(t) = \exp(t-1)$. Then ϕ satisfies the properties (ϕ_1), (ϕ_2) and (ϕ_3) with $r = 1$.

Definition 2.1. *Let* $\mathcal{X}$ *be a real or complex linear space and* $\phi \in \Phi$. *A mapping* $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to [0, \infty)$ *is called a* ϕ*-norm on* $\mathcal{X}$ *if it satisfies the following conditions:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *for all* $x \in \mathcal{X}$ *and all scalar* λ,
3. $\phi\left(\dfrac{\|x+y\|}{2}\right) \le \dfrac{\phi(\|x\|)+\phi(\|y\|)}{2}$, *for all* $x, y \in \mathcal{X}$.

When ϕ is continuous, We observe that the property (3) above is equivalent to say that the function $x \longrightarrow \phi(\|x\|)$ is convex on $\mathcal{X}$.

Remark 1. For evey number $q > 1$, a mapping $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to [0, \infty)$ is a q-norm on $\mathcal{X}$ if and only if $\|\cdot\|$ is a ϕ_q-norm, where $\phi_q(t) = t^q$.

We have the following result.

Proposition 2.1. *Every norm in the usual sense is a* ϕ*-norm for every* $\phi \in \Phi$.

Proof. Let $x, y \in \mathcal{X}$. Since $\|.\|$ is a norm, then we have

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Since ϕ is non-decreasing and convex on $[0,\infty)$, it follows that

$$\phi\left(\frac{\|x+y\|}{2}\right) \le \phi\left(\frac{\|x\|+\|y\|}{2}\right) \le \frac{\phi(\|x\|)+\phi(\|y\|)}{2}.$$

So, $\|.\|$ is a ϕ-norm.

The following lemma will be used in the proof of the main result of this note.

Lemma 2.1. *Let $\mathcal{X}$ be a real or complex linear space. Let $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ be a mapping satisfying (1) and (2) in the definition of a ϕ-norm. Then the following assertions are equivalent:*
(i) $\|\cdot\|$ is a norm.
(ii) The set $B_r = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \le r\}$ is convex, for any arbitrary number $r > 0$.
(iii) The set $B_1 = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \le 1\}$ is convex.
(iv) There exists a positive number $r > 0$ such that the set $B_r = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \le r\}$ is convex.

Proof. The implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) are obvious. It remains to show the implication (iv) $\Rightarrow$ (i). Let $r > 0$ be such that the set B_r is convex. Let $x, y \in \mathcal{X}$. We can suppose that $x \ne 0$ and $y \ne 0$. We put $x' = r\frac{x}{\|x\|}$ and $y' = r\frac{y}{\|y\|}$. We have $x', y' \in B_r$. By assumption, we know that $\lambda x' + (1-\lambda)\, y' \in B_r$ for all $0 \le \lambda \le 1$. In particular, for $\lambda = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$ we obtain

$$\left\| \frac{rx}{\|x\|+\|y\|} + \frac{ry}{\|x\|+\|y\|} \right\| = \|\lambda x' + (1-\lambda)\, y'\| \le r.$$

So that $r\|x+y\| \le r[\|x\|+\|y\|]$, which implies that $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$. So $\|.\|$ is a norm on $\mathcal{X}$. This ends the proof.

3 The result

Now we are ready to state and prove the main result of this note.

Theorem 3.1. *Let $\mathcal{X}$ be a real or complex linear space. Let $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to [0,\infty)$ be a mapping satisfying the following conditions:*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ *for all $x \in \mathcal{X}$ and all scalar λ.*

Then the following assertions are equivalent:
(i) $\|\cdot\|$ is a norm (in the usual sense on $\mathcal{X}$).
(ii) $\|\cdot\|$ is a ϕ-norm on $\mathcal{X}$ for every $\phi \in \Phi$.
(iii) There exists a $\phi \in \Phi$ such that $\|\cdot\|$ is a ϕ-norm on $\mathcal{X}$.

Proof. The implication (i) $\Rightarrow$ (ii) is Proposition 2.1. The implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) is evident. We have to prove the implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Suppose that $\|\cdot\|$ is a ϕ-norm on $\mathcal{X}$ for some $\phi \in \Phi$. By Property (ϕ_3), there exists a positive number $r > 0$ such that $\phi(r) = r$. By Lemma 2.1, it is sufficient to prove that the set $B_r = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq r\}$ is convex.

Let $x, y \in B_r$. Then, by the properties (ϕ_1), (ϕ_2) and (ϕ_3) of ϕ, we have

$$\phi\left(\frac{\|x+y\|}{2}\right) \leq \frac{\phi(\|x\|) + \phi(\|y\|)}{2} \leq \frac{\phi(r) + \phi(r)}{2} = \phi(r) = r.$$

So $\frac{1}{2}x + \left(1 - \frac{1}{2}\right) y \in B_r$. Thus if $D = \left\{\frac{k}{2^n} \mid n = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots, 2^n\right\}$, then for each $\lambda \in D$ we have $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in B_r$.

Let $0 \leq \lambda \leq 1$ and $z = \lambda x + (1-\lambda)\, y$. We can suppose that $0 < \lambda < 1$. Since D is dense in $[0,1]$, there exists a sequence $\{\rho_n\}$ of points of D satisfying $\rho_n \geq \lambda$, for every nonnegative integer n, such that $\lim_n \rho_n = \lambda$. We put $\beta_n = \frac{1-\rho_n}{1-\lambda}$. Obviously, we have $0 \leq \beta_n \leq 1$ and $\lim_n \beta_n = 1$. For every nonnegative integer n, we observe that

$$0 \leq \frac{\lambda}{\rho_n}\beta_n \leq \beta_n \leq 1.$$

Therefore $\frac{\lambda}{\rho_n}\beta_n x \in B_r$. Since $\rho_n \in D$ we conclude that

$$\beta_n z = \lambda\beta_n\, x + (1-\lambda)\,\beta_n y = \rho_n\,\frac{\lambda}{\rho_n}\beta_n\, x + (1-\rho_n)\, y \in B_r.$$

Thus $\beta_n\|z\| = \|\beta_n z\| \leq r$ for all n. By letting n tend to infinity, we get $\|z\| \leq r$, i.e. $z \in B_r$.

Acknowledgement. I thank very much the anonymous referee for his (or her) helpful comments.

References

[1] H. Belbachir, M. Mirzavaziri and M. S. Moslehian, *q-norms are really norms*, A.J.M.A.A., Vol. 3, No. 1, Art. 2, (2006) pp. 1-3.

[2] W. B. Johnson (ed.) and J. Lindenstrauss (ed.), Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.

[3] S. Saitoh, *Generalizations of the triangle inequality*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 4 (2003), No. 3, Article 62, 5 pp.

Akkouchi Mohamed
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences-Semlalia.
Université Cadi Ayyad, B.P. 2390. Av. du prince My. Abdellah.
Marrakech, Maroc (Morocco).

e-mail: akkouchimo@yahoo.fr

Determinantal formulas for sum of generalized arithmetic-geometric series

Mircea I Cîrnu

Abstract. The main purpose of this paper is to give some closed form expressions by determinants for the sum of generalized arithmetic-geometric series. This will be done by solving the recurrence relation with combinatorial auto-convolution, satisfied by these sums. In a particular case, such a recurrence relation was obtained by L. Boulton and M. H. Rosas in this Boletin, [1]. Other recurrence relations of this type was solved by the author in [2] and [4], and was applied to study a new kind of equations - the differential recurrence equations with auto-convolution, both linear and combinatorial. The Catalan numbers also verify a recurrence relation with linear auto-convolution. See [5] or [7].
Applications to usual arithmetic-geometric series, sequences of considered sums that are natural numbers, Fubini's numbers, Eulerian numbers and polynomials and some examples of Z-transforms are given. Another closed form expressions for the sum of generalized arithmetic- geometric series was given by R. Stalley, [10], using the properties of Stirling's numbers of second kind. A direct and elementary proof for this result was given by the author in [3]

Resumen. El objectivo principal de este trabajo es dar algunas expresiones de la forma cerrada para los factores determinantes de la suma de la serie aritmética-geométrica generalizada. Esto se hará mediante la resolución de la relación de recurrencia con la auto–convolución combinatórica, que satisfacen estas sumas. En un caso particular, una relación de recurrencia similar fue obtenida por L. Boulton y M. H. Rosas en este Boletín, [1]. Otras relaciones de recurrencia de este tipo fueron resueltas por el autor en [2] y [4], y fueron utilizadas para estudiar un nuevo tipo de ecuaciones - las ecuaciones diferenciales de recurrencia con auto–convolución, tanto lineales como combinatóricas. Los números de Catalán también satisfacen una relación de recurrencia con auto–convolución lineal. Ver [5] o [7]. Se dan aplicaciones de la serie aritmética-geométrica usual, suceciones de estas sumas que son números naturales, números de Fubini, números y polinomios de Euler y algunos ejemplos de la Transformada Z. Otra expresión de la forma cerrada para la suma de la serie aritmética-geométrica generalizada fue dada por R. Stalley [10], utilizando las propiedades de los números de Stirling de segunda clase. Una prueba directa y elemental de este resultado fue dada por el autor en [3].

1 Introduction

We consider the sum of the generalized arithmetic-geometric series

$$S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} j^n z^j,\ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ n = 0, 1, 2, \dots . \tag{1}$$

It is also the generating function of the numerical sequence $(j^n,\ j = 1, 2, \dots)$. For $n = 0$, it reduces to the sum of geometric progression

$$S_0(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j = \frac{z}{1-z} . \tag{2}$$

which first appeared, for $z = \frac{1}{2}$, around 1650 BC in the Rhind papyrus, as a problem on areas of lots obtained by dividing a rectangular field in two equal parts, then one of these again in two equal parts, and so on. See [1]. Usual, the sum (1) can be calculated by successive derivation of the uniform convergent serie (2), for $|z| \le r < 1$, and by multiplication with z. A closed form expression for these sums using this procedure and the properties of the Stirling numbers of second kind was given by R. Stalley, [10]. Another proof, based on Cauchy-Mertens theorem was given by author in [3]. In this paper will be presented another two closed form expressions for the sum of generalized arithmetic-geometric series, based on determinants.

2 Discrete linear and combinatorial convolutions

Being given the sequences $a = (a_n)$, $b = (b_n)$, and $c = (c_n)$, where $n = 0, 1, 2, \dots$, we say that c is *linear*, respectively *combinatorial convolution* of a and b, and we denote $c = a \star b$, respectively $c = a \star_C b$, if $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, respectively $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$, for $n = 0, 1, 2, \dots$. If $\widetilde{a} = \left(\dfrac{a_n}{n!}\right)$, $\widetilde{b} = \left(\dfrac{b_n}{n!}\right)$ and

$\widetilde{c} = \left(\frac{c_n}{n!}\right)$, we have $c = a \star_C b$ if and only if $\widetilde{c} = \widetilde{a} \star \widetilde{b}$. If $c = a \star b$, then $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. If the series factors are absolutely convergent, then their product is also absolutely convergent (Cauchy). If one series factor is absolutely convergent and the other convergent, then their product is convergent (Mertens, [6]). See also [8].

3 A recurrence relation with combinatorial auto-convolution

Theorem 1. *For $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, the sums $S_n(z)$ satisfy the recurrence relation with combinatorial auto-convolution*

$$S_{n+1}(z) = S_n(z) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k(z) S_{n-k}(z), \ n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{3}$$

Proof . Performing the change of index $q = j - i$ and using Newton's binomial theorem, we have

$$S_{n+1}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{n+1} z^j = \sum_{j=1}^{\infty} j^n z^j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} j^n z^j = S_n(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (i+q)^n z^{i+q} =$$

$$= S_n(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k q^{n-k} z^i z^q = S_n(z) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=1}^{\infty} i^k z^i \sum_{q=1}^{\infty} q^{n-k} z^q =$$

$$= S_n(z) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k(z) S_{n-k}(z).$$

■

Remark. Theorem 1 was given for $z = \frac{1}{2}$ in [1].

Examples. Using formulas (2) and (3), for $z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1$, we obtain

$$S_1(z) = S_0(z) + S_0^2(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \ , \tag{4}$$

$$S_2(z) = S_1(z) + 2S_0(z)S_1(z) = \frac{z^2 + z}{(1-z)^3} \ ,$$

$$S_3(z) = S_2(z) + 2S_0(z)S_2(z) + S_1^2(z) = \frac{z^3 + 4z^2 + z}{(1-z)^4} \ .$$

Corollary 1. *For $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$, the numbers*

$$x_n(z) = \frac{1}{n!} S_n(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

satisfy the recurrence relation with linear auto-convolution

$$(n+1)x_{n+1}(z) = x_n(z) + \sum_{k=0}^{n} x_k(z) x_{n-k}(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

and the initial condition

$$x_0(z) = \frac{z}{1-z}\ . \tag{7}$$

Proof . Substituting (5) in (3) and multiplying with $\frac{1}{n!}$ it results (6). From(5) and (2) results (7). ■

4 The exponential generating function

For $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$, we denote

$$G(z,p) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(z) p^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n(z) p^n,\ \forall p \in \mathbb{C},\ |p| < 1, \tag{8}$$

the *generating function* of the sequence $x_n(z)$, that is also the *exponential generating function* of the sequence $S_n(z)$.

Theorem 2. *The exponential generating function $G(z,p)$ of the sequence $S_n(z),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ is given by formula*

$$G(z,p) = \frac{ze^p}{1-ze^p},\ \forall z, p \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ |p| < 1. \tag{9}$$

Proof . Multiplying relation (6) with p^n, and summing for $n = 0, 1, 2, \ldots$, we obtain

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x_{n+1}(z) p^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(z) p^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k(z) x_{n-k}(z) p^n\ . \tag{10}$$

In conformity with Cauchy-Mertens theorem about the multiplication of power series, the relation (10) reduces to differential equation

$$\frac{d}{dp} G(z,p) = G(z,p) + G^2(z,p)\ . \tag{11}$$

Putting the equation (11) in the form

$$\frac{1}{G(z,p)}\frac{dG(z,p)}{dp}-\frac{1}{G(z,p)+1}\frac{dG(z,p)}{dp}=1$$

and integrating, it results $\dfrac{G(z,p)}{G(z,p)+1}=e^{p+C}$, so

$$G(z,p)=\frac{e^{p+C}}{1-e^{p+C}}\ , \tag{12}$$

were $C\in\mathbb{C}$ is an arbitrary constant. From (7), (8) and (12), the last two relations for $p=0$, it results

$$G(z,0)=x_0(z)=\frac{z}{1-z}=\frac{e^C}{1-e^C}\ ,$$

hence

$$e^C=z. \tag{13}$$

From (12) and (13) we obtain (9). ∎

5 Linear recurrence relation

Theorem 3. *For $z\in\mathbb{C},\ |z|<1$, the sequence $S_n(z)$ satisfies the linear recurrence relation with variable coefficients*

$$S_n(z)=\frac{z}{1-z}\left[1+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}S_k(z)\right],\ n=1,2,\dots\ . \tag{14}$$

Proof . From (9) results $G(z,p)\left(\dfrac{1}{z}-e^p\right)=e^p$. According with (8), this relation becomes

$$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_n(z)p^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_n(z)p^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^n,\ \forall p\in\mathbb{C},\ |p|<1.$$

Using again Cauchy-Mertens theorem about the multiplication of power series, the last relation takes the form

$$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}S_n(z)p^n-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}S_k(z)p^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}p^n,\ \forall p\in\mathbb{C},\ |p|<1. \tag{15}$$

Identifying in (15) the coefficients of p^n, it results

$$\frac{1}{z}\frac{1}{n!}S_n(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}S_k(z)=\frac{1}{n!},\ n=0,1,2,\dots\ . \tag{16}$$

Multiplying (16) with $n!$, we obtain the relation

$$\frac{1-z}{z}S_n(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}S_k(z)=1,\ n=1,2,\dots, \tag{17}$$

from which it results (14). ∎

Examples. Using formulas (2) and (14), for $z\in\mathbb{C},\ |z|<1$, we obtain

$$S_1(z)=\frac{z}{1-z}\big[1+S_0(z)\big]=\frac{z}{(1-z)^2},$$
$$S_2(z)=\frac{z}{1-z}\big[1+S_0(z)+2S_1(z)\big]=\frac{z(z+1)}{(1-z)^3},$$
$$S_3(z)=\frac{z}{1-z}\big[1+S_0(z)+3S_1(z)+3S_2(z)\big]=\frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^4}.$$

6 First determinantal formula for the sum of generalized arithmetic-geometric series

Theorem 4. *For $z\in\mathbb{C},\ |z|<1$, the sums $S_n(z)$, $n=2,3,...$, are given by formula*

$$S_n(z)=\frac{n!z^n}{(1-z)^{n+1}}\begin{vmatrix}\frac{1-z}{z} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1\\ -1 & \frac{1-z}{z} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2!}\\ . & . & \dots & . & . & .\\ -\frac{1}{(n-2)!} & -\frac{1}{(n-3)!} & \dots & -1 & \frac{1-z}{z} & \frac{1}{(n-1)!}\\ -\frac{1}{(n-1)!} & -\frac{1}{(n-2)!} & \dots & -\frac{1}{2!} & -1 & \frac{1}{n!}\end{vmatrix}. \tag{18}$$

Proof . From (5) and (16) results relation

$$\frac{1-z}{z}x_n(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)!}x_k(z)=\frac{1}{n!},\ \ n=1,2,...\cdot \tag{19}$$

For n given, the relation (7) and first n relations (19) form the linear algebraic system

$$\frac{1-z}{z}x_0(z)=1\ ,$$
$$-x_0(z)+\frac{1-z}{z}x_1(z)=1\ ,$$
$$-\frac{1}{2!}x_0(z)-x_1(z)+\frac{1-z}{z}x_2(z)=\frac{1}{2!}\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{1}{n-1!}x_0(z)-\frac{1}{(n-2)!}x_1(z)-\ldots-x_{n-2}(z)+\frac{1-z}{z}x_{n-1}(z)=\frac{1}{(n-1)!}\ ,$$
$$-\frac{1}{n!}x_0(z)-\frac{1}{(n-1)!}x_1(z)-\ldots-\frac{1}{2!}x_{n-2}(z)-x_{n-1}(z)+\frac{1-z}{z}x_n(z)=\frac{1}{n!}\ .$$

Using Cramer's rule, we obtain following expression for the last unknown of the above system

$$x_n(z)=\frac{z^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}\begin{vmatrix} \frac{1-z}{z} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1-z}{z} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2!} & -1 & \frac{1-z}{z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ \frac{-1}{(n-1)!} & \frac{-1}{(n-2)!} & \frac{-1}{(n-3)!} & \cdots & -1 & \frac{1-z}{z} & \frac{1}{(n-1)!} \\ \frac{-1}{n!} & \frac{-1}{(n-1)!} & \frac{-1}{(n-2)!} & \cdots & -\frac{1}{2!} & -1 & \frac{1}{n!} \end{vmatrix}.$$

Adding the last column to first, it results

$$x_n(z)=\frac{z^{n+1}}{(1-z)^{n+1}}\begin{vmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1-z}{z} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1-z}{z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ 0 & \frac{-1}{(n-2)!} & \frac{-1}{(n-3)!} & \cdots & -1 & \frac{1-z}{z} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \frac{-1}{(n-1)!} & \frac{-1}{(n-2)!} & \cdots & -\frac{1}{2!} & -1 & \frac{1}{n!} \end{vmatrix}.$$

Developing the determinant after its first column, and taking into account the relation (5), we obtain the formula (18).

■

Examples. Applying (18), we have

$$S_2(z) = \frac{2z^2}{(1-z)^3}\begin{vmatrix} \frac{1-z}{z} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}\ ,$$

$$S_3(z) = \frac{6z^3}{(1-z)^4}\begin{vmatrix} \frac{1-z}{z} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1-z}{z} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4}\ ,$$

$$S_4(z) = \frac{24z^4}{(1-z)^5}\begin{vmatrix} \frac{1-z}{z} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1-z}{z} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1-z}{z} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{24} \end{vmatrix} = \frac{z(1+11z+11z^2+z^3)}{(1-z)^5}\ .$$

7 Second determinantal formula for the sum of generalized arithmetic-geometric series

Theorem 5. *For $Z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, the sums $S_n(z)$, $n = 2, 3, \ldots$, are given by formula*

$$S_n(z)=\frac{z^{n-1}}{(1-z)^{n+1}}\begin{vmatrix} z+1 & \frac{z-1}{z} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2z+1 & \binom{3}{2} & \frac{z-1}{z} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ (n-3)z+1 & \binom{n-2}{2} & \binom{n-2}{3} & \cdots & \frac{z-1}{z} & 0 \\ (n-2)z+1 & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \frac{z-1}{z} \\ (n-1)z+1 & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} \tag{20}$$

Proof . The relation (2) and first n relations (17) form the linear algebraic system $S_0(z) = \dfrac{z}{1-z}$,

$$S_0(z) - \frac{1-z}{z} S_1(z) = -1 \,,$$
$$S_0(z) + \binom{2}{1} S_1(z) - \frac{1-z}{z} S_2(z) = -1 \,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_0(z) + \binom{n-1}{1} S_1(z) + \cdots + \binom{n-1}{n-2} S_{n-2}(z) - \frac{1-z}{z} S_{n-1}(z) = -1 \,.$$
$$S_0(z) + \binom{n}{1} S_1(z) + \binom{n}{2} S_2(z) + \cdots + \binom{n}{n-1} S_{n-1}(z) - \frac{1-z}{z} S_n(z) = -1 \,.$$

Applying Cramer's rule, we obtain the following expression for the last unknown of the above system

$$S_n(z) = \frac{(-1)^n z^n}{(1-z)^n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{z}{1-z} \\ 1 & \frac{z-1}{z} & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \binom{2}{1} & \frac{z-1}{z} & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{2} & \cdots & \frac{z-1}{z} & 0 & -1 \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \frac{z-1}{z} & -1 \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & -1 \end{vmatrix}$$

Adding the first column to the last, and developing the determinant obtained about the last column, it results

$$S_n(z) = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{z-1}{z} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \frac{z-1}{z} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & \binom{n-2}{1} & \binom{n-2}{2} & \cdots & \frac{z-1}{z} & 0 \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \frac{z-1}{z} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

Subtracting the first row of the other, we obtain .

$$S_n(z) = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} \begin{vmatrix} 1 & \frac{z-1}{z} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z+1}{z} & \frac{z-1}{z} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & \frac{(n-3)z+1}{z} & \binom{n-2}{2} & \cdots & \frac{z-1}{z} & 0 \\ 0 & \frac{(n-2)z+1}{z} & \binom{n-1}{2} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \frac{z-1}{z} \\ 0 & \frac{(n-1)z+1}{z} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix}$$

Developing the determinant after its first column, it results the formula (20). ■

Examples. Applying (20), we have

$$S_2(z) = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3},\ S_3(z) = \frac{z^2}{(1-z)^4} \begin{vmatrix} z+1 & \frac{z-1}{z} \\ 2z+1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{z(z^2+4z+1)}{(1-z)^4}\ ,$$

$$S_4(z) = \frac{z^3}{(1-z)^5} \begin{vmatrix} z+1 & \frac{z-1}{z} & 0 \\ 2z+1 & 6 & \frac{z-1}{z} \\ 3z+1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(1-z)^5}\ .$$

8 Applications

8.1 Arithmetic-geometric series

Using the formulas (2) and (4), for $a, q, z \in \mathbb{C},\ z \neq 0,\ |z| < 1$, the sum of usual arithmetic-geometric series is

$$\sum_{j=0}^{\infty} (a + jq)\, z^j = a(1+S_0(z)) + qS_1(z) = a\left(1 + \frac{z}{1-z}\right) + q\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{a+(q-a)z}{(1-z)^2}\ .$$

8.2 The sequences $S_n\left(\frac{m}{m+1}\right)$ of natural numbers

For $m = 1, 2, \ldots$, we take $z = \dfrac{m}{m+1}$. Obviously, in this case we have $|z| < 1$. From (2) it results

$$S_0\left(\frac{m}{m+1}\right) = m\,. \tag{21}$$

The linear recurrence relation (14) takes the form

$$S_n\left(\frac{m}{m+1}\right) = m\left[1 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} S_k\left(\frac{m}{m+1}\right)\right],\ n = 1, 2, \ldots\,. \tag{22}$$

From (21) and (22) results by mathematical induction that $S_n\left(\frac{m}{m+1}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, is a sequence of natural numbers. In conformity with (1), (18) and (20), we have

$$S_n\left(\frac{m}{m+1}\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j^n m^j}{(m+1)^j} =$$

$$= n!m^n(m+1)\begin{vmatrix} \frac{1}{m} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{m} & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{-1}{(n-2)!} & \frac{-1}{(n-3)!} & \cdots & -1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{(n-1)!} \\ \frac{-1}{(n-1)!} & \frac{-1}{(n-2)!} & \cdots & -\frac{1}{2!} & -1 & \frac{1}{n!} \end{vmatrix} =$$

$$= m^{n-1}(m+1)\begin{vmatrix} 2m+1 & -\frac{1}{m} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3m+1 & \binom{3}{2} & -\frac{1}{m} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (n-2)m+1 & \binom{n-2}{2} & \binom{n-2}{3} & \cdots & -\frac{1}{m} & 0 \\ (n-1)m+1 & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & -\frac{1}{m} \\ nm+1 & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} \tag{23}$$

Particular case. For $m = 1$, the sequence of integer numbers $S_n\left(\frac{1}{2}\right)$, with its first terms $1, 2, 6, 26, \ldots$, is Sloane's [9] sequence A 000629. In loc. cit. are given the generating function formula (8) and recurrence relation (22), for the considered particular case.

8.3 Fubini numbers.

Sequence $F_0\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}S_n\left(\frac{1}{2}\right),\ n = 1, 2, \ldots$, with first terms $1, 1, 3, 13, \ldots$, is *the Fubini sequence of numbers.* See Sloane [9], A 000670.

8.4 Eulerian numbers and polynomials.

Eulerian polynomials are defined by relation

$$E_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} E(n,k)z^k = \frac{(1-z)^{n+1}}{z} S_n(z),\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ n = 1, 2, \ldots\ , \tag{24}$$

the coefficients $E(0,0) = E(n,0) = E(n,n-1) = 1$, and

$$E(n,k) = E(n, n-1-k),\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ n = 1, 2, \ldots\ , \tag{25}$$

being by definition *Eulerian numbers.* See Sloane, [9], A 008292, [5] and [3]. The Euler polynomials and numbers can be calculated using formulas (3), (13), (17) or (20) from this paper.

Examples. Using above examples for $S_n(z)$, we obtain

$$\begin{aligned}
E_0(z) &= \frac{(1-z)^2}{z} S_1(z) = 1, \\
E_1(z) &= \frac{(1-z)^3}{z} S_2(z) = z + 1, \\
E_2(z) &= \frac{(1-z)^4}{z} S_3(z) = z^2 + 4z + 1, \\
E_3(z) &= \frac{(1-z)^5}{z} S_4(z) = z^3 + 11z^2 + 11z + 1.
\end{aligned}$$

8.5 Z-transforms.

For $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ and $n = 1, 2, \ldots$, from (18) and (20) results that Z-transform of the sequence of powers of natural numbers $(j^n :\ j = 1, 2, \ldots)$, is given by the formulas

$$Z\left((j^n)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{z^j} =$$

$$= \frac{n!z}{(z-1)^{n+1}} \begin{vmatrix} z-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & z-1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2!} \\ . & . & \cdots & . & . & . \\ \frac{-1}{(n-2)!} & \frac{-1}{(n-3)!} & \cdots & -1 & z-1 & \frac{1}{(n-1)!} \\ \frac{-1}{(n-1)!} & \frac{-1}{(n-2)!} & \cdots & -\frac{1}{2!} & -1 & \frac{1}{n!} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{z}{(z-1)^{n+1}} \begin{vmatrix} z+1 & 1-z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z+2 & \binom{3}{2} & 1-z & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ z+n-3 & \binom{n-2}{2} & \binom{n-2}{3} & \cdots & 1-z & 0 \\ z+n-2 & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & 1-z \\ z+n-1 & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} . \tag{26}$$

Examples.

$$Z((j)) = \frac{z}{(z-1)^2}, Z((j^2)) = \frac{z(1+z)}{(z-1)^3}, Z((j^3)) = \frac{z(1+4z+z^2)}{(z-1)^4}.$$

References

[1] Boulton, L., Rosas, M.H.: *Sumando la derivada de la serie geometrica*, Bol. Asoc. Mat. Venez., 10:1 (2003) 89-97.

[2] Cîrnu, M.: *First order differential recurrence equations with discrete auto-convolution*, Int. J. Math. Comput., 4 (2009) 124-128.

[3] Cîrnu, M.: *Eulerian numbers and generalized arithmetic-geometric series*, Sci. Bull. Univ. Politehnica of Bucharest, Ser. A, 71 (2009), no. 2, 25-30.

[4] Cîrnu, M.: *Initial values problems for first order differential recurrence equations with discrete auto-convolution*, Electronic Journal of Differential Equations, 2011 (2011), no. 02, 1-13..

[5] Comtet, L.: *Advanced Combinatorics*, Reidel, 1974.

[6] Mertens, F.: *Ueber die Multiplicationsregel fr zwei unendliche Reihen*, J. Reine Angew. Math., 79 (1874) 182-184.

[7] Rosas, M. H.: *Los Numeros de (Euler)-Catalan*, Bol. Asoc. Mat. Venez., 10:1 (2003) 43-58.

[8] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Ed, Mc Graw-Hill, New York, 1976.

[9] Sloane, N. J. A.: *On-line encyclopedia of integer sequences*,
<http://www.att.com/ njas/sequences/index.html> .

[10] Stalley, R. *A Generalization of the Geometric Series*, American Mathematical Monthly, 56 (1949) 5, 325-327.

Mircea I. Cîrnu,
Faculty of Applied Sciences,
University Politehnica of Bucharest, România

e-mail: cirnumircea@yahoo.com

On the controllability of a two-cell CNN

Teodoro Lara and Edgar Rosales

Abstract. In this paper we study and characterize the controllability of a constant 2-cells CNN (Cellular Neural Network) with feedback resembling a symmetric or antisymmetric matrix and input with all entries set to zero except its first element . We characterize and give a precise description of the control in each case. This problem has been attacked already in order to study complete stability and in the seek of chaotic attractor; but this time the controllability is addressed.

Resumen. En este trabajo se estudia y caracteriza la capacidad de control de una red celular neural, (CNN por sus siglas en inglés) constante de 2 células con retroalimentación parecida a una matriz simétrica o antisimétrica y de entradas todas cero, excepto por el primer elemento. Caracterizamos y damos una descripción precisa del control en cada caso. Este problema se ha atacado con el fin de estudiar la estabilidad completa y en la busca de atractores caóticos; pero esta vez consideramos la capacidad de control.

0 Introduction

Since its introduction by Chua and Yang in 1988 ([6], [7]), the cellular Neural Network model (linear, nonlinear and delayed) referred as CNN, has been shown to have a host of desirable properties long sought after by the neural network community. CNNs are cellular, analog, programmable and multidimensional processing arrays with distributed logic and memory. The processing elements are locally connected. The extension of the CNN paradigm is the CNN universal machine in which distributed and global memories and logic functions support the execution of complex analogical algorithms. The key feature of the CNN architecture is its high operation speed ([18]). Several variations of he original CNN have been proposed and used for black and white image processing tasks, like edge detections, noise removal, horizontal and vertical line filtering and many many others ([5], [9], [10], [13], [16]).

Chaotic CNN has been used for image segmentation ([17]). Another application can be found in [18] where CNN is used in bubble debris classification problem to distinguish debris particles from air bubbles. This is not an easy task due to the coarse resolution of the images and to requirements for an extremely low false alarm for misclassified bubbles at a very high processing speed.

In its simplest form, a CNN is either a linear or planar array of locally interconnected processors, in which each processor has a transfer of signal functions which is piece-wise linear function mapping the internal state of each given processor to the output of that processor. Letting x represent the internal state of a processor in such an array, the standard signal function (from [7] onward), takes the form

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| + |x-1|). \tag{1}$$

In the most general case f is sigmoid function, that is, differentiable, bounded and $f'(x) > 0$, for any $x \in \mathbf{R}$.

In the context of a simple CNN model, locally connected means the processor is connected to its nearest neighbors. For instance, in the linear array, processors are connected to a single line such that each processor which is not at either end of the line being connected to two other processors, which are its nearest neighbors.

Controllability of CNN for the linear case (f as in (1)) has been studied by imposing different boundary conditions; for instance, periodic boundary conditions in [12] (constant input) and [3] (periodic input); von Neumann boundary conditions in [2] (constant input) and [4] (periodic input).

In this paper we address the controllability of a modified version of the two-cell CNN given by

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + py_1 + sy_2 + bu \\ x_2' &= -x_2 + ry_1 + py_2 \end{aligned} \tag{2}$$

with the output function $y = g(x)$ and g being a sigmoid function. For this type of problem Zou and Nossek discovered a chaotic attractor ([19], [20], [21]) with $u = b\sin(\frac{2\pi t}{T})$ and $r = -s$. In [15] bifurcation and chaos are studied in a general problem (2) with output function (1) and

$$p > 1,\ p-1 < r,\ p-1 < -s. \tag{3}$$

In its more general form the equation for the CNN model (array of $M \times N$ Cells) is given as

$$\dot{x} = -x + AG(x) + Bu$$

where A and B are $n \times n$ matrices, $n = MN$, $x \in \mathbf{R}^n$,

$$G(x) = \mathrm{col}(g(x_1), g(x_2) \cdots, g(x_n)),$$

$x = \mathrm{col}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ and g a sigmoid function.

1 Controllability

In this section we set the problem in a more convenient way and prove the results on controllability. We begin with the following

Definition 1.1 *([11], [14]) A control system*

$$\dot{z} = f(z, u),$$

with $f(z, u) \in \mathcal{C}^1$ in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ is said to be controllable in $[t_0, t_1]$ if for each pair of points z_0 and z_1 both in $\mathbf{R}^n$ there exists a bounded measurable controller $u(t)$ on $[t_0, t_1]$ (with values in $\mathbf{R}^m$) such that the corresponding response $z(t)$ steers $z(t_{0)} = z_0$ to $z(t_1) = z_1$.

We consider, as said before, g sigmoid function, $g(0) = 0$, and rewrite it as $g(x) = g'(0) + o(|x|)$ $(x \in \mathbf{R})$ as $x \to 0$, and (2) now looks like

$$x = Ax + Bu + o(||x||), \tag{4}$$

but now

$$x = \operatorname{col}(x_1, x_2), \;\; u = \operatorname{col}(u_1, u_2), B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$A = \begin{pmatrix} -1 + g'(0)p & g'(0)s \\ g'(0)r & -1 + g'(0)p \end{pmatrix},$$

The following result from [11] will be used in order to guarantee the controllability of (4) in the interval $[t_0, t_1]$

Theorem 1.2 *A system like (4) is controllable en $[t_0, t_1]$ if and only if matrix*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [F(t_1, t)B(t)][F(t_1, t)B(t)]^T \, dt$$

is non singular. Where $F(t_1, t)$ is the transition matrix of the system.

We may notice that in our case (autonomous case) the above matrix is $F(t_1, t) = \exp(A(t_1 - t))$ for all t_1, t reals.

Our main result now runs as follows

Theorem 1.3 *The matrix $W(t_0, t_1)$, with A and B given as in (4), is invertible for all $t_0, t_1 \in \mathbf{R}$, $t_0 < t_1$.*

Proof. The eigenvalues of A are $\lambda = -1 + g'(0)p + g'(0)\sqrt{-sr}\, i$ and $\bar{\lambda} = -1 + g'(0)p - g'(0)\sqrt{-sr}\, i$ with corresponding eigenvector $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-sr}}{r}\, i \\ 1 \end{pmatrix}$, indeed $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-sr}}{r}\, i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-sr}}{r} \\ 0 \end{pmatrix} i$. Now we define the matrix $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-sr}}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, therefore $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{-sr}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. But then

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 + g'(0)p & -g'(0)\sqrt{-sr} \\ g'(0)\sqrt{-sr} & -1 + g'(0)p \end{pmatrix}.$$

Let us set $-1 + g'(0)p = H$ y $g'(0)\sqrt{-sr} = K$ and define a new matrix given by

$$M = \begin{pmatrix} H & -K \\ K & H \end{pmatrix}.$$

In this context matrix A looks like $A = PMP^{-1}$, $e^{At} = Pe^{Mt}P^{-1}$, and

$$e^{At} = Pe^{Ht} \begin{pmatrix} \cos(K\,t) & -\sin(K\,t) \\ \sin(K\,t) & \cos(K\,t) \end{pmatrix} P^{-1};$$

that is,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{Ht}\cos(K\,t) & -\frac{\sqrt{-sr}}{r}\, e^{Ht}\sin(K\,t) \\ -\frac{\sqrt{-sr}}{s}\, e^{Ht}\sin(K\,t) & e^{Ht}\cos(Kt) \end{pmatrix},$$

matrix $F(t_1, t)$ now becomes

$$\begin{pmatrix} e^{H(t_1-t)}\cos(K\,(t_1 - t)) & -\frac{\sqrt{-sr}}{r}\, e^{H(t_1-t)}\sin(K\,(t_1 - t)) \\ -\frac{\sqrt{-sr}}{s}\, e^{H(t_1-t)}\sin(K\,(t_1 - t)) & e^{H(t_1-t)}\cos(K(t_1 - t)) \end{pmatrix}.$$

Consequently $[F(t_1,t)B(t)][F(t_1,t)B(t)]^T$ is

$$\begin{pmatrix} e^{2\,H(t_1-t)}\left(\cos\left(K(t_1-t)\right)\right)^2 b^2 & \frac{e^{2\,H(t_1-t)}\cos(K(t_1-t))b^2\sin(K(t_1-t))r}{\sqrt{-sr}} \\ \frac{e^{2\,H(t_1-t)}\cos(K(t_1-t))b^2\sin(K(t_1-t))r}{\sqrt{-sr}} & \frac{e^{2\,H(t_1-t)}rb^2\left(-1+(\cos(K(t_1-t)))^2\right)}{s} \end{pmatrix}.$$

We calculate $\int_{t_0}^{t_1}[F(t_1,t)B(t)][F(t_1,t)B(t)]^T\,dt$ and obtain

$$W(t_0,t_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

with

$$a_{11} = \tfrac{b^2}{4H(H^2+K^2)}\left[e^{\alpha}(H^2\cos\beta + HK\sin\beta + H^2 + K^2) - 2H^2 - K^2\right]$$

$$a_{12} = a_{21} = -\tfrac{b^2\sqrt{-sr}}{4s(H^2+K^2)}\left[e^{\alpha}(H\sin\beta - K\cos\beta) + K\right]$$

$$a_{22} = \tfrac{b^2 r}{4sH(H^2+K^2)}\left[e^{\alpha}(H^2\cos\beta + HK\sin\beta - H^2 - K^2) + K^2\right],$$

here $\alpha = 2H(t_1 - t_0)$ and $\beta = 2K(t_1 - t_0)$.

On the other hand

$$\det(W(t_0,t_1)) = -\frac{b^4 r e^{\alpha}}{16sH^2(H^2+K^2)}\left[-2H^2+2H^2\cos\beta+K^2e^{-\alpha}+K^2e^{\alpha}-2K^2\right]$$

and $\det(W(t_0,t_1)) = 0$ if and only if $-2H^2+2H^2\cos\beta+K^2e^{-\alpha}+K^2e^{\alpha}-2K^2 = 0$ if and only if $H^2\cos\beta + K^2\cosh\alpha = H^2 + K^2$ and this last equality takes place if and only if $\alpha = \beta = 0$ which is impossible to happen; in conclusion, for our system $\det(W(t_0,t_1)) \neq 0$ and $W(t_0,t_1)$ is non singular matrix. ∎

Corollary 1.4 *System (4) is controllable in* $[t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$.

2 The Control

Here we find the optimal control that we know already exists because of previous section, for this purpose the Pontryagin Maximum Principle and Filippov Theorem will be used ([1], [8], [14]). We rewrite system (4) in a more convenient way in order to use the mentioned results, first of all we set $b = 1$ (or $b = -1$) since b is a fix constant, and set the controls as the interval $[-1, 1]$ also

$$f(X,u) = AX + B\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -1+g'(0)p & g'(0)s \\ g'(0)r & -1+g'(0)p \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Notice that f is defined on $\mathbf{R}^2 \times [-1,1]$, linear, and the set of controls is compact. The control-dependent Hamiltonian function of Pontryagin Maximum Principle is now ($\xi = (\xi_1, \xi_2)$)

$$h_u(\xi, X) = (\xi_1, \xi_2)\begin{pmatrix} (-1+g'(0)p)x_1 + g'(0)sx_2 + u \\ g'(0)rx_1 + (-1+g'(0)p)x_2 \end{pmatrix}$$

or

$$h_u(\xi,X) = (-1+g'(0)p)x_1\xi_1 + g'(0)sx_2\xi_1 + u\xi_1 + g'(0)rx_1\xi_2 + (-1+g'(0)p)x_2\xi_2$$

and the corresponding Hamiltonian system has the form

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{\partial h_u}{\partial \xi} \\ \dot{\xi} = -\frac{\partial h_u}{\partial X}. \end{cases}$$

In coordinates this system splits into two independent subsystems

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-1 + g'(0)p)x_1 + g'(0)sx_2 + u \\ \dot{x}_2 = g'(0)rx_1 + (-1 + g'(0)p)x_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\xi}_1 = -(-1 + g'(0)p)\xi_1 - g'(0)r\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -g'(0)s\xi_1 - (-1 + g'(0)p)\xi_2. \end{cases}$$

By Pontryagin Maximum Principle, if a control $\tilde{u}(\cdot)$ is time optimal, then the Hamiltonian system has a nontrivial solution $(\xi(t), X(t))$, $\xi(t) \neq 0$ such that

$$h_{\tilde{u}}((\xi(t), X(t))) = \max_{|u|\leq 1} h_u((\xi(t), X(t))),$$

but notice that

$$\max_{|u|\leq 1} h_u((\xi(t), X(t))) = (-1 + g'(0)p)x_1\xi_1 + g'(0)sx_2\xi_1 + g'(0)rx_1\xi_2 \\ + (-1 + g'(0)p)x_2\xi_2 + |\ \xi_1\ |,$$

if $\xi_1(t) \neq 0$, then

$$\tilde{u} = \mathrm{sgn}\xi_1.$$

In order to determine ξ_1 we look at the system

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -(-1 + g'(0)p)\xi_1 - g'(0)r\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -g'(0)s\xi_1 - (-1 + g'(0)p)\xi_2 \end{cases}$$

which can be written as

$$\dot{\xi} = -A^T\xi$$

where A is given as before, and T means transposed. But then this system can be solved and ξ_1 is uniquely determined, so is $\tilde{u}$ and of course (4) as well for this $\tilde{u}$.

Example 2.1 *Let g be the sigmoid function given as $g(x) = \arctan(x)$, with $x \in [-1, 1]$. Then $g'(0) = 1$ and*

$$A = \begin{pmatrix} -1 + p & s \\ r & -1 + p \end{pmatrix}, \quad -A^T = \begin{pmatrix} 1 - p & -r \\ -s & 1 - p \end{pmatrix}.$$

Therefore the foregoing equation can be solved for ξ_1 and ξ_2, actually

$$\xi_1 = \exp[(1 - p)t][C_1 \cos(\sqrt{-rs})t + C_2 \sin(\sqrt{-rs})t]$$

where C_1 and C_2 are constants, which means that $\tilde{u}$ can be explicitly determined once C_1 and C_2 are chosen.

Referencias

[1] A. A. Agrachev. Introduction to optimal control theory. Technical report, Int. School for Advanced Studies, Trieste, Italy, September 2001.

[2] W. Aziz and T. Lara. Controllability, applications, and numerical simulations of cnn. *Electronic J. of Differential Equations*, 13:1–11, 2005.

[3] W. Aziz and T. Lara. Controllability of time-varying cnn. *Electronic J. of Differential Equations*, 2005(135):1–10, 2005.

[4] W. Aziz and T. Lara. Controllability of periodic cnn under von neumann boundary conditions. *Int. J. of Math. Analysis*, 1(11):497–506, 2007.

[5] L. O. Chua and T. Roska. *Cellular Neural Networks and Visual Computing.* Cambridge University Press, New York, 2002.

[6] L.O. Chua and L. Yang. Cellular neural networks: Applications. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 35:1273–1290, 1998.

[7] L.O. Chua and L. Yang. Cellular neural networks: Theory. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 35:1257–1271, 1998.

[8] L.C. Evans. Introduction to mathematical control theory, version 0.1. Technical report, University of Maryland, Maryland, USA, October 1983.

[9] C. H. Juang, S. S. Lin, and W. W. Lin. Cnn: Local patterns for general templates. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 13:1645–1659, 2000.

[10] J. Juang and S. S. Lin. Cnn: Mosaic pattern and spatial chaos. *SIAM J. Appl. Math.*, 60:891–915, 2000.

[11] J. Klamka. *Controllability of Dynamical Systems.* Kluwer Academic Publishers, 1991.

[12] T. Lara. Cnn and controllability. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 10(1 & 2):33–51, January & April 2002.

[13] T. Lara, P. Ecimovciz, and J.H. Wu. Delayed cnn: Model, applications, implementations, and dynamics. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 10(1 & 2):71–97, january & april 2002.

[14] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory.* SIAM Series in Applied Math. John Wiley & Sons, New York, 1967.

[15] S. S. Lin, W. W. Lin, and T. H. Yang. Bifurcations and chaos in two-cell cnn with periodic inputs. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 14(9):3179–3204, 2004.

[16] S. S. Lin and T.S. Yang. On the spatial entropy and patterns of two-dimensional cnn. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 12:15–128, 2002.

[17] A. Lozowski, T. J. Cholewo, and et al. Chaotic cnn for image segmentation. In *4th Int. Worshop on CNN and Applications*, pages 219–223, Seville-Spain, 1996.

[18] I. Szatmári, A. Schult, and et al. Morphology and autowave metric on cnn applied to bubble-debris classification, 2000.

[19] F. Zou and J. A. Nossek. A chaotic attractor with cnn. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 38(7):811–812, July 1991.

[20] F. Zou and J. A. Nossek. Stability of cnn with opposite sign templates. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 38(6):675–677, june 1991.

[21] F. Zou and J. A. Nossek. Bifurcation and chaos in cnn. *IEEE Trans. Circ. Syst. I: Fundamental Theory and Applications*, 40(3):166–173, 1993.

Teodoro Lara and Edgar Rosales
Universidad de los Andes Trujillo,
Dpto. Física y Matemáticas. Trujillo, Venezuela.

e-mail: tlara@ula.ve, edgarr@ula.ve

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Análisis de la geometría elemental de Monseñor Jáuregui

Roy Quintero y Alí Medina Machado

Resumen. El propósito principal de esta investigación es hacer un análisis de la Geometría Elemental escrita por Jesús Manuel Jáuregui Moreno en 1892. Se inicia con una descripción general del libro. Luego, se revisan matemáticamente los aspectos que son resaltados en su cubierta anterior desde el punto de vista de su veracidad, en términos de exactitud numérica o procedimental. Al final, se presenta una breve semblanza de Monseñor Jáuregui.

Abstract. The main purpose of this research is to make an analysis of Elementary Geometry written by Jesús Manuel Jáuregui Moreno in 1892. It begins with a general description of the book. Then, the aspects that are highlighted in its front cover are revised mathematically from the point of view of veracity, in terms of numerical or procedural accuracy. At the end, it is presented a biographical sketch of Monsignor Jáuregui.

1 Introducción

En este artículo se hace un análisis del libro de geometría escrito en Venezuela en el siglo XIX por el Presbítero trujillano Jesús Manuel Jáuregui Moreno (1848-1905) (Fig. 1(a)). Su obra titulada “Geometría elemental, para uso de los establecimientos de educación de ambos sexos” (Fig. 1(b)) fue publicada por primera vez como libro texto por la Tipografía del Colegio del Sagrado Corazón de Jesús a cargo de A. I. Avendaño en marzo de 1892, en La Grita, Estado Táchira, y en formato de folleto con 64 páginas. Monseñor Jáuregui, como es mejor conocido, fue fundador de este colegio y su rector por 15 años (1884-1899) durante los cuales implementó una educación muy original en diversos aspectos,

2010 AMS Subject Classifications: 97A10, 01A55, 51M04.
Keywords: Mathematics education; comprehensive works, reference book, History and biography; 19^{th} century, Geometry; elementary problems in Euclidean geometries.

basándose en las enseñanzas salesianas adquiridas en el Seminario de Turín y de su contacto directo con San Juan Bosco. Entre muchos otros elementos relevantes de su sistema educativo de formación cristiana integral (Mora-García, 2006) se debe mencionar la elaboración no sólo de su libro de geometría, sino también de dos textos más (Jáuregui, 1998) "Tratado de Urbanidad" (1890) e "Introducción de la Gramática Latina" (1897).

(a) (b)

Figura 1: Monseñor Jáuregui y su Geometría elemental

Primero, se hace una descripción general de la obra, y posteriormente, un análisis formal de algunos de sus contenidos más importantes, especialmente aquellos resaltados en la portada, con el fin de aclarar matemáticamente su veracidad, en términos de exactitud numérica o procedimental. Al final, una breve semblanza de Monseñor Jáuregui es incluida con el fin de que los lectores puedan apreciar con mayor profundidad las diversas dimensiones en las que este insigne venezolano -casi olvidado por la posteridad- tuvo influencia.

2 Algunas características del libro de Jáuregui

1. El libro está escrito con vista en los mejores autores que tratan de la materia de su época, especialmente Scarpa y Borgogno (1880), Legendre (1817) y Cortázar (1850), lo cual aparece explícitamente en la hoja de presentación del libro.

   El libro de V. G. Scarpa y E. Borgogno es "Lezioni de aritmetica, geometria e sistema metrico decimale". La edición trigésima cuarta, publicada en Torino, Italia, en 1880, por la editorial Stamperia Reale di Torino de G. B. Paravia y Compañía y de 124 páginas incluía en su índice general los siguientes temas de geometría: Capitolo II. Della geometria. Art. 1. Definizioni; Geometria Piana. Art. 2. Delle Linee; Art. 3. Degli Angoli; Art.

4. Dei Poligoni; Art. 5. Dei Triangoli; Art. 6. Dei Quadrilateri; Art. 7. Del Circolo; Art. 8. Misura della Superficie o Planimetria; Geometria solida. Art. 9. Definizioni; Art. 10. Dei Poliedri; Art. 11. Misura della Superficie e del Volume dei Solidi o Stereometria.

El libro clásico "Éléments de géométrie" de A. M. Legendre publicado en 1794 es su más famosa obra, fue líder como libro de geometría elemental por más de 100 años, y ampliamente usado como sustituto del clásico "Elementos" de Euclides. Considerado una mejora pedagógica de éste por la simplificación y reordenamiento de las proposiciones que le hiciera Legendre.

El libro "Tratado de geometría elemental" del español Don Juan Cortázar (1809-1873) introduce adelantos positivos sobre lo conocido, como por ejemplo: un método general para trazar tangentes comunes a dos círculos, cualesquiera que sean las posiciones de éstos; la demostración sencilla de los volúmenes de los prismas principalmente de los oblicuos, la medida del ángulo esférico, el estudio elemental de las curvas elipse, parábola y hélice, y algún teorema original, referente al volumen de los poliedros simétricos; en todo lo que resalta es lo riguroso, exacto y sencillo de las demostraciones (Iruste, 1912). La edición tercera, publicada en Madrid, España, en 1850, por la editorial Imprenta y Fundición de D. Eusebio Aguado y de 207 páginas incluía en su índice general los siguientes temas: Geometría Plana: Línea recta y ángulos. Polígonos. Círculo. Áreas. Geometría del Espacio: Planos, ángulos diedros y poliedros. Poliedros. Cono, cilindro y esfera. Áreas y volúmenes. Estudio elemental de las curvas.

A manera de comentario es ineludible expresar, al observar sólo los contenidos de estas tres obras reconocidas, que el autor estaba bien informado y le gustaba leer y estudiar los mejores libros de geometría clásica de su época. No es exagerado decir que esto debe haber influido muy positivamente en favor de su texto de geometría, al compendiar en él lo más substancial de la materia geométrica elemental, lo cual le da a su obra el carácter de manual de geometría.

2. Como libro elemental de geometría no establece ningún sistema formal axiomático, pero si un conjunto de definiciones muy intuitivas, así como una secuencia de algoritmos o procedimientos geométricos de construcción. Todo esto seguramente debido a su nivel.

3. Se resalta de su contenido expresándolo en la cubierta anterior:

   a) La fórmula para la equivalencia del círculo y del cuadrado.
   b) La fórmula para la equivalencia de la circunferencia y el perímetro del cuadrado.
   c) Las reglas para aplicar dichas fórmulas en la medida de arcos, segmentos

y sectores.
d) Nociones sobre la extracción de la raíz cuadrada.
e) Nociones sobre agrimensura y dibujo topográfico.

4. Su contenido está dividido en tres partes: geometría plana, geometría sólida, y agrimensura y dibujo topográfico.

5. Esencialmente por su redacción en forma de preguntas y respuestas la obra puede ser definida como un catecismo sobre geometría elemental. En total contiene 278 preguntas con respuestas. Esto no contradice su carácter de manual.

6. También incluye 23 procedimientos de dibujo lineal, lo cual dota a la obra de un carácter algorítmico. Además, aparecen 72 figuras y 30 ejemplos numéricos, 2 advertencias sobre el contenido, 47 problemas para resolver, 8 notas, 2 explicaciones de figura y 7 pies de página a lo largo de su contenido. Todos estos elementos constituyentes de la obra le confieren una estructura de texto.

7. El libro está, a su vez, dividido en secciones teóricas numeradas comenzando con I DEFINICIONES sobre geometría elemental hasta la XXIV DEFINICIONES concerniente a geometría sólida. Luego, no están numeradas las 15 restantes, solamente tienen un título, empezando por CUERPOS y terminando con ADVERTENCIAS.

8. Al final de la primera parte, después de la sección MEDIDAS DE DIVERSAS SUPERFICIES, se presentan los enunciados de 27 problemas para resolver, y luego 20 problemas más al final de la segunda parte, después de la sección ESTEREOMETRÍA. En cada sección de problemas se incluyen casos similares a los estudiados en los ejemplos, pero más complicados y en función de los temas tratados en las secciones cubiertas.

9. Por su parte, Beyer (2006) expresa en su octava conclusión que durante el período 1826-1912,

   > La oferta de los catálogos muestra una notoria ausencia de libros de geometría y ocasionalmente algunos temas de esta rama de la matemática aparecen dentro de los libros de matemáticas de una manera muy somera, lo cual está en consonancia con las concepciones de la época que privilegiaban a la aritmética y que en cierta forma establecían una cuasi identificación de esta rama de la matemática con la matemática misma.

   Con base en esto, es válido afirmar que "Geometría Elemental" es uno de los primeros textos de geometría publicados en la República de Venezuela por un venezolano, que no fuera traducción o adaptación (extracto) de un libro extranjero. De acuerdo con otros comentarios hechos por Beyer (2006), es permisible decir que debe estar entre los primeros 5 libros de geometría elemental con las características indicadas.

10. Por otra parte, Freitas (2000) menciona que en el Inventario de Frydensberg entre 1830 y 1894 aparecen sólo 7 libros de geometría publicados en Venezuela, pero de todo tipo (para niños, artesanos y estudiantes de ingeniería interesados en agrimensura) e incluye el libro de J. Muñoz Tebar titulado "Primeras nociones de geometría, para el uso de escuelas de la república, dedicado a los artesanos de Venezuela" con características similares al libro de Jáuregui con respecto a la aplicación de la geometría a la agrimensura.

11. En relación con la aplicación práctica de los contenidos abordados en la tercera parte sobre agrimensura y dibujo topográfico, es válido decir sin la menor duda, que una vez estudiadas las partes sobre planimetría y estereometría, el alumno podía lograr un conocimiento básico general sobre estas nuevas materias y ver claramente la importancia del conocimiento teórico-geométrico en la práctica. Lo mismo ocurre, al menos instrumentalmente, con los procedimientos de medición, nivelación y trazado de planos de terrenos estudiados en esa última parte del libro. Es bien sabido que Monseñor Jáuregui construyó iglesias, caminos largos entre montañas, y colegios; es posible que él mismo ayudara a medir, nivelar y trazar planos de buena parte de estas obras para aligerarlas o abaratarlas, y por qué no a través de sus mejores discípulos del colegio que se inclinaran por la geometría y su aplicación.

3 Análisis matemático de las partes importantes

En lo sucesivo, la siguiente notación general será empleada: C simboliza la longitud de una circunferencia de diámetro D. Así que la razón del diámetro a la circunferencia es: $\frac{C}{D} = \pi$. Y la aproximación usada en casi todo el libro es $\pi = 3,14$, excepto en la sección XIX, donde se dan valores más exactos de π.

Antes de continuar es necesario hacer una aclaratoria: En lo que sigue, se entenderá por cifras decimales aquellos dígitos que aparecen a la derecha de la coma en la notación o desarrollo decimal de un número real. Es decir, que se hará mención solamente de la parte fraccionaria del número y no de su parte entera. También es sano indicar que las partes enteras de todos los números utilizados en el libro de Jáuregui son exactas.

En la sección XVIII, se define la equivalencia del círculo y del cuadrado. Entendiéndose por tal, *hallar un cuadrado igual en superficie a un círculo de radio conocido, o dado el radio r determinar el lado l del cuadrado* (equivalente al círculo). En símbolos, l satisface la ecuación $l^2 = \pi r^2$, así pues $l = \sqrt{\pi} r$. Y una vez expresado en función del diámetro y aproximado $2/\sqrt{\pi}$ decimalmente se obtiene:

$$l = \sqrt{\pi}\,\frac{D}{2} = \frac{D}{2/\sqrt{\pi}} \approx \frac{D}{1,1287}, \tag{1}$$

pero la última cifra no es correcta (error que se comete a lo largo del libro pero que no produce mayor daño en los cálculos realizados por ser las tres primeras cifras decimales exactas, i.e., 1, 2 y 8). Por otra parte, como la cuarta y quinta cifras decimales exactas de $2/\sqrt{\pi}$ son 3 y 7 la mejor aproximación por redondeo con cuatro cifras decimales es $1,1284$. Así pues, hasta la cuarta cifra decimal se debería emplear la fórmula (2) en lugar de (1).

$$l = \frac{D}{1,1284}. \tag{2}$$

Si el lado del cuadrado es conocido, entonces se despeja de (1) el valor del diámetro, es decir $D = 1,1287\,l$, pero debería ser $D = 1,1284\,l$.

Al final de la sección XVIII, el autor pregunta *¿Y qué llama Ud. números irracionales?* y la respuesta que da es: *Llámanse así, en matemáticas, las raíces o cantidades radicales que no pueden expresarse exactamente en números enteros ni fraccionarios.* Observe que no es la respuesta más acertada por considerar sólo una clase de irracionales, pero, si se considera el nivel matemático del contenido numérico incluido en el libro y la naturaleza de la materia tratada, es aceptable.

Al final de la sección XIV, el autor indica un procedimiento para construir el cuadrado equivalente al círculo. Explícitamente: *se traza el círculo con el diámetro dado, y luego se divide este diámetro en 44 partes; de las cuales se toman 39 para el lado del cuadrado equivalente.* Se verá que el mismo es correcto hasta la segunda cifra decimal exacta. En efecto, si al realizar la división del diámetro D en 44 partes, se toman 39 partes, entonces, $l = 39 \times \frac{D}{44}$. Por tanto,

$$l^2 = \left(\frac{39}{44}\right)^2 D^2 = \frac{6084}{1936} r^2 = 3,14\overline{256198347107438016528 9}\,r^2,$$

lo cual indica que el valor es correcto hasta la segunda cifra decimal exacta (la barra indica el período de la expresión decimal de la fracción).

Seguidamente, en una nota, el autor expresa: *La fórmula exacta es 38,9829; pero ponemos 39 en obsequio de la mayor expedición. También puede dividirse el diámetro en 16 partes y tomar 14,18 para el lado del cuadrado equivalente.* Se comprobará que la primera afirmación es incorrecta y la segunda correcta relativamente. En el primer caso se demostrará que la mejor aproximación con cuatro cifras decimales exactas es 38,9939, que justifica aún más el procedimiento con 39 partes. Ciertamente, si x representa la mejor porción a tomar del diámetro después de dividirlo en 44 partes, entonces $l = x\left(\frac{D}{44}\right)$, con $0 < x < 44$. Luego,

$$l^2 = \left(\frac{x}{44}\right)^2 D^2 = \frac{x^2}{22^2} r^2,$$

por tanto, x debe satisfacer la ecuación $\frac{x^2}{22^2} = \pi$; es decir, $x = 22\sqrt{\pi}$, y con cuatro cifras decimales exactas x toma el valor 38,9939 y no 38,9829.

Con respecto a la segunda afirmación, por un cálculo similar al anterior, se llega a que x debe satisfacer la ecuación $\frac{x^2}{8^2} = \pi$; es decir, $x = 8\sqrt{\pi}$, y con dos cifras decimales exactas x toma el valor 14,17 y no 14,18, pero la tercera cifra decimal exacta es 9, así que la mejor aproximación (con dos cifras decimales) es la redondeada que es 14,18 como afirma el autor.

En la sección XIX, en relación con la exactitud de los resultados y su posible mejora el autor afirma que las expresiones decimales para π y $2/\sqrt{\pi}$ pueden perfeccionarse tomando 3,1415626 y 1,1286691. Ambas aproximaciones mejoran las anteriores pero no son las óptimas en términos de cifras decimales exactas, porque las correctas son 3,1415926 y 1,1283791.

En la sección XX, el autor pregunta: *¿Cómo se halla la equivalencia del perímetro del cuadrado y la circunferencia del círculo?* Y responde: *Se multiplica el lado del cuadrado por el número fijo 1,274, razón diferencial del perímetro y la circunferencia, y el producto será el diámetro de esta equivalencia, que multiplicado por 3,14 razón del diámetro a la circunferencia, dará justamente una circunferencia igual al perímetro dado del cuadrado.* Se probará la validez del procedimiento y aclarará el origen del "número fijo" 1,274. En efecto, dado l, el perímetro del cuadrado es $4l$, luego, para hallar el diámetro D de la circunferencia equivalente, se debe cumplir la siguiente igualdad: $\pi D = 4l$, por tanto,

$$D = \frac{4}{\pi}\, l. \tag{3}$$

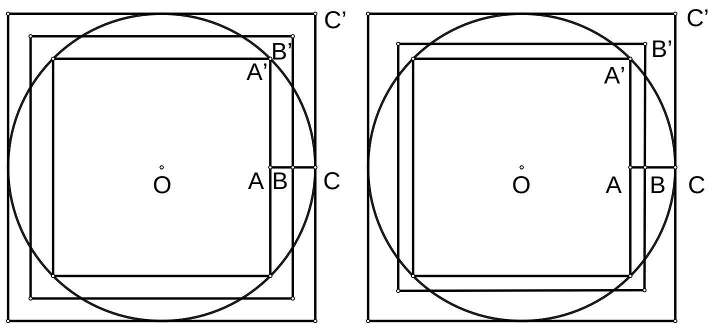
Y la aproximación hasta la cuarta cifra decimal exacta de $4/\pi$ es 1,2732, que indica que 1,274 no es la mejor aproximación con tres cifras decimales exactas ni la mejor aproximación por redondeo con tres cifras decimales. La mejor es 1,273, así que la fórmula (3) puede sustituirse por $D = 1,273\, l$ en lugar de $D = 1,274\, l$, pero también hay que decir que la aproximación dada por el autor es completamente válida hasta el orden de las centésimas.

Al final de la sección XX, el autor expresa que para trazar la circunferencia (o círculo) y el cuadrado equivalentes en perímetro, se debe seguir el siguiente procedimiento: *Dado el círculo, inscríbasele y circunscríbasele respectivamente un cuadrado y trazado luego otro cuadrado en medio de estos y equidistante de ambos, el perímetro de este será equivalente al del círculo.* Se verificará que el mismo no genera una buena aproximación. En la Figura 2(a) se observa dicha construcción. El diámetro $D = 2\overline{\mathrm{OC}}$ y $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{OA'}}$ y claramente $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AA'}}$,

$\overline{\text{OB}} = \overline{\text{BB}'}$ y $\overline{\text{OC}} = \overline{\text{CC}'}$. Y por simple aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OAA$'$, se obtiene:

$$\overline{\text{OA}} = \frac{D}{\sqrt{8}}. \tag{4}$$

En consecuencia,



(a) (b)

Figura 2: Trazado del cuadrado equivalente en perímetro a círculo dado

$$\overline{\text{OB}} = \frac{\overline{\text{OA}} + \overline{\text{OC}}}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\frac{D}{4},$$

por tanto, el cuadrado del medio tiene por lado $2\overline{\text{OB}}$ y por perímetro $8\overline{\text{OB}}$; es decir, $(\sqrt{2}+2)D$, pero $\sqrt{2}+2$ desarrollado con dos cifras decimales exactas es 3,41 el cual difiere de 3,14 mucho. Esto indica que el procedimiento no es una buena aproximación ni siquiera en el orden de las décimas. Realmente, es una pésima aproximación puesto que:

$$\sqrt{2} + 2 - \pi > 3,41 - 3,15 = 0,26.$$

Luego, al final de la segunda parte del libro, el autor indicará como mejorar este procedimiento. Y en tal sentido expresa que en lugar del cuadrado equidistante al inscrito y circunscrito se tome el que se encuentra a un 1/3 del inscrito y a 2/3 del circunscrito, como se muestra en la Figura 2(b).

A continuación veremos qué tanto es mejor este nuevo procedimiento que el anterior. Por un cálculo idéntico al empleado anteriormente la ecuación (4) sigue siendo válida, luego

$$\overline{\text{OB}} = \overline{\text{OA}} + \overline{\text{AB}} = \frac{D}{\sqrt{8}} + \frac{1}{3}\overline{\text{AC}} = \frac{D}{\sqrt{8}} + \frac{1}{3}(\overline{\text{OC}} - \overline{\text{OA}}) = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)D,$$

por tanto, el cuadrado del medio tiene por lado $2\overline{\text{OB}}$ y por perímetro $8\overline{\text{OB}}$; es decir, $\frac{4}{3}(\sqrt{2}+1)D$, pero $\frac{4}{3}(\sqrt{2}+1)$ desarrollado con tres cifras decimales exactas es 3,218 y redondeado a la segunda es 3,22 que difiere de 3,14 en 8 centésimas, y ciertamente es mucho mejor que la anterior aproximación.

No es difícil probar que es mucho mejor considerar el cuadrado que está a 1/4 del inscrito y a 3/4 del circunscrito. En este último caso, que no es contemplado por el autor en su libro, el valor del perímetro del cuadrado es igual a $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+1\right)D$, y $\frac{3}{\sqrt{2}}+1$ desarrollado con tres cifras decimales exactas es 3,121 y redondeado a la segunda es 3,12 que está mucho más próximo a 3,14 (apenas dos centésimas). Se puede además probar con un poco más de trabajo que la más óptima de todas las aproximaciones de este tipo, que en general consiste en construir el cuadrado que está a $1/n$ del inscrito y a $(n-1)/n$ del circunscrito (n entero positivo) y cuyo perímetro es a_nD, donde $a_n=\sqrt{8}+\frac{4-\sqrt{8}}{n}$ con $n=1,2,3,\ldots$, se da exactamente si $n=4$, porque

$$4=a_1>a_2>a_3>\ldots>\sqrt{8}$$

y a_4 es el valor más próximo a π. De todo esto se concluye que el autor aunque mejoró su método, en realidad no lo perfeccionó.

A manera de conclusión de esta sección, es posible afirmar que los contenidos estudiados y los procedimientos empleados, en especial los relativos a las equivalencias del círculo y cuadrado en cuanto a superficie o perímetro, le dan al libro el carácter de original desde el punto de vista de una publicación matemática formal venezolana y aún más si es tomada en cuenta la época en que fue editado y usado. Sobre la posibilidad de categorizar a Monseñor Jáuregui como matemático puro es también permisible, ya que como lo manifiesta en su libro él sometió (Jáuregui, 1892), por lo menos, su método de equivalencia en superficie entre el cuadrado y el círculo -bajo la denominación de “Magnificat”- (relacionado con el problema clásico de la matemática griega llamado “cuadratura del círculo con regla y compás”) al estudio y aprobación de la Universidad Gregoriana de Roma, recibiendo respuesta positiva del rector de la Universidad Georgetown en Washington (Mora-García, 2006).

4 Semblanza de Jesús Manuel Jáuregui Moreno

Responsabilizarse por su destino hace al hombre. Podemos sintetizar así la existencia del sacerdote Jesús Manuel Jáuregui Moreno, quien no descansó nunca en hacer de su vida un orden de servicio para sí mismo y los demás, un venezolano que el tiempo lo cataloga de ciudadano ejemplar porque pasó sus días enteramente puestos a disposición del bien social; memoria proyectada a la iluminación de todos los senderos para dar a entender que el hombre puesto en posición de destino tiene la grave responsabilidad de convertirse en un dialogante comunitario, en una enseñanza de vida, y catequista de acción para provocar las pequeñas y grandes eclosiones urgidas por la sociedad.

Fue un ser humano que se formó cabalmente con una obligación y satisfacción de conciencia, un ideario como punto de vista que le dio una gran personalidad y lo hizo libre para actuar como correspondía a su profunda vocación humanística. Hombre de su tiempo por sí mismo, y por lo que asumió como responsabilidad de su propia conciencia, hizo emerger esa fuerza de trabajo, ese ideario trasmutado para otras generaciones del futuro.

Una breve apología de Briceño Iragorry nos pone en conocimiento de la biografía del destacado sacerdote y concita a profundizar en su vida y obra, como realmente debe suceder para conocer la conducta de un hombre indicativo que sostuvo una fuerte lucha por la construcción de muchos pilares de la patria, en lo religioso propiamente, extendido a lo educativo, cultural y social, Briceño Iragorry, retrata a Jáuregui Moreno, con palabra y concepto precisos y cataloga la inmensa calidad humana de aquel hombre de la Iglesia.

Dijo Don Mario: "Monseñor Jáuregui Moreno es en realidad el personaje que con mayores títulos podría ser mirado como el signo de unión de la cordillera (...) Andino integral, es la síntesis del servicio que da benemerencia a los hombres (...) Dulce, tierno, tímido en su mundo interior de cristiano sabía negarse a sí mismo para afirmarse en Cristo. Recio basáltico, dominador en cambio, para todo aquello que minaba a la dignidad exterior del ciudadano que se sentía obligado a servir, también, en la fábrica de la ciudad terrena" (Briceño Iragorry, 1981: 302).

Por su parte, Monseñor Quintero asienta, que Jáuregui: "Se dedicó a completar y perfeccionar su formación intelectual. Estudió mucho, estudió sin tregua, como si una sed insaciable de saber le devorara las entrañas sin más guía ni ayuda que la de los libros y el propio pensamiento, trató de internarse audazmente por todos los caminos del conocimiento humano: filosofía, teología, derecho, matemática, ciencias naturales, historia, literatura e idiomas ..." (Quintero, 1948: 67).

Jáuregui Moreno, como vemos, puso mano y pensamiento a una labor de múltiples propósitos que hoy se debe rescatar y actualizar con utilidad provechosa y proyección al futuro. Hay que hacer resplandecer su gloria. Hay que retrotraerlo para ponerlo a actuar en medio de nosotros, convertido en luz e ideales, como producto del amor inteligente, en la reproducción y actualización de sus obras fundamentales. Importa mucho que viva hoy el Padre Jáuregui, que venga hasta nosotros el espíritu de su sabiduría.

Referencias

Beyer, W. (2006). *Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912*. Revista Pedagógica, 27(78), 71-110.

Briceño Iragorry, M. (1981). *Presencia e imagen de Trujillo*, Tomo 5. Caracas, Venezuela: Biblioteca de Temas y Autores Trujillanos.

Cortázar, Juan (1850). *Tratado de geometría elemental* (Tercera edición). Madrid, España: Imprenta y Fundición de D. Eusebio Aguado.

Freites, Y (2000). *Un esbozo histórico de las matemáticas en Venezuela. I parte: desde la colonia hasta finales del siglo XIX*. Boletín de la Asociación Venezolana de Matemáticas, VII(2), 9-37.

Iruste, A. (1912). *D. Juan Cortázar.* Revista de la Sociedad Matemática Española, 1(8), 285-290.

Jáuregui, M. (1892). *Geometría elemental, para uso de los estableci- mientos de educación de ambos sexos.* La Grita, Venezuela: Tipografía del Colegio del Sagrado Corazón de Jesús.

Jauregui, M. (1998). *Obras completas de Monseñor Dr. Jesús Manuel Jáuregui Moreno*. San Cristóbal, Venezuela: Editorial Futuro.

Legendre, A. M. (1817). *Éléments de Géométrie* (Onzième Èdition). Paris, France: Chez Firmin Didot Imprimeur.

Mora-García, J. (2005). *Tres manuales escolares: Cambiaron la historia de la educación en La Grita, en el tiempo histórico de la sesión Táchira del gran estado Los Andes (1884-1899).* Heurística, 4, 31-51.

Quintero, J. H. (1948). *Monseñor Jáuregui.* Mérida, Venezuela: Tipo. "El Vigilante".

Scarpa, V. y Borgogno, E. (1880). *Lezioni de aritmetica, geometria e sistema metrico decimale* (Trentesimaquarta Edizione). Torino, Italia: Stamperia Reale di Torino.

Roy Quintero
Dpto. de Física y Matemáticas, Universidad de Los Andes
Trujillo, Venezuela
rquinter@ula.ve

Alí Medina Machado
Dpto. de Lenguas Modernas, Universidad de Los Andes
Trujillo, Venezuela
alimedinamachado@gmail.com

DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

La pertinencia de la Matemática

Neptalí Romero

Resumen. Este ensayo fue publicado en Principia: Revista de Cultura de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado. **15** (2007), 25-37. El mismo fue estimulado por la temerosa ansiedad de presentar algunas líneas a favor del quehacer de los matemáticos. Fueron escritas sobre la base de una serie de citas e ideas adoptadas tras las lecturas de diversos ensayos y libros, en los que de alguna manera u otra se exponen tanto la virtud como la necesidad de mantener en ejecución las labores sobre las cuales se desarrolla la Matemática y demás ciencias denominadas puras.

Algunos ajustes han sido efectuados al artículo original, y unas tantas líneas han sido reescritas. Mi gratitud al referí, quien con sus observaciones enriqueció este ensayo.

Abstract. This essay was published in Principia: Journal of Culture of the University Lisandro Alvarado. **15** (2007), 25-37. The same was stimulated by the fearful anxiety of presenting some lines for the work of mathematicians. They were written based on a series of quotations and ideas readings taken after several trials and books, which in some way or another expose both virtue and the need to maintain in execution of work on which Math and others developed the so-called pure science.

Some adjustments have been made ??to the original article, and some lines have been rewritten. My gratitude to the referee, who with his observations enriched this essay.

1. Un comentario inicial

En mayo de 1992 la Unión Matemática Internacional (IMU)[1] realizó una reunión ordinaria en el prestigioso Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Brasil) en conmemoración de su cuadragésimo aniversario. En esa reunión se

[1]La IMU, siglas en inglés de International Mathematical Union, es la organización mundial que agrupa las diferentes sociedades matemáticas de los distintos países.

produjo la denominada *Declaración de Río de Janeiro* en la que se declaró el año 2000 como Año Mundial de la Matemática, estableciéndose como fundamentales, para el desarrollo de esta ciencia en el siglo XXI, los siguientes objetivos:

- definir los grandes desafíos que debe afrontar la Matemática para el nuevo siglo;
- impulsar el reconocimiento de la Matemática como una de las piezas claves para el desarrollo económico y cultural de las naciones; y
- promover la imagen pública de la Matemática, impulsando su presencia en la sociedad de la información.

Esta iniciativa fue secundada por la UNESCO en su Asamblea General de 1997, y a través de un documento oficial invitó al mundo entero para que, con el inicio del nuevo siglo, volviese su mirada hacia la Matemática.

Aparentemente los dos últimos objetivos de la Declaración de Río de Janeiro lucen una perogrullada. Pocos niegan la importancia e influencia de la Matemática en el desarrollo de la sociedad moderna. Muchas de las tecnologías cotidianas: radio, teléfono, computadoras, códigos de barra, transmisiones electrónicas seguras y satélites, por ejemplo, son posibles gracias a la acción de sofisticados resultados teóricos de la Matemática. A pesar de esta notoriedad, y a la vigencia milenaria del pensamiento matemático como elemento profundamente inherente al poder racional de la actividad humana, tenemos que admitir, con mucha tristeza por cierto, que la Matemática es la más impopular y menos conocida de todas las ciencias. Sin lugar a dudas, ello y el desconocimiento de las actividades que realizan los matemáticos, tiene como principales responsables a sus propios actores. Se ha fallado en revertir esa percepción que sobre esta ciencia y sus actividades tiene la sociedad; no se ha tenido éxito en implementar el mejor antídoto, la divulgación de la actividad matemática, para curar lo que se ha dado en denominar matefobia.

Es necesario mencionar que desde el primer número del Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, José Ramón Ortiz, editor jefe para la época, mantuvo hasta el volumen VI del año 1999, una sección que denominó *Proyecto Hilbert 2000*; allí fueron expuestos varios documentos que apuntaban en la misma dirección de la Declaración de Río de Janeiro. Debe resaltarse que Jacques Louis Lions, presidente de la IMU en el año 1994, envió una carta de felicitación por tal iniciativa; véase Vol. I, Nº 2 (1994) del mismo boletín.

Como ejemplos que revelan la inquietud que reconocidos matemáticos del siglo XX han tenido, y tienen, sobre este tema, citamos a continuación frases proferidas por algunos de ellos:

- **Paul Halmos**[2] *"Me entristece que la gente culta ni siquiera sepa que mi trabajo existe"*

[2]Paul Hamos (1916-2006) es conocido por valiosos aportes en distintas áreas de la Ma-

- **David Mumford**[3] *"Estoy acostumbrado, como matemático profesional, a vivir con una suerte de vacío, rodeado de gente que se declara, con conspicuo orgullo, analfabeta en matemáticas"*

- **Gian-Carlo Rota**[4] *"Hacer las matemáticas inteligibles para el hombre culto medio, manteniendo los estándares científicos altos, ha sido considerado desde siempre como una navegación peligrosa entre la Escila del desprecio profesional y la Caribdis*[5] *de la incomprensión pública"*

2. Sobre la pertinencia de la Matemática

Aun cuando la Matemática es considerada la "Reina de las Ciencias", una de las más excelsas expresiones de la inteligencia humana y eje fundamental, junto al método experimental, del desarrollo de la ciencia y la tecnología moderna, su impopularidad y el desconocimiento de sus actividades han hecho posible que importantes sectores, con notable influencia política y económica, pongan en duda su efectividad y pertinencia; cuestionamientos que por cierto se trasladan hacia otras ciencias básicas. La Matemática ha contado con ilustres enemigos desde hace mucho tiempo, ejemplo de ello lo fue el célebre poeta y novelista alemán del siglo XVIII, Johann Wolfgang von Goethe, quien en uno de sus escritos, *Máximas y reflexiones*, señala:

> *"yo respeto la Matemática como la más eminente y útil de las ciencias cuando se ocupa de sus problemas específicos, pero no puedo aprobar que se utilice en cosas que nada tienen que ver con ella, en las cuales la noble ciencia se transforma en un disparate"*

Se dice que las razones que condujeron a Goethe a emitir esas opiniones se debieron, nada menos, a las aplicaciones matemáticas hechas por Isaac Newton para sustentar sus estudios de la Óptica y teoría de los colores.

No existe temor en afirmar que las posturas adoptadas por los influyentes sectores hacia el financiamiento de la actividad matemática en nada están relacionadas con celos profesionales. Esa oposición radica en la relación costo-beneficio de la actividad científica; se trata de la presión ejercida a favor del

temática; prolífico escritor, muchos de sus libros son de lectura obligatoria para quienes estudian esta ciencia.

[3]David Mumford (1937-) es un destacado geómetra, recibió la Medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos del año 1974, y en el 2010 recibió la National Medal of Science, el más alto honor científico en los Estados Unidos de América.

[4]Gian-Carlo Rota (1936-1999) fue un respetable matemático y filósofo, con importantes contribuciones en diferentes áreas de la Matemática

[5]Según la mitología griega, Escila era un monstruo marino que habitaba en la caverna de Messina, el navegante que salvara tal peligro, se encontraba al frente del terrible remolido de Caribdis.

corto plazo en la aplicación de los resultados y la producción de bienes materiales derivados de la investigación científica; dejando en un segundo plano los complejos procesos teóricos que son justamente los soportes fundamentales para la utilidad de la ciencia en procura de bienestar social. Infelizmente esas presiones tienen eco en distintos países, especialmente en aquellos donde se hacen esfuerzos por alcanzar mejores niveles de desarrollo científico y tecnológico. Donde esto ha ocurrido, y ocurre, los sectores que planifican la actividad científica diseñan e importan políticas, y normativas, que implican sustanciales recortes presupuestarios en apoyo a la actividad científica, a no ser, claro está, que esta esté dirigida a resolver problemas de impacto inmediato. Así pues, la inversión económica en la investigación científica ha tomado el camino de la relación costo-beneficio, neoliberal para muchos, y que conduce a la perniciosa clasificación de la ciencia en términos de su utilidad en espacios de tiempo.

No deja de ser paradójica esta moderna dinámica: aunque se lleguen a resolver algunos de los problemas llamados prioritarios, y se sienta efímeramente la satisfacción de avanzar hacia el desarrollo científico y tecnológico, el comportamiento asintótico de esos acontecimientos es otro; así lo refleja el insigne médico y científico mexicano Ruy Pérez Tamayo, quien en uno de sus libros[6], al referirse a la relación ciencia y subdesarrollo, expresa

> *"Quizá nos hagamos ricos, pero lo pagaremos muy caro. Porque el conocimiento, que es producto de la ciencia, posee la capacidad de liberar al espíritu de las garras del oscurantismo, los prejuicios y la ignorancia. Y ahí seguiremos, regodeándonos en la penumbra de nuestra cultura precientífica, creyendo que esa es la máxima claridad que existe, cuando afuera brilla el sol del mediodía de la ciencia"*

Bajo el amparo de argumentos mercantilista han ocurrido varias iniciativas de clausura, o disminución, de programas de formación de matemáticos en distintos países. Muy recientemente, apenas en 2010, en VU University Amsterdam se intentó clausurar la sección de Álgebra y Topología de su Facultad de Ciencias. Otro atropello, no tan reciente, ocurrió a mediados de la década de los 90 en la Universidad de Rochester[7], Estados Unidos de América. El intento de cierre de uno de sus programas estelares en Matemáticas produjo un significativo repudio por parte de la comunidad científica de ese país. Ejemplo de ello es un documento, firmado por 31 miembros del Departamento de Física de la Universidad de Harvard, incluidos 3 premios Nobel, 13 miembros de la Academia de Ciencias de los Estados Unidos de América y el Decano de la División de Ciencias Aplicadas, donde se sentencia:

[6] *Acerca de Minerva*. Colección: Ciencia para todos. Editorial Fondo de Cultura Económica. México, 2005. Puede leerse en línea en
`http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen1/~ciencia2/40/htm/minerva.htm`

[7] A. Jaffe, S. Baouendi and J. Lipman. *Demotion of Mathematics at Rochester Meets Groundswell of Protest*, Notice **43(3)**, 307-313 (1996)

"La historia reciente confirma la interacción entre los conceptos matemáticos fundamentales y los avances de la ciencia y la tecnología. Es imposible tener una universidad lider en ciencia y tecnología sin un fuerte departamento de matemáticas"

Ciertamente no hay necesidad de recurrir a ejemplos foráneos. En nuestro país también han existido intentos de esa naturaleza, ya ocurrió en la Universidad Nacional Abierta, y localmente, en un pasado no muy remoto, se escucharon algunas voces que, aunque tímidas y sin mucho eco, abogaron por el cierre de nuestra Licenciatura en Ciencias Matemáticas. En cualquiera de los casos, los argumentos son esencialmente los mismos: formar a un pequeño grupo de jóvenes, algunos de los cuales pasarán buena parte de sus vidas profesionales tratando de resolver problemas raros sin una posible aplicabilidad, es demasiado costoso.

No es difícil deducir de estos comentarios que ciertamente los objetivos propuestos en la Declaración de Río de Janeiro dejan de ser triviales. De allí que en contra a esas posturas y argumentos que defienden la relación costo-beneficio como principal elemento para la subvención de la actividad científica, se impone la necesidad de implementar mecanismos que permitan a la sociedad percibir con claridad el lugar que ocupa la Matemática en el desarrollo de las ciencias, la tecnología y la cultura. En opinión de Miguel de Guzmán[8], la divulgación de la actividad científica matemática es el más importante de estos mecanismos, pues con su accionar se contribuirá a:

- *"... romper el lastre de prejuicios que vamos arrastrando de una generación a otra en torno de la Matemática y que, en muchos casos, es causa de los bloqueos con respecto a ella colacados en la mente de los niños ..."*

- *"... mejorar las condiciones culturales de muchas personas, abriéndoles los ojos a la realidad de la cultura actual, haciéndoles capaces de proveerse de herramientas indispensables para muchas de las actividades de las profesiones del futuro ..."*

- *"... que la sociedad sea capaz de valorar de modo adecuado el papel de la Matemática hoy día, de tal modo que se percate que incluso muchos aspectos podrán parecer ociosos del quehacer matemático, posiblemente tendrán su fruto práctico ..."*

Aprovecharemos este ensayo para ofrecer una pequeña contribución en la dirección señalada por Guzmán; no sin antes intentar entender, sin animos de

[8]Miguel de Guzmán (1936-2004) filósofo y matemático español, forjador de reconocidos matemáticos de habla hispana. Sus ideas sobre Educación Matemática y Didáctica de la Matemática han inspirado a varias generaciones de profesionales dedicados a la enseñanza de esta ciencia en todos sus niveles. Escribió un considerable número de artículos y libros sobre esos temas. En el sitio web http://www.mat.ucm.es/~guzman/ aún se mantiene abierta parte de destacada obra.

justificar, las razones que conducen a los sectores antes mencionados a imponer limitaciones de carácter económico al fomento de la actividad matemática y demás ciencias básicas.

La primera de esas razones es de carácter intrínseco debido a las características que hacen a la Matemática una ciencia abstracta; veamos. Sus objetos de estudio son en su mayoría ideales o virtuales, no existen como realidades físicas; aunque desde la antigüedad muchas de las creaciones matemáticas han estado inspiradas por problemas prácticos: la Aritmética nació de las necesidades de contar y sumar; mientras que las necesidades de medir líneas y superficies, actividades ligadas a las tareas agrícolas, estimuló la creación de los elementos que originaron la Geometría. También es cierto que buena parte de los objetos de estudio son definidos sobre los ya existentes. Esto sucede en una cadena que aumenta el nivel de abstracción a medida que nuevos eslabones son anexados. Sobre estas construcciones se buscan relaciones entre los distintos objetos, se investiga sobre sus propiedades comúnes, se engloban en teorías que explican esas relaciones y propiedades; finalmente, se investiga sobre qué supuestos se cumplen algunas de esas propiedades, en procura de emplear ellas para caracterizar todos los objetos que las satisfacen. Todo este proceso de creación intelectual se realiza mediante un conjunto de razonamientos abstractos conocidos como método axiomático deductivo. A partir de algunas verdades evidentes, axiomas previamente establecidos, este método se emplea para obtener nuevas verdades, propiedades y objetos. El enunciado que establece una conclusión obtenida mediante este método deductivo es denominado *teorema*. Al conjunto de pasos y conclusiones previas, deducidas por el empleo de este método, fue bautizada por los griegos como *demostración*. La manera de cómo se crea nuevo conocimiento matemático marca una notable diferencia con los procederes de otras ciencias, en las que ocurre, por ejemplo, que algunas de sus verdades no tienen vigencia invariable con el tiempo. No sucede lo mismo con las conclusiones matemáticas, que por causa de su naturaleza abstracta y a la forma como se certifican sus resultados, las convierte en conocimientos universales e irrefutables, independientes de todo credo político, religioso o económico. El conocimiento matemático es acumulativo, nueva matemática es construida sobre la anterior sin que esta última pierda su validez. La literatura matemática es extraordinariamente estable y segura; además, mantiene un rastro imborrable en muchas otras ciencias y sus aplicaciones. Con respecto a ello se distinguen las palabras de uno de los más destacados físicos del siglo XX, Eugene Wigner[9], quien en su artículo *La irrazonable efectividad de la Matemática en las Ciencias Naturales*[10], expuso:

[9]Eugene Wigner (1902-1995) físico y matemático hungaro, en 1963 recibió el Premio Nobel de Física por sus contribuciones a la teoría atómica.

[10]The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Communications on Pure and Applied Mathematics **13(1)** (1960), 1-14

"El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemática para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos estar agradecidos por ello, con la esperanza que continúe siendo válido en el futuro y que se extienda a otras ramas del conocimiento"

El otro ingrediente también es de vieja data. Desde hace mucho tiempo ha existido una marcada tendencia en querer establecer una separación de la actividad matemática en pura y aplicada, lo cual ha generado controversias que en ocasiones muestra a los radicales puros despreciando a quienes se dedican a las aplicaciones prácticas de las matemáticas, incluso tildándoles de mercantilistas y utilitarios; mientras que los antipuristas ortodoxos consideran inútil al conocimiento matemático que no tiene una aplicación directa para resolver los problemas que la sociedad plantea. Como muestra de esta rivalidad, catalogada de filosófica, presentaremos declaraciones que en cierta forma marcaron la tendencia de ambas vertientes, justamente en una época caracterizada por la crítica a los fundamentos de la Matemática, lo que condujo a la consolidación de un lenguaje y nomenclatura precisas para el desarrollo tanto de la Matemática como de otras ciencias.[11] Reproducimos palabras de dos grandes matemáticos y hombres de ciencias de finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX: el francés Henri Poincaré[12] y el alemán Felix Klein[13], ambos figuras centrales en el primer congreso internacional de matemáticos celebrado en Zurich en 1897. A Poincaré le correspondió la conferencia inaugural, allí manifestó:

"Las combinaciones que se pueden formar con números y símbolos son infinitas. Entre tanta espesura, ¿cómo escogeremos las merecedoras de nuestra atención? ¿nos dejaremos llevar por nuestros caprichos y manías? Esto nos llevará sin dudas a unos más lejos de los otros, y rápidamente dejaremos de entendernos entre nosotros. La Física no solo evitará que podamos perdernos, sino que incluso nos protegerá de un peligro aún más espantoso, que permanezcamos dando vueltas en círculos para siempre. La historia demuestra que la Física no solo nos fuerza a elegir, sino que nos ha impuesto direcciones en las que no hibiesemos ni tan siquiera soñado de otra manera. ¡Que podrá ser de mayor utilidad!"

[11]Un interesante relato sobre esta época crítica de la Matemática puede leerse en el valioso artículo *"David Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría"* de Leo Corry, publicado en el Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, volumen IX, No. 1, año 2002.

[12]Henri Poincaré (1854-1912) matemático y notable filósofo. En 1887 el rey Oscar II de Suecia ofreció un premio por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomia: ¿es estable el sistema solar? Aunque Poincaré recibió el premio, no respondió la pregunta; sin embargo el desarrollo teórico presentado en el manuscrito del mencionado premio, colocó las bases y fundamentos de dos grandes áreas de la matemática moderna: la topología y la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que a su vez sirvió de punto de partida de la teoría de los sistemas dinámicos

[13]Felix Klein (1849-1925) importante geómetra y unificador de las teorías en geometría; luego de demostrar que las geometrías métricas, euclidianas o no, son casos particulares de la geometría proyectiva, en 1872 presentó el Programa Erlangen, con el cual se puso final a la separación entre las geometrías pura y analítica.

Por su parte Klein, a quien le correspondió la conferencia de clausura de ese congreso, expresó:

> *"No dejaré sin mencionar la cuestión general de la estrecha relación que existe entre las matemáticas y sus aplicaciones, tema central de la brillante exposición de Monsieur Poincaré. Nadie está más convencido que yo de la importancia de esta estrecha relación; sin embargo, delante de la asamblea de este congreso matemático, me parece apropiado mencionar otro aspecto, y es que existe algo llamado Matemática Pura, que es, de hecho, el corazón de nuestra ciencia, y su prosperidad es un prerrequisito para que todas las otras actividades de matemáticas no decaigan a un nivel más bajo"*

Obviamente las anteriores palabras no solo evidencian la rivalidad entre Poincaré y Klein, también muestra la pugna entre las vertientes pura y aplicada de la Matemática. Polémica esta nada nueva; los estudiosos de la Filosofía hacen notar que en el escrito *"Philebus"*, de Platón, se recoge el siguiente diálogo entre Sócrates y Plutarco.

- **Sócrates:** Plutarco, ¿existe acaso dos tipos de aritmética: la de la gente y la de los filósofos? ¿y qué me dices del arte de contar, o de las medidas usadas en la construcción y el comercio, en comparación con la geometría filosófica y los cálculos elaborados? ¿debemos hablar de una de ellas o de las dos?

- **Plutarco:** Yo diría que cada una de ellas son las dos.

3. Sobre la utilidad de la Matemática

Basados en los parágrafos precedentes, asumimos dos acciones que lucen fundamentales: en primer lugar, entender que los aspectos cualitativos de la Matemática pueden introducir ruidos tanto en quienes diseñan los programas de subvenciones y apoyos económicos para el desarrollo de las actividades científicas, como en quienes realizan las evaluaciones que conducen a la entrega de esos aportes; y por otra parte, aportar con estas líneas un conjunto de ejemplos, reducido por cierto, para mostrar algunos de los avances que ha tenido la ciencia y la tecnología gracias a los aportes teóricos de la Matemática.

Comenzaremos con un ejemplo emblemático; se trata de la Teoría de Números y unos de sus grandes representantes: el matemático inglés Godfrey Hardy, quien en uno de sus libros, *Autojustificación de un matemático*, Ariel, Barcelona (1981)[14], señala

[14] A Mathematician's Apology, es el nombre original de este libro publicado por primera vez en 1940

> *"Una ciencia es considerada útil si su desarrollo tiende a acentuar las desigualdades existentes en la distribución de la riqueza, o bien, de un modo más directo, fomenta la destrucción de la vida humana"*

En esa misma obra, Hardy dedica duras palabras a su labor científica, se vanagloria de haber dedicado gran parte de su vida a la creación de un arte abstracto como la matemática pura, y en particular al desarrollo de la Teoría de Números, de la cual decía que *"... por causa de su suprema inutilidad, es la reina de las matemáticas ..."* No obstante, cuando se examina esa reina, se percibe que por causa de sus aportes teóricos, tales como las factorizaciones en números primos y los códigos que ellos generan, ella es pieza fundamental en la conducción de transmisiones electrónicas seguras sin las cuales las transacciones bancarias no serían posibles.

Otro ejemplo interesante es la utilización de los números complejos y las teorías analíticas sobre ellos construidas. Entre los siglos XVII y XIX se establecieron los fundamentos del sistema numérico formado por estos números, y de lo que se conoce con el nombre de Análisis complejo. En nuestros días es impensable el diseño y construcción de motores eléctricos sin el empleo de estos irreales números, como tampoco serían posibles muchos de los resultados fundamentales del electromagnetismo, la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica; aplicaciones que jamás pensaron los creadores de estos fundamentos matemáticos.

En el ámbito de la Computación moderna, esta no existiría sin el código binario, descrito por Leibniz en el siglo XVII; por otro lado, con el apoyo de las Álgebras Booleanas, inventadas a mediados del siglo XIX, fue posible, gracias a valiosos teoremas de Claude Shanon (1916-2001), la implementación de los circuitos digitales, tecnología básica fundamental para la construcción de los computadores. No podemos dejar de decir que la Teoría de la Computación está basada en la Matemática Discreta, y que de esa relación nació la llamada Teoría de la Complejidad, la cual ofrece una medida matemática para identificar diferentes clases de computación. Adicionalmente, la Computación Cuántica (aún no desarrollada físicamente) está siendo construida con grandes aportes de la Física y la Matemática; con su futura implementación tecnológica podrán ser resueltos problemas que no son posibles abordar con la teoría de computación existente.

La relación entre la Biología y la Matemática es también muy notoria y fructífera, varios ejemplos pueden ser citados; de hecho existe un área del conocimiento denominada Biomatemática, de la que Vito Volterra[15] es uno de

[15] Vito Volterra (1860-1940) excepcional científico italiano, fue uno de los principales impulsores del desarrollo científico de Italia y España. Fomentó el empleo de la Matemática en la resolución de problemas ligados a la Física, Biología y Economía, en tanto que distinguia la actividad matemática para tales fines. Fue un notorio activista antifascista, lo que le costó su puesto de trabajo científico en las universidades italianas. Una interesante biografía, aunque corta, puede leerse en el artículo de Ana Millán Gasca, *Vito Volterra.* Revista Investigación

sus pioneros. Este físico y matemático hizo grandes aportes al desarrollo de las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales; además, se encuentra entre los precursores del Análisis funcional, cuyo germen fue proporcionado por sus estudios acerca de las ecuaciones integro-diferenciales. Curiosamente Volterra empleó estas herramientas matemáticas, usadas inicialmente en el estudio de problemas físicos, para estudiar problemas biológicos, más específicamente, la evolución de las poblaciones de peces en el Mar Adriático, de cuyo análisis matemático nació la dinámica de poblaciones. Estos modelos integro-diferenciales, conocidos como modelos de Volterra, han sido extendidos hacia la epidemiología con el estudio de la propagación de enfermedades en poblaciones; por otro lado, la Genética Molecular se ha favorecido con el empleo de estos modelos en la interacción depredador-presa, en la que los depredadores son virus y las presas son células humanas. Ello ha permitido el diseño de medicamentos y su administración, por lo que no resulta sorprendente que importantes avances en la erradicación de virus, como el HIV, tengan sus orígenes en los modelos matemáticos introducidos por Volterra hace más de 80 años.

Otro ejemplo del impacto de la Matemática en la sociedad moderna, popularizado por producciones literarias y cinematográficas, son los aportes que hiciera a las teorías económicas el matemático estadounidense, y Premio Nobel de Economía 1994, John Nash[16]. Su vida es retratada en la película "A Beautiful Mind", basada en la biografía escrita por Sylvia Nasar. A la edad de 21 años, en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nash expuso en su tesis doctoral, con menos de 30 páginas, una solución a juegos estratégicos no cooperativos, hoy día denominada equilibrio de Nash. Se dice que luego de más de 40 años, este equilibrio fue empleado en la negociación de bandas electromágneticas en los Estados Unidos; además, sus teorías de juegos han sido útiles en importantes avances de la genética poblacional, permitiendo la predicción de distintos estados en la competencia entre distintas especies y dentro de ellas.

La relación entre la Física y la Matemática, definida como simbiótica por Poincaré, merece un capítulo aparte: son muchos los volúmenes que podrían escribirse para exponer esa relación. Un ápice de ello lo encontramos en los siguientes hechos. La Física moderna se vería en serios aprietos sin los aportes de la Matemática; por ejemplo, la Teoría de la Relatividad no tendría el desarrollo y profundo impacto científico y tecnológico sin las bases proporcionadas por las geometrías no euclidianas. Por otro lado, en el estudio de uno de los más importantes problemas para los físicos teóricos: la búsqueda de una teoría

y Ciencia, **339**, 71-78 (2009), libre en la web.

[16] John Nash (1928-), destacado matemático con importantes aportes a la Topología, Geometría Algebraica, Teoría de Juegos y Lógica. Durante su estadía como estudiante doctoral en Princeton, evitó asistir a clases y conferencias del instituto; decidió aprender solo, sin la asistencia de profesores, e incluso de libros; las razones: poder desarrollar teorías y conceptos originales. A pesar del reconocimiento de su tesis doctoral con el premio Nobel, el propio Nash afirma que esos resultados no fueron los más relevantes en su carrera

unificada de campos, la Geometría Algebraica tiene una presencia especial, de la que no solamente es favorecida la Física, sino que mucha de la Matemática que se ha creado está relacionada con esa presencia. Como dato resaltante, en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1998, 3 de las 4 medallas Fields[17] correspondieron a matemáticos que trabajaban en áreas fuertemente influenciadas por la Física; adicionalmente se concedió un premio especial por los trabajos desarrollados en Computación Cuántica, cuyas bases están en gran parte en la Mecánica Cuántica. Más recientemente, durante el Congreso Internacional de Matemáticos del año 2010, celebrado en India, 2 de las 4 medallas Fields fueron otorgadas a matemáticos por sus importantes aportes a la Física estadística.

Existen obviamente muchas otras interacciones entre la Matemática y otras ciencias, mediante ellas se abordan, o permitirán abordar, importantes fenómenos que requieren ser entendidos para ofrecer soluciones a problemas que afectan a la sociedad moderna, y por ende brindarle bienestar. Es notoria entonces la imposibilidad de catalogar de inútil, en el buen sentido de la palabra, a la Matemática y su accionar. Por muy abstractas y esótericas que pudiesen lucir, sus resultados no deben ser tildados de impertinentes y de poco impacto para el desarrollo de la humanidad; solo un ser supremo tiene tan elevada capacidad.

Concluimos con una profunda necesidad, digamos que poética, de citar una pequeña parte del libro *"El papel de la Matemática en el desarrollo de la ciencia"*, Alianza Editorial (1991) de Salomon Bochner. En esa obra Bochner relata que en uno de los escritos del obispo Anatolio de Alejandría (siglo III de nuestra era), se cuenta que un desconocido humorista empleaba las siguientes palabras de Homero para describir la Matemática:

> *"Ella, que se alza, pequeña al principio, pero que pronto llega a tocar los cielos con su frente, mientras que sus pies caminan sin cesar sobre la Tierra"*
>
> (Iliada, canto IV)

Neptalí Romero
Departamento de Matemáticas.
Decanato de Ciencias y Tecnología
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado

e-mail: nromero@ucla.edu.ve

[17] La Medalla Fields es el máximo galardon que reciben los matemáticos. Dado que no existe un Premio Nobel de Matemática, se piensa en ella como su equivalente, aunque sus merecedores no deben alcanzar más de cuarenta años de edad. Esta medalla es entregada cada 4 años cuando se celebra el Congreso Internacional de Matemáticos, evento organizado por la IMU

La enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas: una visión personal.*

Rafael Sánchez Lamoneda

Resumen. Cada persona dedicada a las matemáticas tiene su opinión sobre cómo y por qué se debe enseñar. La palabra matemática, proviene del vocablo griego $\mu\alpha\nu\theta\alpha\nu\varepsilon\iota\nu$, que significa *aprender*. Lo que hay que aprender. Eso puede explicar en un principio por qué en todas las épocas, los estudiantes han tenido que enfrentarse con las matemáticas y aprender de ellas lo mejor posible. Sin pretender ser exhaustivo sobre un tema tan discutido y amplio, en esta conferencia hablaré sobre matemáticas, su contenido, método y significado, para tratar de explicar mi punto de vista sobre su enseñanza y su aprendizaje.

Abstract. Every person engaged in Mathematics has an opinion about how and what should be taught. The word mathematics comes from the Greek word $\mu\alpha\nu\theta\alpha\nu\varepsilon\iota\nu$, which means *learn*. What you need to learn. That may explain at first that in all ages, students have had to deal with mathematics and learn the best from it. Without being exhaustive on an issue as discussed and broad as this, in this paper I will talk about math, content, method and meaning, to try to explain my view of its teaching and learning.

1 Introducción

Sobre la enseñanza de las matemáticas se ha dicho y escrito mucho, y afortunadamente aún queda mucho por decir. La didáctica de las matemáticas es un campo vivo y se puede decir que, como en las matemáticas, hay muchos problemas abiertos. Ante todo aclaro al auditorio que yo no soy un experto en el tema, me dirijo a ustedes con solo el respaldo de mi experiencia como matemático y como profesor de matemáticas, especialmente en la universidad y en las Olimpiadas Matemáticas.

*Conferencia pronunciada por el autor en La Asunción, Paraguay, 21 y 22 de septiembre, de 2010.

Quiero comenzar con dos preguntas:

- ¿Cómo hacer para educar matemáticamente bien al ciudadano de hoy y del mañana cercano?
- ¿Qué significa educar matemáticamente bien?

No tengo la pretensión de dar respuesta total y definitiva a estas dos preguntas y tampoco lo pretendo hacer desde la óptica particular de un profesor de escuela secundaria, pues no lo soy. Quiero si, llamar la atención sobre estos dos aspectos, pues creo que son importantes como reflexión que debe hacer un matemático, y por matemático, me refiero en un sentido amplio, no solo a quién hace investigación en matemáticas.

En líneas generales pienso que un matemático tiene tres tareas por delante, puede que haga las tres, o solo una de ellas:

- Conocer y aplicar las matemáticas.
- Investigar.
- Enseñar.

Creo que estas tres tareas las menciono influenciado por tres preguntas que a uno, como matemático, le hacen con frecuencia:

- ¿Para qué sirven las matemáticas?
- ¿Por qué se enseña matemáticas?
- ¿Qué quiere decir investigar en matemáticas? ¿Acaso hay unas matemáticas nuevas?

2 Conocer y Aplicar las Matemáticas

Desde la antigüedad aparecen las matemáticas en los pensa de estudios. La palabra, matemática, proviene del vocablo griego $\mu\alpha\nu\theta\alpha\nu\varepsilon\iota\nu$, que significa *aprender*. Lo que hay que aprender. En las obras de Platón tenemos referencias claras de esto, al dar espacio a las matemáticas y a la geometría dentro de lo que un ciudadano debía aprender.

Ahora bien, ¿qué significa conocer las matemáticas? ¿Debo conocerlas para aplicarlas bien o me basta con saber una serie de fórmulas y recetas que pueda aplicar cuando me haga falta?

Por muchos siglos las matemáticas han sido vistas como una ciencia exacta, quizás la influencia de los griegos fue muy importante para este punto de vista.

Las matemáticas son una ciencia exacta, $2 + 2 = 4$. Sus aplicaciones, originalmente estaban en el mundo de la física y de la ingeniería. Sobre todo luego de la creación del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz, lo cual permitió estudiar el movimiento, la trasmisión del calor, de electricidad, de luz. Es en el siglo XX cuando se toma conciencia de la importancia de las aproximaciones. Con la aparición de las probabilidades y la estadística, las matemáticas se convierten también en una ciencia no exacta y pasan a dotar de una poderosa herramienta a las ciencias del hombre: economía, sociología, biología, medicina, predicción del clima, distribución del tráfico, fluidez de las colas, trasmisión segura de datos, y muchas cosas sobre las cuales volveré más adelante.

Ahora bien, para lograr estas aplicaciones, se ha requerido un conocimiento profundo de las matemáticas necesarias, no bastó con una serie de recetas o listas de fórmulas que el usuario debe memorizar para aplicar cuando las necesite.

Conocer las matemáticas, y con eso me refiero a una pequeña parte, pues es imposible saber todo, significa tener una compresión de ella, de sus contenidos, métodos y significado. Las ideas matemáticas, aunque muchas veces, quizás la mayoría de ellas, aparecen luego de profundas reflexiones sobre fenómenos matemáticos mismos y sin una motivación práctica inicial, gozan de una generalidad y abstracción, que es lo que permite que luego puedan ser aplicadas en actividades muy distintas del quehacer humano. Volviendo al cálculo infinitesimal, el poder abstraer la noción de derivada como una razón de cambio, es lo que le da la fortaleza a este concepto, para poder aplicarlo en economía, física, o biología, por solo mencionar tres áreas importantes de aplicación.

El poder de la abstracción y de la generalización, hace a las ideas matemáticas, herramientas poderosas para resolver problemas cuya apariencia inicial, puede ser muy distinta.

3 Investigar

He perdido la cuenta de la cantidad de veces que amigos, conocidos, incluso colegas universitarios no científicos, se asombran cuando saben que hago investigación en matemáticas, muchos en tono de broma preguntan, ¿es que dos más dos no es cuatro? Para la mayoría de las personas, las matemáticas son algo ya establecido, por ello no cabe la idea de lo nuevo. Por eso quizás, causó tanto revuelo, incluso en el mundo no académico, la demostración del Teorema de Fermat por Andrew Wiles a finales del siglo pasado, más aún, cuando se le decía a la gente que ese había sido un problema sin solución por más de 300 años.

Lo cierto es que las matemáticas están viviendo una época dorada. Los avances en los últimos 20 años han sido extraordinarios. En esto ha tenido una participación especial la ayuda maravillosa dada por las computadoras. El final del siglo XX y el comienzo del XXI han sido testigos de la solución de varios de los mayores rompecabezas de las matemáticas, el ya mencionado Teorema de Fermat, demostrado finalmente por Andrew Wiles y Richard Taylor, y la conjetura de Poincaré, resuelta por Perelman recientemente.

Por mencionar alguna áreas de grandes avances podría indicar las siguientes, sin ser exhaustivo:

- Geometría algebraica y teoría de números. Los resultaods de Wiles y Taylor sobre el Teorema de Fermat.
- Supersimetría. Nuevas técnicas de exploración en esta área que parecen ser características de toda la materia, ayudando al estudio del comportamiento de interacción entre partículas subatómicas, estudios que pueden arrojar luz sobre la comprensión de los comienzos del universo.
- Caos. Estudio de fenómenos no lineales e impredecibles como el clima. Tratando de describir sistemas caóticos o erráticos con ecuaciones matemáticas. El funcionamiento del corazón. Estudios de ecosistemas como los bosques húmedos y selvas tropicales. Simplificación de problemas de tráfico, colas en supermercados, o en bancos.
- Complejidad. Esto tiene que ver con el estudio de la posibilidad de ejecutar algoritmos. Ayudando a los científicos a juzgar la dificultad de los problemas en tiempo de máquina. Cabe destacar que uno podría decir que gracias a preguntas formuladas por David Hilbert a comienzos del siglo XX, se dio origen a la búsqueda de respuestas que llevaron al desarrollo de las computadoras.
- Teoría de ondículas. Cuyo objetivo es simplificar sistemas complejos dando información sobre ellos por medio de ondas, como es el caso por ejemplo, del almacenamiento de huellas digitales.

Todos estos ejemplos muestran la relación de las matemáticas y sus descubrimientos con problemas ligados al desarrollo y la mejora de la calidad de vida y que gracias a la existencia de una gran cantidad de matemáticos dedicados a la investigación, y a la comprensión profunda de los resultados obtenidos, se ha podido llegar a aplicaciones de gran importancia.

La naturaleza de las matemáticas, el análisis objetivo de su utilidad a través del tiempo, nos muestran que hay que apoyar y promocionar la investigación en matemáticas, sin diferenciar si son puras o aplicadas, para recibir los beneficios de este gran caudal de conocimientos en pro de una mejor calidad de vida y capacidad para afrontar problemas de diversa índole.

4 Enseñanza

Los avances mencionados en la sección precedente muestran que las matemáticas han crecido a una velocidad mucho mayor que en cualquier otra época y esto a mi manera de ver, está creando serios problemas en la enseñanza de las matemáticas, pues las subespecialidades mencionadas y muchas otras de igual importancia por su aplicabilidad actual, están muy lejos, no solo de las matemáticas que se enseñan en nuestra educación secundaria, sino también de las carreras en las universidades.

Esto no es un problema nuevo, aunque si su magnitud. los avances en matemáticas, los nuevos descubrimientos, la mayoría de las veces aparecen con demostraciones confusas, muy técnicas, cuya comprensión está al alcance de pequeños grupos de especialistas. Por eso una labor de gran valor es el estudio de estos resultados, por parte de los matemáticos y la búsqueda de su mejor comprensión y su posible simplificación, de manera que estas nuevas ideas puedan ser accesibles a una mayor cantidad de personas, garantizando su perdurabilidad y aplicabilidad.

Es responsabilidad de todos los que enseñamos matemáticas, pensar sobre cómo hacer para que los ciudadanos que estamos formando, puedan tener acceso a resultados matemáticos, pero no solo como algoritmos o conceptos que hay que aprender y memorizar, no, la tarea es más compleja, se trata de hacer comprender las ideas, de lograr que quien aprende matemáticas comprenda la razón de ser de los conceptos, la importancia que tienen dentro de la teoría en la cual se encuentran. Solo con una comprensión así se logra entender y disfrutar la verdadera esencia de las matemáticas.

No quiero que me interpreten mal, que piensen que pido que a los profesores de secundaria se les de una formación matemática profunda, abstracta, no, lo que me motiva a expresar lo dicho es mi convicción de que una compresión cabal de las matemáticas, producirá mejores ciudadanos. La enseñanza de las matemáticas tiene un gran valor social, este es el aprender ante los problemas, a buscar soluciones no triviales,y eficientes. Enseñar a los ciudadanos a mirar a los laboratorios y grupos de investigación, como lugares donde surgen ideas que nos permitirán como sociedad la resolución de problemas prácticos.

Para aclarar mejor lo que quiero decir con una solución trivial, supongamos que tenemos una balanza de dos platos, sin pesas y nueve monedas, una de ellas defectuosa y la manera de reconocerlo es porque tiene un peso diferente a las otras ocho. La solución trivial es comparar sus pesos uno a uno y concluir. Sin embargo un matemático se preguntará más, ¿ Cuál será la menor cantidad de pesadas que debo hacer para hallar la solución? ¿ La moneda defectuosa será más o menos pesada que las ocho restantes? Un razonamiento matemático, sencillo, pero no trivial nos lleva a ver que con tres pesadas y no menos, podemos resolver el problema.

Otro ejemplo lo tenemos cuando estamos en la cola de un banco esperando para ser atendidos y de inmediato alguien dice que sería necesario abrir más taquillas, para atender más rápido al público. Esa es la solución trivial, más costosa y a la larga muy ineficiente. La teoría de colas muestra por medio de modelos matemáticos, que es mucho mejor diversificar el trabajo que se hace en cada taquilla, distribuir mejor los horarios de atención, por citar dos vías de búsqueda no trivial de la solución del problema.

Estamos entonces ante un gran reto, un reto a nuestro ingenio pedagógico, a nuestra habilidad didáctica.

Se requiere de un gran esfuerzo de matemáticos y maestros, que puedan abordar con éxito estos problemas, que nos permitan motivar a nuestros estudiantes hacia un mejor aprendizaje de las matemáticas y a que los más talentosos quieran dedicarse al estudio de las matemáticas, con miras a colaborar en el desarrollo de esta ciencia.

Actividades como las olimpiadas matemáticas, pueden ser de gran ayuda, nos permiten popularizar las matemáticas, llevarlas al gran público de una manera no convencional, que puede ser divertida, que puede permitir a un joven, a muy temprana edad, descubrir sus habilidades para el estudio de esta ciencia, que da a los profesores y maestros una gran cantidad de problemas novedosos, e interesantes y a los planificadores un caudal de información muy útil a la hora de diseñar políticas y planes de trabajo, para mejorar la calidad de la enseñanza.

Tenemos un gran reto por delante, las palabras de Galileo siguen teniendo una gran fuerza:

El libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas, sin el cual no es posible entender una palabra y se andará siempre como en un obscuro laberinto.

Escuela de Matemáticas.
Facultad de Ciencias. UCV.
Caracas. Venezuela.

e-mail: rafael.sanchez@ciens.ucv.ve

INFORMACIÓN NACIONAL

Caracas, 10 de Febrero de 2011.

Dr. Guillermo Barreto
Director General de Investigación en Ciencia y
Tecnología del Ministerio del Poder Popular Para
Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias.

Estimado Dr. Barreto.

La Asociación Matemática Venezolana frente a la convocatoria de Proyectos Estratégicos en el marco de la LOCTI y la convocatoria del Programa de Estímulo a la Investigación, nos dirigimos a ustedes a fin plantearles lo siguiente:

En las recientes convocatorias de Proyectos Estratégicos en el marco de la Ley Orgánica de Ciencia, Tecnología e Innovación (LOCTI) y del Programa de Estímulo a la Investigación (PEI) se restringe la consideración de actividades de investigación e innovación a aquellas que están en áreas senaladas como estratégicas. Pareciera que unicamente las actividades enmarcadas en dichas áreas reciben financiamiento.

Al no estar las Matemáticas incluidas bajo ninguna modalidad entre las áreas indicadas por el Ministerio del Poder Popular para Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias, nos preocupa que no haya mecanismos de financiamiento para proyectos en nuestra área.

Tenemos el temor que no sean fomentadas por el Ministerio actividades tan importantes para la formación de recursos humanos como la Escuela Venezolana de Matemáticas, que lleva en su larga historia veintitrés ediciones anuales, y los distintos proyectos de investigación, desarrollo y divulgación que realizan los miembros de nuestra comunidad matemática y los estudiantes que atendemos en programas de licenciatura y postgrado. En relación con los estudiantes, nuestra mayor inquietud es que puedan dejar de recibir apoyo financiero para la realización de estudios de postgrado y pasantías en centros de investigación. Así mismo nos preocupa que los matemáticos activos en investigación sean excluidos del PEI.

Además deseamos senalar que, en el caso de investigadores e innovadores en nuestra disciplina, algunos de los criterios establecidos en el PEI no se ajustan a las peculiaridades de nuestra actividad. Específicamente:

(1) Los autores en artículos de investigación y reportes técnicos en Matemáticas aparecen tradicional y universalmente en estricto orden alfabético por lo que no se aplica la valoración proporcional de la contribución de cada autor(a) en el desarrollo de los productos de investigación.

(2) No es habitual, por las características intrínsecas de nuestro campo, que los matemáticos realicen investigación interdisciplinaria.

La historia demuestra a través de multiples ejemplos que la innovación es un proceso que, aunque complejo y a veces azaroso, sólo es posible en un marco de estímulo al quehacer científico que favorezca el desarrollo y consolidación de conocimientos que van desde lo abstracto hasta las aplicaciones concretas. En nuestra opinión, para enfrentar el reto de la innovación, la ciencia básica, en general, y la matemática como parte de ella, deben contar con apoyo continuo. En tal sentido, las políticas publicas de fomento de las actividades científicas en áreas estratégicas deberían estar acompanadas por estímulos a la actividad en ciencias básicas.

Por estas consideraciones, solicitamos información sobre la pertinencia de la actividad matemática en el país, así como el apoyo que nuestra comunidad podrá esperar del Ministerio del Poder Popular para Ciencia, Tecnología e Industrias Intermedias.

Atentamente,

Dr. Rafael Sánchez Lamoneda
Presidente AMV.

La esquina olímpica

Rafael Sánchez Lamoneda

El primer semestre del año 2011 está por terminar. Reseñamos aquí las actividades de este período. Comenzamos por un breve informe sobre la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM. La misma acaba de finalizar con sus tres etapas desarrolladas satisfactoriamente. La primera prueba, el Canguro Matemático se realizó el jueves 17 de Marzo. En esta etapa participaron 58.894 alumnos de bachillerato, representando a 21 estados del país. Si incluimos la cifra de alumnos de primaria que también participaron en el Canguro, llegamos a 149.196 estudiantes. Este año el Canguro Matemático fue organizado en al menos 49 países de cuatro continentes y aunque a la fecha de escribir esta reseña no tenemos las cifras oficiales, se debe haber superado los seis millones de participantes. La segunda fase de la OJM fue la Prueba Regional, se organizó en los 21 estados el día 7 de Mayo y participaron 4835 estudiantes. Ellos recibieron medallas de oro, plata y bronce y los ganadores de medalla de oro pasaron a la fase final, la Prueba Final Nacional, que se realizó el 11 de Junio en la Universidad Simón Bolívar. En esta fase contamos con un jurado examinador de lujo y quiero aprovechar la oportunidad para agradecerles a todos ellos, María Morán, Carín Ludeña, Mairene Colina, Cristina Balderrama, Aurora olivieri, Mary Acosta, Carmen Pérez, Tomás Guardia, Juan Guevara, José Mijares, Miguel Méndez, Luis Rodríguez, Víctor Caruci, Alfredo Ríos, José Infante, Antonio Di Teodoro, Javier Villamizar, Lisandro Alvarado, Darío Durán y el coordinador José Nieto. El cierre de la actividad fue en el auditorium de la Fundación Empresas Polar, donde los jóvenes ganadores recibieron sus medallas de oro, plata o bronce y menciones honoríficas, así como dos premiso especiales ya tradicionales, el premio a la mejor prueba, otorgado por la Fundación Empresas Polar, que lo ganó el joven de segundo año de bachillerato Luis Ruiz del colegio La Colina de Barquisimeto y el premio de la UNEXPO a la respuesta más creativa, ganado por la estudiante de tercer año de bachillerato Rubmary Rojas, del colegio Divina Pastora, también de Barquisimeto. Todos los problemas de la OJM 2011 se pueden consultar en nuestra web, www.acm.org.ve.

La escena internacional apenas comienza. El pasado 21 de Mayo se organizó en 6 ciudades del país, Porlamar, Maracaibo, Valencia, Barquisimeto, Puerto Ordaz y Caracas, la Olimpiada de Mayo, con la participación de más de 200 alumnos menores de 16 años, los resultados los tendremos a finales de Julio, cuando desde Argentina, país que organiza la competencia nos envíen la información. La XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe se celebra este año del 16 al 26 de Junio en Colima, México y mientras escribo esto, nuestro equipo está presentando la segunda prueba de la competencia. La primera fue el día de ayer, pero aún no hay información al respecto. El equipo está conformado por los alumnos, Rubmary Rojas, mencionada antes, Evelín Hernao, del colegio Altamira de Maracaibo y Sergio Villarroel, del colegio San Lázaro de Cumaná. Los profesores son José H Nieto e LUZ, jefe de la delegación y Carmela Acevedo, estudiante de la licenciatura de matemáticas de la UCV.

La Olimpiada Internacional de Matemáticas será en Amsterdam del 12 al 24 de Julio y llevaremos un equipo de dos estudiantes, Diego Peña del colegio Los Hipocampitos, estado Miranda y Carlos Lamas del colegio Independencia de Barquisimeto. La tutora es la profesora Laura Vielma, de la Academia Washington y alumna del doctorado en la USB y el jefe de la delegación quién escribe esta reseña, Rafael Sánchez de la UCV.

De nuevo queremos señalar el apoyo recibido por nuestros patrocinadores, la Fundación Empresas Polar, el Banco Central de Venezuela, la Fundación Amigos de Ciencia, Facultad de Ciencias de la UCV, Acumuladores Duncan, Distribuidora Titán, Transporte Ayacucho, MRW, la Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman, y la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales. También queremos agradecer a las Universidades e Instituciones que nos apoyan para la organización de todas nuestras actividades, UCV, USB, UNIMAR, LUZ, URU, UPEL, UCOLA, UNEXPO, UDO. Muchas gracias a todos.

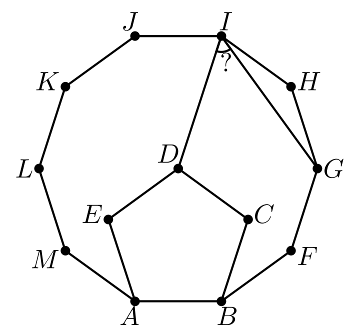
Finalizamos con la prueba presentada por los alumnos de quinto año de bachillerato en la Final Nacional de la OJM 2011.

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Prueba Nacional — Caracas, 11 de junio de 2011
Quinto Año

Problema 1

Halle todos los primos $p \geq 2$ tales que $11p - 8$ es un cubo perfecto.

Problema 2



En la figura de la derecha $ABCDE$ es un pentágono regular y $ABFGHIJKLM$ es un decágono regular.
(a) Pruebe que D es el centro del decágono,
(b) Calcule la medida del ángulo $\angle DIG$.

Problema 3.
Cada entero positivo $(1, 2, 3...)$ se pinta de amarillo, azul o rojo, de modo que haya al menos un número de cada color. ¿Es posible hacer esto de manera que, para cada par de números de diferente color, su suma sea del color diferente al de ambos sumandos?

Problema 4.
Cada uno de los miembros de la familia de Luis tomó café con leche en el desayuno. Todos tomaron igual cantidad, aunque la proporción de café y leche variaba en cada taza. Si Luis tomó un cuarto del total de la leche y un sexto del total del café,
(a) ¿Cuántos miembros hay en la familia de Luis?
(b) ¿En promedio, cuál era el porcentaje de leche en el café con leche?

Es muy importante que justifique completamente cada respuesta dada a los problemas de esta prueba.
Valor de cada problema: 7 puntos
Duración de la prueba: 3 horas y media

Rafael Sánchez Lamoneda
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UCV

e-mail: rafael.sanchez@ciens.ucv.ve

XXIV EVM–EMALCA 2011

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Mérida, 4 al 10 de septiembre de 2011

Cursos

I La tricotomía de Zilber: una breve introducción geométrica.
Andrés Villaveces
(Universidad Nacional, Colombia)

II Introducción al Método de Elementos finitos: un enfoque matemático.
Giovanni Calderón
(Universidad de Los Andes, Venezuela)

III Introducción a la Teoría Espectral de Dígrafos.
Juan Rada y Alfredo Ríos
(Universidad Simón Bolívar, Venezuela)

IV La Entropía Topológica como medida de desorden en Sistemas Dinámicos.
Rafael Labarca
(Universidad de Santiago de Chile, Chile)

Organización

Comité Organizador

- Neptalí Romero , Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado
  nromero@uicm.ucla.edu.ve
- Oswaldo Araujo, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes
  araujo@ula.ve
- Carlos A. Di Prisco, Departamento de Matemáticas, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
  cdiprisc@ivic.gob.ve
- Mariela Castillo, Universidad Central de Venezuela
  mariela.castillo@ciens.ucv.ve

Comité Cientfico

- Stefania Marcantongini, IVIC, Departamento de Matemáticas, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas
  smarcant@ivic.gob.ve

- Mariela Castillo, Universidad Central de Venezuela
  mariela.castillo@ciens.ucv.ve

- Neptalí Romero, Universidad Centro Occidental Lisandro Alvarado
  nromero@uicm.ucla.edu.ve

- Carlos Uzcátegui, Universidad de Los Andes
  uzca@ula.ve

- Vladimir Strauss, Universidad Simón Bolívar
  str@usb.ve

- Ennis Rosas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente
  erosas@sucre.udo.edu.ve

Comité Organizador Local

- Oswaldo Araujo (Coordinador), Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes
  araujo@ula.ve

- Blasdimir Ruiz
  bladismir@ula.ve

- Luis González, Universidad de Los Andes.
  lgonza@ula.ve

AGRADECIMIENTO

La foto de la portada es cortesía del Dr. Mario Briceño Perozo publicada en el libro, *Caudillismo y nacionalismo, vida y acción de José Ignacio Lares*, de Rafael Ramón Castellanos, Caracas, 1994.

El Boletín de la Asociación Matemática Venezolana está dirigido a un público matemático general que incluye investigadores, profesores y estudiantes de todos los niveles de la enseñanza, además de profesionales de la matemática en cualquier espacio del mundo laboral. Son bienvenidos artículos originales de investigación en cualquier área de la matemática; artículos de revisión sobre alguna especialidad de la matemática, su historia o filosofía, o sobre educación matemática. El idioma oficial es el español, pero también se aceptan contribuciones en inglés, francés o portugués.

Todas las contribuciones serán cuidadosamente arbitradas.

El Boletín publica información sobre los eventos matemáticos más relevantes a nivel nacional e internacional, además de artículos de revisión y crítica de libros de matemática. Se agradece el envío de esta información con suficiente antelación.

Todo el material a ser publicado es revisado cuidadosamente por los editores. Sin embargo, el contenido de toda colaboración firmada es responsabilidad exclusiva del autor.

Cualquier colaboración debe ser enviada al Editor, preferiblemente por correo electrónico (via bol-amv@ma.usb.ve) como archivo postscript, pdf, o un dialecto estándar de TeX. Las colaboraciones en forma impresa deben enviarse por triplicado con figuras y símbolos cuidadosamente dibujados a la Dirección Postal. Para la preparación del manuscrito final recomendamos y agradecemos usar los archivos de estilo LaTeX del Boletín que se encuentran en su página web.

El precio actual de un ejemplar es de Bs.F. 10 (US$ 10).

The Boletín de la Asociación Matemática Venezolana (Bulletin of the Venezuelan Mathematical Association) is address to a broad mathematical audience that includes researchers, teachers and students at all collegiate levels, and also to any mathematics professional wherever in the labour world. We welcome papers containing original research in any area of mathematics; expository papers on any topic of mathematics, its history, philosophy, or education. The official language is Spanish, but contributions in English, French or Portuguese are also acceptable.

All contributions will be carefully refereed.

The Boletín publishes information on any relevant mathematical event, national or international, and also book reviews. We appreciate receiving this type of information with plenty of time in advance. All material to be published is carefully revised by the editors. Nonetheless, the content of all signed contributions is of the exclusive responsability of the author. All contributions should be sent to the Editor, preferably by email (via bol-amv@ma.usb.ve) in postscript, pdf, or any standard self-contained TeX file. Submissions in printed form should be sent in triplicate with figures and symbols carefully drawn to our Postal Address. For the preparation of the final manuscript we recommend and appreciate the use of the appropriate LaTeX style file of the Boletín, which can be downloaded from its web page.

The current price for one issue is Bs.F. 10 (US$ 10).

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Apartado 47.898, Caracas 1041–A, Venezuela
Tel.: +58-212-5041412. Fax: +58-212-5041416
email: bol-amv@ma.usb.ve
URL: http://boletinamv.ma.usb.ve/

Impreso en Venezuela por Editorial Texto, C.A.
Telfs.: 632.97.17 – 632.74.86

Boletín de la Asociación Matemática Venezolana
Volumen XVIII, Número 1, Año 2011