ARTÍCULOS

La familia de bases de una media continua y la representación de las medias cuasiaritméticas

Lucio R. Berrone* y Gerardo E. Sbérgamo**

Resumen. Como desarrollo de la teoría de iteraciones diádicas de una función, se presenta la noción de familia de medias base de una media continua y simétrica. Además de permitir una solución satisfactoria a la cuestión de falta de unicidad esencial en la representación de las medias cuasiaritméticas, el concepto de familia base ofrece una herramienta adecuada para utilizar la teoría de iteración en la construcción de soluciones continuas para la ecuación funcional de autoconjugación.

Abstract. As development of the theory of dyadic iterations of a function, we present the concept of base family for continuous and symmetric means. Besides allowing a satisfactory answer to the question of lack of essential uniqueness in quasi–arithmetic representation of the mean, the concept of based family provides an appropriate tool to use the theory of iteration for the construction of continuous solutions for the self–conjugate functional equation.

The theory of dyadic iterations of two-variables continuous means is revised and extended in order to introduce the concept of base family of a continuous mean. Besides other results of interest, a new analytic characterization of quasilinear means is obtained by studying the means admitting a unique base mean

1. Introducción

*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Laboratorio de Acústica y Electroacústica, Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agrim., Universidad Nacional de Rosario, Riobamba 245 bis, (2000) Rosario, Argentina; e-mail address: berrone@fceia.unr.edu.ar

**Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agrim., Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina; e-mail address: gerardosbergamo@hotmail.com

2010 AMS Subject Classifications:

Sea I un intervalo real. Se dice que una función $M : I \times I \to I$ que satisface la desigualdad

$$x < M(x, y) < y, \quad x, y \in I, \quad x < y, \tag{1}$$

es una función *interna* en I. Si además M es continua en $I \times I$, entonces M es una *media continua en* I. Sigue de (1) que las medias continuas son funciones *reflexivas*; es decir,

$$M(x, x) = x, \ x \in I. \tag{2}$$

Una media continua se dice *simétrica* cuando satisface la igualdad

$$M(x, y) = M(y, x), \ x, y \in I. \tag{3}$$

Dada una media continua M y x_0, $y_0 \in I$, las proyecciones M_{x_0}, $M_{y_0} : I \to I$ respectivamente definidas por $M_{x_0}(s) = M(x_0, s)$ y $M_{y_0}(s) = M(s, y_0)$ no son necesariamente funciones crecientes, un hecho ejemplificado por la media antiarmónica

$$M(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}, x, y > 0.$$

Una media M se dice *reducible a derecha* cuando, para todo $y_0 \in I$,

$$M(s, y_0) = M(t, y_0) \Rightarrow s = t;$$

es decir, cuando M_{y_0} es una función inyectiva cualquiera sea y_0. Análogamente, se dice que M es *reducible a izquierda* si, para cada $x_0 \in I$, M_{x_0} es una función inyectiva. Cuando M es reducible a derecha e izquierda simultaneamente se dice que M es *reducible a ambos lados*. Una media continua es reducible a ambos lados si y sólo si sus proyecciones son funciones estrictamente crecientes. Una prueba de este hecho puede verse en [2].

Una clase importante de medias continuas y simétricas son las medias de la forma

$$\mu_\phi(x, y) = \phi^{-1}\left(\frac{\phi(x) + \phi(y)}{2}\right), \ x, y \in I, \tag{4}$$

donde $\phi : I \to \mathbb{R}$, es una función continua y estrictamente monótona llamada *función generadora* (de la media μ_ϕ). Estas medias se denominan *medias cuasiaritméticas* pues resultan de introducir el cambio de escala ϕ en la media aritmética $A(x, y) = (x + y)/2$. La media geométrica G, la media armónica H, la cuadrática Q y muchas otras medias elementales admiten esta representación (see, for example, [5]) que es, sin embargo, no única. En efecto, es bién conocido (véase, por ejemplo, [5] o [3], pág. 246) el siguiente:

Teorema 1 *Sean μ_ϕ y μ_ψ dos medias cuasiaritméticas respectivamente generadas por $\phi : I \to \mathbb{R}$ y $\psi : I \to \mathbb{R}$; entonces $\mu_\phi = \mu_\psi$ si y sólo si existen α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, tales que $\psi = \alpha\phi + \beta$.*

En realidad, la falta de unicidad en la representación (4) es más profunda de lo que muestra el teorema anterior. Por ejemplo, μ_ϕ puede expresarse como

$$\mu_\phi(x,y) = \psi^{-1}\left(\sqrt{\psi\,(x)\,\psi\,(y)}\right),\ x,y \in I, \tag{5}$$

donde $\psi\,(x) = e^{\phi(x)}$; y es claro que, introduciendo un apropiado cambio de escala, μ_ϕ admite parecida representación en términos de cualquier otra media cuasiaritmética definida en I. Desde luego, es la función monótona y continua ψ (y no ϕ) la función generadora de la media μ_ϕ en la nueva representación. Es así que la definición de una media cuasiaritmética (4) en términos de la media aritmética A, tal como viene presentándose sistemáticamente en la literatura específica, aparece como inesencial. Deben incluirse entre dicha literatura algunos resultados ya clásicos sobre soluciones continuas de ciertas ecuaciones funcionales de tipo compuesto tales como las ecuaciones de bisimetría o autodistributividad (cfr. [1], [2], [3], [8]; para una exposición abreviada, véase [7]).

En principio, la preferencia por la representación (4) pudiera justificarse mediante razones o bién de naturaleza histórica o bién de economía o simplicidad. Las primeras no resultan convincentes puesto que, aún cuando sea cierto que el estudio de la media aritmética se remonta a la antigüedad, lo mismo ocurre, v.g. con el de la media geométrica $G(x,y) = \sqrt{xy}$, de modo que, sobre un sustento igualmente sólido, es aceptable llamar "cuasigeométricas" a las medias representadas por (5). En lugar de ello, en los párrafos siguientes nos referiremos a (5) como *representación geométrica* de una media cuasiaritmética. Notemos de paso que un resultado correspondiente al Teorema 1 puede probarse para la representación de un media cuasiaritmética en términos de una media cuasiaritmética prefijada. Por ejemplo, para la representación geométrica (5), se cumple el siguiente:

Teorema 2 *Sean μ y ν dos medias cuasiaritméticas dadas por su representación geométrica. Si $\phi : I \to \mathbb{R}^+$ y $\psi : I \to \mathbb{R}^+$ son sus correspondientes funciones generadoras; entonces, $\mu_\phi = \mu_\psi$ si y sólo si existen α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, tales que $\ln\psi = \alpha\ln\phi + \beta$.*

Por otra parte, las razones de economía o simplicidad de la representación (4) son tan insignificantes como la afirmación "A es más simple que G" si es que no se proporciona un criterio de simplicidad o economía concreto. Uno de los resultados principales de este trabajo es la construcción de un tal criterio.

El mencionado criterio se apoya en la teoría de iteraciones diádicas de funciones $F : I \times I \to I$ tal como ha sido presentada en [6] y es recordada en la Sección 2. Mediante el uso de iteraciones reales de una media continua, en la Sección 3 se define el concepto de familia de medias base de una media continua y simétrica. Las medias cuasiaritméticas admiten una familia de medias base integrada por una única media: la media aritmética. Este hecho excepcional no sólo proporciona el criterio de economía buscado, sino que motiva el plantéo del problema de determinar todas las medias que admiten una única media base. Llamaremos *ecuación de autoconjugación* a la ecuación funcional

$$h\left(M\left(u,v\right)\right)=M\left(h\left(u\right),h\left(v\right)\right),\ u,v\in K, \tag{6}$$

donde M es una media continua definida en I y K es un subintervalo compacto de I. Las medias que admiten una única base puede caracterizarse (Teorema 9) como aquellas medias M para las que existen soluciones continuas h de la ecuación (6) que satisfacen ciertas condiciones en los extremos de K.

Por último, la sección final reúne observaciones y comentarios que complementan el contenido de las anteriores.

2. Iteraciones diádicas de medias continuas

En lo que sigue, $D\left([0,1]\right)$ denotará al conjunto de *números diádicos* del intervalo $[0,1]$. Más generalmente, el subconjunto $D\left([a,b]\right)$ del intervalo $[a,b]$ definido por

$$D\left([a,b]\right)=\left\{x\in[a,b]:x=(1-d)a+db,\ d\in D\left([0,1]\right)\right\}$$

será denominado conjunto de *particiones diádicas* del intervalo $[a,b]$.

Ahora, si F es una función definida de $I\times I$ en I, al igual que en [6] podemos asociar a cada par de puntos $x,\ y\in I$ una familia $\{F^d(x,y):d\in D\left([0,1]\right)\}$ de *iteraciones diádicas* de $F(x,y)$ de la siguiente manera. En primer lugar definimos

$$F^0\left(x,y\right)=x,\ F^1\left(x,y\right)=y.$$

Ahora, si asumimos que para $n\in\mathbb{N}$ y $0\leq j\leq 2^n$ conocemos $F^{\frac{j}{2^n}}\left(x,y\right)$; entonces definimos

$$F^{\frac{k}{2^{n+1}}}\left(x,y\right)=F^{\frac{h}{2^n}}\left(x,y\right)$$

cuando $k=2h,\ 0\leq h\leq 2^n$; y

$$F^{\frac{k}{2^{n+1}}}\left(x,y\right)=F\left(F^{\frac{h}{2^n}}\left(x,y\right),F^{\frac{h+1}{2^n}}\left(x,y\right)\right)$$

cuando $k=2h+1$, $0\leq h\leq 2^n-1$.

La familia de iteraciones diádicas de una función F en $[x,y]$ será denotada por $D(F;[x,y])$

Un ejemplo simple de iteraciones diádicas de una función es el de las iteraciones diádicas de la media aritmética A. Un argumento inductivo muestra que si $x,y\in I,\ A^d\left(x,y\right)=(1-d)x+dy$, y por lo tanto el conjunto

$D(A;x,y) = D([x,y])$ es denso en $[x,y]$. Más generalmente, las iteraciones diádicas de la media cuasiaritmética μ_ϕ son de la forma

$$\mu_\phi^d(x,y) = \phi^{-1}\left((1-d)\,\phi(x) + d\phi(y)\right),\ x,y \in I,\ d \in D([0,1]). \tag{7}$$

Una propiedad destacable del conjunto de iteraciones diádicas de una media cuasiaritmética es su cerradez bajo μ_ϕ; concretamente, si $d_1,\ d_2 \in D([0,1])$, se cumple la igualdad

$$\mu_\phi(\mu_\phi^{d_1}(x,y), \mu_\phi^{d_2}(x,y)) = \mu_\phi^{\frac{d_1+d_2}{2}}(x,y). \tag{8}$$

En general, cuando la función F es una media continua, el conjunto de iteraciones diádicas de F tiene la siguiente propiedad.

Teorema 3 *Si $F : I\times I \to I$ es una función interna; entonces, si $x,\ y \in I,\ x < y$, la desigualdad*

$$F^{d_1}(x,y) < F^{d_2}(x,y) \tag{9}$$

se cumple para cada par $d_1, d_2 \in D([0,1])$ tal que $d_1 < d_2$. Más aún, el conjunto $D(F;[x,y])$ es denso en $[x,y]$ cuando F es continua.

Demostración. Ver [6]. ■

Sea M una función interna definida en I. Para cada $\delta \in [0,1]$, consideremos una sucesión $\{d_n\} \subseteq D([0,1])$, tal que $d_n \nearrow \delta$ cuando $n \to \infty$. Si $x,y \in I$, con $x < y$, por el Teorema 3, la sucesión $\left\{M^{d_n}(x,y)\right\}$ es creciente y acotada superiormente por y; luego podemos definir

$$M^\delta(x,y) = \lim_{d_n\nearrow\delta} M^{d_n}(x,y). \tag{10}$$

Observemos que el límite en la definición anterior es independiente de la sucesión $\{d_n\}$ y en consecuencia, la función $\delta \mapsto M^\delta(x,y)$ está bien definida y es estrictamente creciente. En efecto, si $\delta_1 < \delta_2$, existen $d,\ d' \in D([0,1])$, tales que $\delta_1 < d < d' < \delta_2$. Luego, si $\left\{d_n^1\right\}$ y $\left\{d_n^2\right\}$ son dos sucesiones crecientes de números diádicos tales que $d_n^{(i)} \nearrow \delta_i,\ i = 1,2$, las desigualdades $d_n^{(1)} \leq \delta_1 < d < d' < d_m^{(2)} \leq \delta_2$ valen para $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq m_0 \in \mathbb{N}$, de modo que por el Teorema 3, se cumple

$$M^{d_n^{(1)}}(x,y) < M^d(x,y) < M^{d'}(x,y) < M^{d_m^{(2)}}(x,y),\ n,m \in \mathbb{N},\ m \geq m_0.$$

Tomando límites cuando $n,\ m \to \infty$ en esta desigualdad, obtenemos

$$M^{\delta_1}(x,y) \leq M^d(x,y) < M^{d'}(x,y) \leq M^{\delta_2}(x,y).$$

Cuando $M : I \times I \to I$ es una media continua, la función $\delta \mapsto M^\delta(x,y)$ es también continua dado que, por el Teorema 3, el conjunto imagen de la misma contiene un subconjunto denso del intervalo $[x,y]$ y por lo tanto la función $\delta \mapsto M^{\delta}(x,y)$ no posee discontinuidades de salto. Sumado a la monotonía, este hecho prueba que la función $\delta \mapsto M^{\delta}(x,y)$ es continua.

Supondremos en lo que sigue que M es una media continua y simétrica. Para cada par de puntos x, $y \in I$ con $x < y$, asociamos a M y al subintervalo $J = [x,y] \subseteq I$, el homeomorfismo $f_J : [0,1] \to J$ definido por $f_J(u) = M^u(x,y)$.

Los homeomorfismos f_J están determinados por los valores de M en J^2. Para ver esto observemos que $f_J(0) = x$ y $f_J(1) = y$. Ahora, si asumimos conocido $f_J(h/2^n)$, con $0 \le h \le 2^n$, tenemos que, cuando $0 \le h \le 2^n - 1$,

$$\begin{aligned} f_J\left(\frac{2h+1}{2^{n+1}}\right) &= M^{\frac{2h+1}{2^{n+1}}}(x,y) \\ &= M\left(M^{\frac{h}{2^n}}(x,y), M^{\frac{h+1}{2^n}}(x,y)\right) \\ &= M\left(f_J\left(\frac{h}{2^n}\right), f_J\left(\frac{h+1}{2^n}\right)\right). \end{aligned}$$

Como $f_J(h/2^n)$, $f_J((h+1)/2^n) \in J$, sigue de la identidad anterior que, para todo $d \in D([0,1])$, $f_J(d)$ depende sólo de los valores de de M en J^2.

Observemos que de la discusión previa y de (8) sigue que para una media cuasiaritmética μ_ϕ, la identidad

$$\mu_\phi(\mu_\phi^u(x,y), \mu_\phi^v(x,y)) = \mu_\phi^{\frac{u+v}{2}}(x,y), \; x,y \in I, \tag{11}$$

es valida para $u,v \in [0,1]$. Más aún, las medias cuasiaritméticas son las únicas medias continuas con esta propiedad. Para ver esto, supongamos primero que M es una media continua y simétrica en un intervalo compacto $I = [a,b]$. Entonces, si para todo $u,v \in I$, vale

$$M(M^u(x,y), M^v(x,y)) = M^{\frac{u+v}{2}}(x,y), \; x,y \in I\,; \tag{12}$$

haciendo $x = a$, $y = b$, obtenemos

$$M(f_I(u), f_I(w)) = f_I\left(\frac{u+w}{2}\right), \; u,w \in [0,1],$$

o, equivalentemente

$$M(x,y) = \phi^{-1}\left(\frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}\right),$$

donde hemos puesto $\phi = f_I^{-1}$. Cuando I no es compacto, podemos considerar una familia de intervalos compactos $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ y $K_n \subset K_{n+1}$; de modo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tengamos

$$M(x,y) = \phi_n^{-1}\left(\frac{\phi_n(x)+\phi_n(y)}{2}\right), \quad x,y \in K_n,$$

donde ϕ_n es una función creciente definida en K_n. Ahora bién, es posible definir una familia de funciones crecientes $\varphi_n : K_n \to \mathbb{R}$ tales que φ_n genere a M en K_n y $\varphi_{n+1}|_{K_n} = \varphi_n$. Para esto definamos primero $\varphi_1(x) = \phi_1(x)$, $x \in K_1$. Ahora, si suponemos definida φ_n en K_n, tenemos entonces que

$$\varphi_n^{-1}\left(\frac{\varphi_n(x)+\varphi_n(y)}{2}\right) = \phi_{n+1}^{-1}\left(\frac{\phi_{n+1}(x)+\phi_{n+1}(y)}{2}\right), \quad x,y \in K_n$$

y consecuentemente existen, por el Teorema 1, constantes α_n y β_n, $\alpha_n \neq 0$, tales que

$$\phi_{n+1}(x) = \alpha_n \varphi_n(x) + \beta_n,\ x \in K_n.$$

Definiendo entonces

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{\phi_{n+1}(x) - \beta_n}{\alpha_n},\ x \in K_{n+1},$$

resulta que la familia de funciones $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface las condiciones deseadas. Finalmente, la función $\phi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \varphi_n(x),\ x \in K_n,$$

está bien definida y se cumple la igualdad

$$M(x,y) = \phi^{-1}\left(\frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}\right),\ x,y \in I.$$

3. Bases de medias continuas y simétricas

Si M es una media continua y simétrica definida en I y $J = [x,y]$ es un subintervalo de I, la continuidad y la monotonía de $\delta \mapsto M^{\delta}(x,y)$ aseguran que, para cada $u,v \in [0,1]$, existe un único $\mu_J(u,v) \in [0,1]$, tal que

$$M(M^u(x,y), M^v(x,y)) = M^{\mu_J(u,v)}(x,y). \tag{13}$$

En términos de los homeomorfismos f_J definidos en la sección anterior, la ecuación (13) puede reescribirse en la forma

$$M(f_J(u), f_J(v)) = f_J(\mu_J(u,v)), \quad u,v \in [0,1]. \tag{14}$$

Proposición 4 *Sea M una media continua y simétrica definida en I y $J \subseteq I$; entonces μ_J es también una media continua y simétrica.*

Demostración. Sean $u, v \in [0,1]$. Si $u < v$ entonces sigue de la internalidad de M y de (13) que

$$M^u(x,y) < M^{\mu_J(u,v)}(x,y) < M^v(x,y),$$

y consecuentemente

$$u < \mu_J(u,v) < v.$$

Esto prueba que μ_J es una función interna. La continuidad de μ_J se deriva de (14), pues

$$\mu_J(u,v) = f_J^{-1}(M(f_J(u), f_J(v))),$$

y f_J es un homeomorfismo. La simetría es consecuencia de (13) y de la simetría de M. ∎

Cuando M es una media continua y simétrica, la familia de medias continuas y simétricas $\{\mu_J\}_{J\subseteq I}$ será denominada *familia de medias base* de M. Cuando μ_J resulte independiente de J; es decir, cuando $\mu_J = \mu$ para todo subintervalo $J \subseteq I$, diremos simplemente que M admite una *media base.*

Si M y N son medias continuas definidas en I_1y I_2 respectivamente, tales que existe un homeomorfismo $h : I_1 \to I_2$ que verifica

$$h(M(x,y)) = N(h(x), h(y)), \;\; x, y \in I_1,$$

entonces diremos que M y N son *medias conjugadas* y lo denotaremos mediante $M \overset{h}{\sim} N$. Es fácil ver que la conjugación define una relación de equivalencia en la familia de medias continuas.

Proposición 5 *Si M y N son medias continuas definidas en I_1 e I_2 respectivamente y h es una solución continua de la ecuación funcional*

$$h(M(x,y)) = N(h(x), h(y)), \;\; x, y \in I_1,$$

entonces

$$h(M^u(x,y)) = N^u(h(x), h(y)), \;\; x, y \in I_1, \tag{15}$$

para todo $u \in [0,1]$.

Demostración. Un argumento inductivo prueba que (15) vale cuando $u \in D([0,1])$ (ver [6]). Cuando $u \in [0,1]$, la validez de (15) sigue de la continuidad de h, M y N. ∎

Las familias de medias base de dos medias conjugadas M y N están relacionadas según se establece en la siguiente proposición.

Proposición 6 *Sean M y N dos medias continuas en I tales que $M \overset{h}{\sim} N$ y $\{\mu_J\}_{J\subseteq I}$, $\{\varphi_J\}_{J\subseteq I}$ sus respectivas familias de medias base; entonces $\mu_J = \varphi_{h(J)}$.*

Demostración. Como $\{\mu_J\}_{J\subseteq I}$ es una familia de medias base para M, tenemos que

$$M(M^u(x,y), M^v(x,y)) = M^{\mu_J(u,v)}(x,y).$$

Por la Proposición 6, la aplicación de h al primer miembro de esta igualdad proporciona

$$\begin{aligned} h\left(M(M^u(x,y), M^v(x,y))\right) &= N(N^u(h(x), h(y)), N^v(h(x), h(y)) \quad (16) \\ &= N^{\varphi_{h(J)}(u,v)}(h(x), h(y)); \end{aligned}$$

mientras que aplicando h al segundo miembro se obtiene

$$h\left(M^{\mu_J(u,v)}(x,y)\right) = N^{\mu_J(u,v)}(h(x), h(y)). \quad (17)$$

De (16) y (17) se concluye que

$$N^{\varphi_{h(J)}(u,v)}(h(x), h(y)) = N^{\mu_J(u,v)}(h(x), h(y)),$$

y por lo tanto, $\varphi_{h(J)}(u,v) = \mu_J(u,v)$ para cada par $u, v \in [0,1]$. ■

Una consecuencia importante de la proposición anterior es la siguiente: si una media continua M admite una media base μ, entonces μ es también una base para cualquier media conjugada de M. Por otra parte, cuando una media base μ es admitida por M, μ es también una base de $M|_{K\times K}$ para cualquier intervalo compacto $K \subseteq I$. Luego, sigue de (14) que

$$M(f_K(u), f_K(v)) = f_K(\mu(u,v)),\ u, v \in [0,1];$$

es decir $\mu \overset{f_K}{\sim} M|_{K\times K}$ y, consecuentemente, toda media base es una media base de sí misma. Este hecho puede expresarse en términos de las funciones f_J asociadas a μ, de la siguiente manera

$$\mu(f_J(u), f_J(v)) = f_J(\mu(u,v)),\ u, v \in [0,1]. \quad (18)$$

Observemos que de (12) sigue que toda media cuasiaritmética admite una media base: la media aritmética A. Otra propiedad que distingue a la media aritmética en la la familia de medias cuasiaritméticas es que el homeomorfismo $f(u) = A^u(0,1)$ asociado a la media A en el intervalo $[0,1]$ es la función identidad. Una media continua definida en $[0,1]$ con esta propiedad será denominada *media normal.* La media aritmética es la única media normal en la clase de medias cuasiaritméticas. En efecto, si una media cuasiaritmética μ_ϕ definida en el intervalo $[0,1]$ tienen la propiedad de normalidad, entonces tenemos por (7) que

$$u = \mu_\phi^u(0,1) = \phi^{-1}\left((1-u)\,\phi(0) + u\phi(1)\right),\ \ u \in [0,1],$$

es decir,

$$\phi(u) = \phi(0) + (\phi(1) - \phi(0))\,u,\ \ u \in [0,1],$$

y como consecuencia del Teorema 1, μ_ϕ es la media aritmética.

Proposición 7 *Sea M una media continua y simétrica definida en $[a,b]$. Si $\Lambda = \{N : N \sim M\}$ es la familia constituida por todas las medias continuas y simétricas conjugadas con M; entonces,*
i)Λ admite un único representante normal;
ii)si M admite una base μ, entonces μ es el representante normal de Λ.

Demostración. Para demostrar i), sea M una media definida en $I = [a,b]$. Consideremos la función m definida en $[0,1]$ por

$$m(x,y) = f^{-1}\left(M\left(f(x), f(y)\right)\right), \; x,y \in [0,1],$$

donde $f = f_I$, es el homeomorfismo asociado a M en el intervalo I. Obviamente, m es una media continua y $m \overset{f}{\sim} M$, por lo que $m \in \Lambda$. Ahora bién, si g es el homeomorfismo asociado a m en el intervalo $[0,1]$, tenemos, por la Proposición 5, que

$$g(u) = m^u(0,1) = f^{-1}\left(M^u(a,b)\right) = f^{-1}\left(f(u)\right) = u, \; u \in [0,1].$$

Esto prueba que m es una media normal. Si suponemos que l es otra media normal en Λ entonces existe un homeomorfismo $h : [0,1] \to [0,1]$, tal que

$$h(l(x,y)) = m(h(x), h(y)), \; x,y \in [0,1].$$

Tomando $x = 0$, $y = 1$ en la identidad anterior y haciendo uso nuevamente de la Proposición 5 podemos concluir que, para todo $u \in [0,1]$,

$$h(u) = h\left(l^u(0,1)\right) = m^u\left(h(0), h(1)\right) = u,$$

y por tanto, que $l = m$.
A fin de probar ii), supongamos que M admite una base μ y denotemos con f al homeomorfismo asociado a μ en el intervalo $[0,1]$. Sabemos por (18) que

$$f(\mu(u,w)) = \mu(f(u), f(w)), \quad u,w \in [0,1].$$

Veamos que f es la función identidad. Para esto observemos primero que $f(0) = \mu^0(0,1) = 0$ y $f(1) = \mu^1(0,1) = 1$. Si suponemos, por el absurdo, que existe $z \in (0,1)$ tal que $f(z) \neq z$, por la continuidad de f existiría un intervalo maximal (a,b) tal que $z \in (a,b)$ y $f(x) \neq x$, $x \in (a,b)$. La maximalidad de dicho intervalo asegura que $f(a) = a$ y $f(b) = b$, por lo que, haciendo $u = a$ y $w = b$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\mu(a,b)) &= \mu(f(a), f(b)) \\ &= \mu(a,b). \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, ya que $\mu(a,b) \in (a,b)$. Luego f es la función identidad y μ es normal. ∎

No toda media continua admite una base. A continuación exponemos un ejemplo que muestra este hecho. Sea μ_f la media cuasiaritmética generada por la función

$$f(x) = \frac{1-\cos(\pi x)}{2}, \ x \in [0,1].$$

Puesto que $\mu_f(x, 1-x) = A(x, 1-x)$, la función definida por

$$M(x,y) = \begin{cases} \mu_f(x,y) & si\ 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq 1 \\ A(x,y) & si\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}, \tag{19}$$

resulta una media continua y simétrica. Así definida, M no es una media cuasiaritmética ya que si lo fuera y estuviera generada por alguna función $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, tendríamos que ϕ es una solución monótona y continua de la ecuación funcional

$$\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\phi(x)+\phi(y)}{2}, \ (x,y) \in \Delta, \tag{20}$$

que es la bién conocida ecuación funcional de Jensen sobre el dominio

$$\Delta = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}. \tag{21}$$

Veamos que, al igual que sucede con la ecuación de Jensen planteada en un intervalo, las soluciones continuas ϕ son también de la forma $\phi(x) = ax + b$ con a, $b \in \mathbb{R}$. Para esto observemos que si ϕ es una solución de (20) en el dominio (21), entonces también es una solución en $[0,1/2] \times [0,1/2]$ y por lo tanto, bajo la hipótesis de continuidad tenemos que $\phi(x) = ax + b$ cuando $x \in [0,1/2]$ ([2], pgs. 44 y 45). Ahora, si $(x,y) \in \Delta$ con $1/2 < x \leq 1$, tenemos que y, $(x+y)/2 \in [0,1/2]$ y sigue de (20) que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 2\phi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \phi(y) \\ &= 2\left(a\frac{x+y}{2} + b\right) - ay - b \\ &= ax + b. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\phi(x) = ax + b$ para todo $x \in [0,1]$ y en consecuencia $M = A$ en $[0,1]^2$, en contradición con (19).

Ahora bien, si suponemos que M admite una base μ, considerando el intervalo $J = [0,1/2]$, tenemos por (14) que, para todo $x, y \in [0,1]$,

$$\mu(x,y) = f_J^{-1}(M(f_J(x), f_J(y))) = A(x,y),$$

esto contradice el hecho de que M no es cuasiaritmética.

Observemos que una media M definida por (19) para una función generadora arbitraria $f \in C^1([0,1])$ no posee derivadas parciales continuas, exceptuando el caso en que f es una función afín (y M es, en consecuencia, la media aritmética). En efecto, si suponemos que M es de clase C^1, fijado un punto $(x_0, 1-x_0)$ sobre la diagonal del cuadrado unitario, tenemos que

$$\frac{1}{2} = \lim_{y \nearrow 1-x_0} \frac{\partial M}{\partial y}(x_0, y) = \lim_{y \searrow 1-x_0} \frac{\partial M}{\partial y}(x_0, y) = \lim_{y \searrow 1-x_0} \frac{\partial \mu_f}{\partial y}(x_0, y).$$

Por otra parte, derivando con respecto a y ambos miembros de la igualdad

$$f(\mu_f(x_0, y)) = \frac{f(x_0) + f(y)}{2},$$

obtenemos

$$f'(\mu_f(x_0, y)) \frac{\partial \mu_f}{\partial y}(x_0, y) = \frac{f'(y)}{2},$$

y por tanto

$$\lim_{y \searrow 1-x_0} f'(\mu_f(x_0, y)) \frac{\partial \mu_f}{\partial y}(x_0, y) = \lim_{y \searrow 1-x_0} \frac{f'(y)}{2}.$$

Como f' es una función continua y $\mu_f(x_0, 1-x_0) = 1/2$, se concluye que

$$f'(1-x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right),$$

y consecuentemente $f(x) = ax + b$.

En lo que resta de la sección, mostraremos que el hecho de que una media continua M definida en I admita una base está vinculado a la existencia de soluciones de la ecuación funcional

$$h(M(x,y)) = M(h(x), h(y)), \; x, y \in I, \tag{22}$$

que satisfacen determinadas condiciones de contorno. Observemos primero que por (14), M admite una media base μ si y sólo si dados dos subintervalos arbitrarios de I, J_1 y J_2

$$f_{J_1}^{-1}(M(f_{J_1}(u), f_{J_1}(v))) = f_{J_2}^{-1}(M(f_{J_2}(u), f_{J_2}(v))), \; u, v \in [0,1], \tag{23}$$

donde las funciones f_{J_1} y f_{J_2} son los homeomorfismos asociados a M en los intervalos J_1 y J_2 respectivamente. Ahora bien, haciendo la sustitución $z = f_{J_1}(u)$ y $w = f_{J_1}(v)$, podemos rescribir (23) como

$$f_{J_2} \circ f_{J_1}^{-1}(M(z, w)) = M\left(f_{J_2} \circ f_{J_1}^{-1}(z), f_{J_2} \circ f_{J_1}^{-1}(w)\right), \; z, w \in J_1, \tag{24}$$

es decir, M admite una base si y sólo si las composiciones $f_{J_2} \circ f_{J_1}^{-1}$ son soluciones de la ecuación funcional

$$h\left(M(z,w)\right) = M(h\left(z\right), h\left(w\right)),\ z,w \in J_1.$$

En particular cuando M está definida en $[0,1]$ y es normal, la condición (24) es equivalente a que los homemorfismos f_J asociados a M en un subintervalo J del intervalo $[0,1]$, sean soluciones de (22).

Hecha esta observación podemos enunciar la siguiente:

Proposición 8 *Una media continua y normal μ es base de alguna clase de medias continuas si y sólo si para todo α, $\beta \in [0,1]$ con $\alpha < \beta$, la ecuación de autoconjugación*

$$h\left(\mu\left(u,v\right)\right) = \mu\left(h\left(u\right), h\left(v\right)\right),\ u,v \in [0,1],$$

admite una solución continua que verifica $h\left(0\right) = \alpha$ y $h\left(1\right) = \beta$.

Demostración. Supongamos primero que μ es base de su clase conjugada, entonces para cada subintervalo $J \subseteq [0,1]$ tenemos que

$$f_J\left(\mu\left(u,v\right)\right) = \mu\left(f_J\left(u\right), f_J\left(v\right)\right),\ u,v \in [0,1]. \tag{25}$$

Considerando $J = [\alpha,\beta]$ tenemos que $f_J\left(u\right) = \mu^u\left(\alpha,\beta\right)$ es una solución de (25) tal que $f_J\left(0\right) = \alpha$ y $f_J\left(1\right) = \beta$. Recíprocamente, si asumimos que para cada par de puntos $\alpha,\beta \in [0,1]$, con $\alpha < \beta$, la ecuación (25) admite una solución h tal que $h\left(0\right) = \alpha$ y $h\left(1\right) = \beta$, entonces, por la normalidad de μ, tenemos que

$$h\left(u\right) = h\left(\mu^u\left(0,1\right)\right) = \mu^u\left(h\left(0\right), h\left(1\right)\right) = \mu^u\left(\alpha,\beta\right) = f_J\left(u\right).$$

Esto prueba que que $h = f_J$ y por lo tanto μ es base de su clase conjugada. ■

Observemos, para finalizar, que dados una media continua M definida en I y K un subintervalo compacto de I, entonces g es una solución de la ecuación funcional

$$h\left(M\left(u,v\right)\right) = M\left(h\left(u\right), h\left(v\right)\right),\ u,v \in K,$$

si y sólo si $f_K^{-1} \circ g \circ f_K$ es solución de la ecuación funcional

$$h\left(\mu\left(u,v\right)\right) = \mu\left(h\left(u\right), h\left(v\right)\right),\ u,v \in [0,1],$$

donde μ es la conjugada normal de M y f_K es el homeomorfismo asociado a M en el intervalo K. Como f_K es una biyección de $[0,1]$ en K, podemos establecer el siguiente:

Teorema 9 *Una media continua y simétrica M definida en un intervalo I admite una base si y sólo si para todo subintervalo compacto $K = [a, b]$ de I y para todo α, $\beta \in K$ con $\alpha < \beta$, la ecuación funcional (6) admite una solución continua que verifica $h(a) = \alpha$ y $h(b) = \beta$.*

Demostración. Si M admite una base μ y $K = [a, b]$ es un subintervalo compacto de I, entonces μ es una base de $M|_{K\times K}$ y de la discusión anterior y la Proposición 8 sigue que (6) tiene una solución continua que verifica $h(a) = \alpha$ y $h(b) = \beta$ cualesquiera sean α y β en K, con $\alpha < \beta$. Recíprocamente, si para todo intervalo compacto $K = [a, b]$ contenido en I y para todo $\alpha, \beta \in K$, con $\alpha < \beta$, existe una solución continua de (6) que verifica $h(a) = \alpha$ y $h(b) = \beta$, entonces, por la Proposición 8, $M|_{K\times K}$ admite una base μ. Además, si $K \subseteq K'$ y ψ es una base de $M|_{K'\times K}$, entonces ψ es también una base de $M|_{K\times K}$ y por lo tanto $\mu = \psi$. Esto prueba que μ es una base de M. ■

Observemos que en el caso en que M es una media cuasiaritmética definida en un intervalo I, con función generadora ϕ, y $[a, b]$ es un subintervalo cerrado de I, entonces la función h, definida por

$$h(x) = \phi^{-1}\left(\frac{\phi(\beta) - \phi(\alpha)}{\phi(b) - \phi(a)}\left(\phi(x) - \phi(a)\right) + \phi(\alpha)\right),\ x \in [a, b],$$

es una solución continua de la ecuación de autoconjugación (6) que verifica $h(a) = \alpha$ y $h(b) = \beta$ cualesquiera sean α, $\beta \in I$.

4. Observaciones finales

El concepto de familia de bases introducido en la Sección 3 puede extenderse a medias continuas no simétricas. En [4] pueden encontrarse los desarrollos correspondientes a este caso general. Resultados como el Teorema 9 se extienden a las medias no simétricas sin alterar su enunciado. Las medias definidas por

$$M(x, y) = \phi^{-1}\left(\alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y)\right), \quad x, y \in I, \tag{26}$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ y $\phi : I \to \mathbb{R}$, es una función continua y estrictamente monótona, son denominadas *medias cuasilineales con peso α (y función generadora ϕ).* Cuando $\alpha = 1/2$ en (26), la media M se reduce a la media cuasiaritmética generada por ϕ. Tal como se muestra en [4], para cada α fijo, una media base es admitida por las medias cuasilineales (26). La recíproca es también cierta asumiendo que la media M es diferenciable, de modo que puede establecerse el siguiente:

Teorema 10 *Sea M una media diferenciable y reducible a ambos lados. Una media base es admitida por M si y sólo si M es una media cuasilineal.*

El Teorema 10, para cuya prueba remitimos a [4], proporciona una nueva caracterización análitica de las medias cuasilineales. Otra de sus consecuencias es el siguiente resultado sobre la solución de la ecuación de autoconjugación.

Teorema 11 *Sea M es una media diferenciable, simétrica y reducible a ambos lados definida en I. La ecuación de autoconjugación (6) admite una solución que pasa por dos puntos arbitrariamente elegidos de I^2, si y sólo si M es una media cuasiaritmética.*

La prueba de este resultado se obtiene de la directa aplicación de los teoremas 9 y 10.

Si la existencia de una media base es o no suficiente para garantizar la cuasilinealidad de una media continua pero no diferenciable constituye un interesante problema abierto.

Referencias

[1] J. Aczél, On mean values, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, (1948), 392-400.

[2] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York and London, (1966).

[3] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[4] L. R. Berrone, *A dynamical characterization of quasilinear means*, (to appear).

[5] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.

[6] L. R. Berrone, A. L. Lombardi, *A note on equivalence of means*, Publ. Math. Debrecen **58**, Fasc. **1-2**, (2001), 49-56.

[7] J. Fodor, M. Roubens, *On meaningfulness of means*, J. Comp. Appl. Math. **64**, (1995), 103-115.

[8] C. Ryll-Nardzewski, *Sur les moyennes*, Studia Math. **11**, (1949), 31-37.

Lucio R. Berrone
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET),
Laboratorio de Acústica y Electroacústica,
Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agrim.,
Universidad Nacional de Rosario,
Riobamba 245 bis, (2000) Rosario, Argentina.

Gerardo E. Sbérgamo
Departamento de Matemáticas,
Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agrim.,
Universidad Nacional de Rosario,
Av. Pellegrini 250, (2000) Rosario,
Argentina.

e-mail: berrone@fceia.unr.edu.ar, gerardosbergamo@hotmail.com