La continuité de Lipschitz des solutions de l'équation de Liouville

Shinji Yamashita

Abstract

Let Ω be a domain in $\mathbf{C} = \{|z| < +\infty\}$ with the Poincaré density P_Ω and hence the Poincaré distance σ_Ω . For example, $1/P_D(z) = 1 - |z|^2$ for $D = \{|z| < 1\}$. Set $f^* = |f'|/(1 - |f|^2)$ for a function $f : D \to D$ holomorphic with nonvanishing f' in D. The function $u = \log f^*$ then satisfies the differential equation of Liouville (ÉL): $\Delta u = 4e^{2u}$ in D. If a real funtion u satisfies (ÉL) in Ω, then one has the expression: $u = \Phi_f + \log P_\Omega$ in Ω, where Φ_f is defined by f holomorphic in D further satisfying some properties; in particular, $|f| < 1$ and f' never vanishes in D. Note that $\log P_\Omega$ also satisfies (ÉL) in Ω. We prove, among others, that u is continuous in the sense of Lipschitz with respect to σ_Ω in Ω of finite type if and only if the same is true of $\log f^*$ with respect to σ_D in D.

1 Introduction.

Soit $\mathcal{B}$ la famille des fonctions f holomorphes et bornées, $|f| < 1$, ayant f' non s'annulant dans le disque unité ouvert $D = \{|z| < 1\}$ du plan complexe: $\mathbf{C} = \{|z| < +\infty\}$. Soit $f^* = |f'|/(1 - |f|^2)$ dans D pour $f \in \mathcal{B}$. Nous connaissons que $f^* = g^*$ pour $f, g \in \mathcal{B}$ si et seulement s'il y a une transformation:

$$T(z) = \varepsilon(z - a)/(1 - \overline{a}z), \quad |\varepsilon| = 1 > |a|,$$

Received by the editors June 1994
Communicated by J. Mawhin
AMS Mathematics Subject Classification : 30D50, 30F45, 35J60.

telle que $f = T \circ g$; voir [**Y2**,(III); **Y3**] pour les propriétés détaillées. Nous commençons par l'investigation de quelques propriétés de $\log f^*$ dans le théorème 1. Pour $f \in \mathcal{B}$ nous posons

$$\Gamma(z,f) = (1-|z|^2)f^*(z), \quad z \in D.$$

Alors, par le lemme de Schwarz et Pick on a toujours $\Gamma(z,f) \leq 1$. Soit g une fonction holomorphe ayant g' non s'annulant dans D. Soit $\rho(z,g)$ le maximum de $r, 0 < r \leq 1$, tel que g soit univalente dans le disque d'Apollonius: $\{w; |w-z|/|1-\overline{z}w| < r\}$. On connaît [**Y4**] que

$$|\rho(z,g) - \rho(w,g)| \leq |w-z|/|1-\overline{z}w|$$

pour $z, w \in D$. Nous posons

$$\rho(g) = \inf_{z \in D} \rho(z,g).$$

La distance de Poincaré entre z_1 et z_2 de D est définie par

$$\sigma_D(z_1,z_2) = \tanh^{-1}(|z_1-z_2|/|1-\overline{z_1}z_2|),$$

où $\tanh^{-1} x = (1/2)\log\{(1+x)/(1-x)\}$, $0 \leq x < 1$. La dérivée partielle et complexe d'une fonction F à valeurs complexes est

$$(\partial/\partial z)F = F_z = (1/2)(F_x - iF_y), \quad z = x+iy.$$

De plus, $F_{zz} = (F_z)_z$ et pour F à valeurs réelles nous avons $\Delta F = F_{xx} + F_{yy} = 4\overline{(F_z)}_z$. Ici nous proposons le

Théorème 1. *Pour $f \in \mathcal{B}$ les trois propositions suivantes sont mutuellement équivalentes*:

(I) *La fonction $\log f^*$ est continue au sens de Lipschitz par rapport à σ_D dans D*:

$$|\log f^*(z_1) - \log f^*(z_2)| \leq C_1\sigma_D(z_1,z_2), \quad \textit{pourtout} \quad z_1, z_2 \in D,$$

où $C_1 > 0$ est une constante.

(II) *La fonction $(1-|z|^2)|(\partial/\partial z)\log\Gamma(z,f)|$ est bornée dans D.*

(III) *On a $\rho(f) > 0$.*

Dans ce mémoire Ω est toujours un domaine hyperbolique dans $\mathbf{C}$ en ce sens que le complément $\mathbf{C}\backslash\Omega$ de Ω contienne au moins deux points. Nous désignons par $RC^2(\Omega)$ la famille des fonctions à valeurs réelles et deux fois continûment différentiables dans Ω. Soit $u \in RC^2(\Omega)$ une solution de l'équation différentielle de Liouville:

(ÉL) $\quad \Delta u = 4e^{2u}$

dans Ω. Comme une application du théorème 1 à la σ_Ω-Lipschitz continuité de u dans Ω, nous donnons le théorème 2 dans la prochaine section; le mémoire present se compose des quatre sections.

L'identité (ÉL) signifie que la courbure de Gauss en chaque point de Ω s'équipant de la métrique riemannienne $e^{u(z)}|dz|$ est une constante -4.

2 L'équation de Liouville.

La densité de Poincaré $P_\Omega > 0$ est une fonction définie dans Ω par l'identité:

$$1/P_\Omega(z) = (1-|w|^2)|\Pi'(w)|, \quad z = \Pi(w),$$

où Π est une projection holomorphe du revêtement universel D sur Ω, en notation: $\Pi \in Proj(\Omega)$; le choix de Π et w est arbitraire pour autant que $z = \Pi(w)$ soit satisfaite. Nous connaissons que $\phi_\Omega = \log P_\Omega$ est alors une solution de (ÉL) dans Ω et en outre est maximalle, c'est-à-dire, $u \le \phi_\Omega$ dans Ω pour toutes les solutions u de (ÉL) dans Ω; encore, ou $u \equiv \phi_\Omega$ ou bien $u < \phi_\Omega$ dans Ω; voir, par exemple, [**J**, pp. 115-116]. La distance de Poincaré des points z_1 et z_2 dans Ω est

$$\sigma_\Omega(z_1, z_2) = \inf_c \int_c P_\Omega(z)|dz|$$

pour toutes les courbes c rectifiables, reliant z_1 et z_2 dans Ω. Il'y a au moins une $c = c_\Omega(z_1, z_2)$, géodésique entre z_1 et z_2 , telle que

$$\sigma_\Omega(z_1, z_2) = \int_c P_\Omega(z)|dz|.$$

Une géodésique n'est pas nécessairement unique, mais unique pour $\Omega = D$. Il est facile de démontrer qu'une fonction u réelle et une fois continûment différentiable dans Ω est σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω:

$$|u(z_1) - u(z_2)| \le A\sigma_\Omega(z_1, z_2) \quad (z_1, z_2 \in \Omega),$$

$A \geq 0$ étant une constante, si et seulement si $|\nabla u|/P_\Omega = 2|u_z|/P_\Omega$ est bornée par A dans Ω.

Si $f : \Omega \to D$ est holomorphe et si f' ne s'annule jamais dans Ω, alors $u = \log f^*$ est une solution de (ÉL) dans Ω, où encore, $f^* = |f'|/(1-|f|^2)$. Au contraire, si $u \in RC^2(\Omega)$ satisfait (ÉL) dans un domaine simplement connexe $\Omega \neq \mathbf{C}$, alors nous avons une $f : \Omega \to D$ holomorphe avec f' non s'annulant dans Ω telle que $u = \log f^*$ dans Ω. C'est le théorème célébré de Liouville [**L**]; voir [**B**, p. 27, Proposition 1.6]. La formulation dans [**B**] est un peu différente; notons que si $\Delta v = Ae^{Bv}$ dans Ω hyperbolique, où A et B sont constantes réelles avec $AB > 0$, alors

$$u = (B/2)v + (1/2)\log(AB/8)$$

satisfait (ÉL) dans Ω, et réciproquement.

Notre problème prochain est alors la σ_Ω-Lipschitz continuité d'une solution u de (ÉL) dans Ω.

Soit $\mathcal{M}(\Omega)$ la famille des fonctions $f \in \mathcal{B}$ telles qu'on ait $f^* = (f \circ T)^*$ pout tout T du groupe fuchsien $\mathcal{G}(\Omega)$ de Ω des automorphismes du D (ou du groupe $\mathcal{G}(\Omega)$ des transformations du revêtement universel D de Ω). Alors, pour $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ la fonction non positive:

$$\Phi_f(z) = \log \Gamma(w, f) \quad (z = \Pi(w), \quad \Pi \in Proj(\Omega))$$

est bien définie dans Ω.

Proposition A. *Pour qu'une fonction $u \in RC^2(\Omega)$ satisfasse l'équation* (ÉL) *dans un domaine hyperbolique $\Omega \subset \mathbf{C}$ il faut et il suffit que u admette la représentation*:

$$u = \Phi_f + \phi_\Omega \tag{2.1}$$

dans Ω, où $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Preuve. La suffisance est immédiate, tandis que la nécessité est une conséquence du théorème de Liouville appliquée à la fonction:

$$v(w) = u(\Pi(w)) + \log|\Pi'(w)| \quad (\Pi \in Proj(\Omega))$$

qui satisfait (ÉL) dans D. Nous avons donc $f \in \mathcal{B}$ telle que $v = \log f^*$ dans D. En conséquence:

$$u(z) = \log f^*(w) - \log|\Pi'(w)| = \log \Gamma(w, f) + \phi_\Omega(z), \quad z = \Pi(w).$$

Puisque $\Gamma(w, f) \equiv \Gamma(T(w), f)$ pour chaque $T \in \mathcal{G}(\Omega)$ dans D nous observons que $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. — C.Q.F.D.

Les solutions $u \in RC^2(\Omega)$ de (ÉL) dans Ω ainsi correspondent d'une façon biunivoque aux fonctions f^* pour $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

L'inégalité $P_\Omega(z)\delta_\Omega(z) \leq 1$ est toujours vraie dans Ω, où $\delta_\Omega(z) = \inf_{w \in \partial\Omega} |z - w|$ est la distance euclidienne de $z \in \Omega$ et la frontière $\partial\Omega$ de Ω dans $\mathbf{C}$. On définit qu'un domaine hyperbolique Ω est du type fini si $\inf_{z \in \Omega} P_\Omega(z)\delta_\Omega(z) > 0$. Si $\partial\Omega$ consiste en continus non ponctuels dont le nombre total est fini, alors Ω est du type fini. En particulier, un domaine simplement connexe $\Omega \neq \mathbf{C}$ est du type fini. Maintenant, la fonction $\rho(\Pi)$ de $\Pi \in Proj(\Omega)$ est une constante qui est designée par $\rho(\Omega)$. En effet, $\rho(w, \Pi) = \rho_\Omega(z)$ est la rayon d'univalence de Ω en $z = \Pi(w) \in \Omega$ et

$$\rho(\Omega) = \inf_{z \in \Omega} \rho_\Omega(z).$$

Il'est connu que Ω est du type fini si et seulement si

$$\rho(\Omega) > 0. \tag{2.2}$$

En outre, Ω est du type fini si et seulement si

$$\sup_{z \in \Omega} |(P_\Omega)_z(z)|/P_\Omega(z)^2 < +\infty. \tag{2.3}$$

Pour toutes les propriétés écrites dans ce paragraphe, voir [**Y4**, **Y5**, **Y6**].

Théorème 2. *Soit $u = \Phi_f + \phi_\Omega$ la représentation d'une solution $u \in RC^2(\Omega)$ de* (ÉL) *dans un domaine hyperbolique Ω du type fini, représentation qui est décrite dans la* Proposition A. *Alors, u est σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω si et seulement si* $\log f^*$ *est σ_D-Lipschitz continue dans D, et encore, si et seulement si Φ_f est σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω.*

3 Preuves des théorèmes 1 et 2.

Preuve du théorème 1. Tout d'abord, nous nous rappelons que (III) est vraie pour $f \in \mathcal{B}$ si et seulement si

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2)|f''(z)/f'(z)| < +\infty; \tag{3.1}$$

c'est exactement [**Y1**, Theorem 2, (1.2) $\Leftrightarrow$ (1.3)] pour notre f. Posons $u = \log f^*$ pour $f \in \mathcal{B}$. En supposant (I) nous observons que la fonction $2|u_z(z)| = |\nabla u(z)|$ est bornée par $C_1 P_D(z) = C_1/(1 - |z|^2)$ dans D. Donc,

$$(3.2) \qquad (1-|z|^2)|u_z(z)| = |(1/2)(1-|z|^2)f''(z)/f'(z) + Q(z)|$$

est bornée par $C_1/2$ dans D, où la fonction:

$$Q(z) = (1-|z|^2)\overline{f(z)}f'(z)/(1-|f(z)|^2)$$

est bornée:

$$(3.3) \qquad |Q(z)| = |f(z)|\Gamma(z,f) \leq |f(z)| < 1, \quad z \in D.$$

D'autre part, on a

$$(3.4) \qquad (1-|z|^2)|(\partial/\partial z)\log\Gamma(z,f)|$$

$$= |(1/2)(1-|z|^2)f''(z)/f'(z) + Q(z) - \overline{z}|, \qquad z \in D.$$

Alors, le côté droit de (3.4) est bornée par $C_1/2+1$. Par conséquent, on a (II). Supposons que la fonction de (3.4) est bornée par $C_2 > 0$, ou (II) est vraie. Alors, il résulte de (3.4) et (3.3) que le supremum de (3.1) est bornée par $2C_2+4$, et donc nous avons (III). Finalement supposons (III) en équivalence de (3.1). Plus précisément on a en effet,

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f''(z)/f'(z)| \leq 2/\rho(f) + 2.$$

Alors, il résulte de (3.2) et (3.3) que $(1-|z|^2)|u_z(z)| = |u_z(z)|/P_D(z)$ est bornée par $1/\rho(f)+2$ dans D. Donc (I). — C.Q.F.D.

Remarque. En effet on a

$$(3.5) \qquad (1-|z|^2)|(\partial/\partial z)\log\Gamma(z,f)| \leq 2\rho(z,f)^{-1}(1-\rho(z,f)\Gamma(z,f))$$

pour toute $f \in \mathcal{B}$ et en tout $z \in D$; le côté droit de (3.5) est strictement moins que $2\rho(z,f)^{-1}$. Pour l'observer nous posons $\rho = \rho(z,f)$ et $M = \rho f'(z)(1-|z|^2)/(1-|f(z)|^2)$, d'où $|M| = \rho\Gamma(z,f)$. La fonction g de $w \in D$ définie par la formule:

$$g(w) = M^{-1}[f(\lambda(w)) - f(z)]/[1-\overline{f(z)}f(\lambda(w))],$$

où

$$\lambda(w) = (\rho w + z)/(1 + \overline{z}\rho w)$$

est donc univalente et bornée: $|g| < |M|^{-1}$ dans D telle que $g(0) = g'(0) - 1 = 0$. Par le théorème de Pick (voir [**G**, p. 38, Theorem 4]) on a $|g''(0)/2| \leq 2(1 - |M|)$, d'où, après quelques calculs, on a (3.5). Dans le cas $0 < \rho(f) < 1$ on a par (3.5) l'inégalité:

$$(1 - |z|^2)|\nabla(\log \frac{\Gamma(z,f)}{1 - \rho(f)\Gamma(z,f)})| \leq 4/\rho(f)$$

dans D. Alors on a l'inégalité de Lipschitz dans D:

$$|\log \frac{\Gamma(z_1,f)}{1 - \rho(f)\Gamma(z_1,f)} - \log \frac{\Gamma(z_2,f)}{1 - \rho(f)\Gamma(z_2,f)}| \leq \{4/\rho(f)\}\sigma_D(z_1, z_2).$$

Preuve du théorème 2. Posons $\phi = \phi_\Omega$. En partiellement différentiant les deux côtés de

$$u(z) - \phi(z) = \log \Gamma(w,f) \quad (z = \Pi(w), \quad \Pi \in Proj(\Omega))$$

par rapport à $w \in D$, en tenant les modules, et finalement, en multipliant les deux côtés de l'égalité obtenue par $1 - |w|^2$, nous avons l'identité:

$$|u_z(z) - \phi_z(z)|/P_\Omega(z) = (1 - |w|^2)|(\partial/\partial w)\log \Gamma(w,f)|. \tag{3.6}$$

Puisque Ω est du type fini, $|\phi_z|/P_\Omega = |(P_\Omega)_z|/P_\Omega^2$ est bornée dans Ω par (2.3). Donc $|u_z|/P_\Omega$ est bornée dans Ω si et seulement si le côté droit de (3.6) est borné dans D, ou, si et seulement si $\log f^*$ est σ_D-Lipschitz continue dans D grâce au théorème 1. Au moyen de (2.3) on observe que Ω est du type fini si et seulement si ϕ_Ω est σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω. Donc u est σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω du type fini si et seulement si Φ_f est σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω. — C.Q.F.D.

Deux remarques.

(**A**) Soit Ω du type fini et soit $g : \Omega \to D$ holomorphe dont g' ne s'annule pas dans Ω. Alors, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\log g^*$ *soit* σ_Ω*-Lipschitz continue dans* Ω *est qu'il y ait une constante* c, $0 < c \leq +\infty$, *telle que* g *soit univalente dans chaque domaine* $U(z,c) = \{\zeta \in \Omega; \sigma_\Omega(\zeta, z) < c\}$, $z \in \Omega$, *qui est* *simplement connexe, possiblement* $\Omega = U(z,+\infty)$. Car, soit $f = g \circ \Pi$, $\Pi \in Proj(\Omega)$, telle que $\log g^* = \Phi_f + \phi_\Omega$. Par le théorème 2 et l'équivalence de (I) et (III) du théorème 1, on connaît que, pour $\log g^*$ soit σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω il faut et il suffit qu'il y ait une constante b, $0 < b \le 1$, telle que f soit univalente dans chaque disque d'Apollonius: $\{\zeta \in D; |\zeta - w|/|1-\overline{w}\zeta| < b\}$, $w \in D$. Si $\log g^*$ est σ_Ω-Lipschitz continue dans Ω, alors nous posons $c = \tanh^{-1}[\min\{\rho(\Omega), b\}]$; réciproquement, si g est univalente dans chaque $U(z,c)$, alors nous posons $b = \min\{\rho(\Omega), \tanh c\}$, où $\tanh(+\infty) = 1$ et $\tanh^{-1} 1 = +\infty$.

(**B**) Revenant à Ω général on observe, pour u de (2.1), l'indentité:

$$\{u_{zz}(z) - u_z(z)^2\}\Pi'(w)^2 = (1/2)\{S_f(w) - S_\Pi(w)\}, \tag{3.7}$$

où $z = \Pi(w)$, $\Pi \in Proj(\Omega)$, et

$$S_g = (g''/g')' - (1/2)(g''/g')^2$$

est la dérivée schwarzienne de g. Une conséquence immédiate de (3.7) est alors:

$$P_\Omega(z)^{-2}|u_{zz}(z) - u_z(z)^2| = (1/2)(1-|w|^2)^2|S_f(w) - S_\Pi(w)|.$$

D'autre part, il est connu [**Y4**] que Ω est du type fini si et seulement si

$$\sup_{w\in D}(1-|w|^2)^2|S_\Pi(w)| < +\infty$$

pour une (donc pour tout) $\Pi \in Proj(\Omega)$. En conséquence si Ω est du type fini, alors $P_\Omega^{-2}|u_{zz} - u_z^2|$ est bornée dans Ω si et seulement si

$$\sup_{w\in D}(1-|w|^2)^2|S_f(w)| < +\infty. \tag{3.8}$$

Mais, (3.8) est vraie si et seulement si (III) est vraie; voir [**Y1**, Theorem 2, (1.2) $\Leftrightarrow$ (1.5)]. En résumé: *une solution* $u \in RC^2(\Omega)$ *de* (ÉL) *est* σ_Ω*-Lipschitz continue dans* Ω *du type fini si et seulement si* $|u_{zz} - u_z^2|/P_\Omega^2$ *est bornée dans* Ω. *En particulier, si* u *est* σ_Ω*-Lipschitz continue dans* Ω *du type fini, alors* $|u_{zz}|/P_\Omega^2$ *est bornées dans* Ω.

4 Un exemple.

Supposons que $\Omega \subset D$. Alors, $Proj(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$. Pour $\Pi \in Proj(\Omega)$ il résulte du théorème 1 que la fonction $\log \Pi^*$ est σ_D-Lipschitz continue dans D si et seulement si Ω est du type fini. *Pour $\Omega \subset D$ du type fini y-a-t-il $f \in \mathcal{M}(\Omega) \backslash Proj(\Omega)$ telle que $\log f^*$ soit σ_D-Lipschitz continue dans D ?*

Nous démontrons que pour l'anneau $\Omega_K = \{e^{-\pi/K} < |z| < 1\} \subset D$, $K > 1$ étant entière, anneau qui est du type fini, nous avons en effet une $f \in \mathcal{M}(\Omega_K) \backslash Proj(\Omega_K)$ telle que $\log f^*$ est σ_D-Lipschitz continue dans D. Considérons $f \in Proj(\Sigma)$ pour $\Sigma = \{e^{-\pi} < |z| < 1\}$ définie par

$$f(w) = \exp\{i \log \frac{1+w}{1-w} - \frac{\pi}{2}\}, \quad w \in D.$$

Alors $f \notin Proj(\Omega_K)$ et $\log f^*$ est σ_D-Lipschitz continue dans D. Pour démontrer que $f \in \mathcal{M}(\Omega_K)$, nous nous rappelons que $\mathcal{G}(\Sigma)$ se compose des tansformations linéaires: $T_n(w) = (w + A_n)/(1 + A_n w)$, où $A_n = (e^{2n\pi} - 1)/(e^{2n\pi} + 1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, tandis que $\mathcal{G}(\Omega_K)$ se compose des T_{Kn}, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Puisque f est automorphe par rapport à $\mathcal{G}(\Sigma)$, f est automorphe par rapport à $\mathcal{G}(\Omega_K) \subset \mathcal{G}(\Sigma)$. Donc, $f \in \mathcal{M}(\Omega_K)$ en particulier.

References

[B] C. Bandle: Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, Boston-London-Melbourne, 1980.

[G] A. W. Goodman: Univalent Functions. I. Mariner, Tampa, 1983.

[J] V. Jørgensen: On an inequality for the hyperbolic measure and its applications in the theory of functions. Math. Scand. 4(1956), 113-124.

[L] J. Liouville: Sur l'équation aux dérivées partielles $\partial^2 \log \lambda / \partial u \partial v \pm 2\lambda a^2 = 0$. J. de Math. Pures et Appl. 18(1853), 71-72.

[Y1] S. Yamashita: Schlicht holomorphic functions and the Riccati differential equation. Math. Z. 157(1977), 19-22.

[Y2] S. Yamashita: Derivatives and length-preserving maps. Canadian Math. Bull. 30(1987), 379-384.

[Y3] S. Yamashita: Isometries of Riemannian images. Comm. Math. Univ. St. Pauli 37(1988), 23-26.

[Y4] S. Yamashita: The derivative of a holomorphic function and estimates of the Poincaré density. Kodai Math. J. 15(1992), 102-121.

[Y5] S. Yamashita: La dérivée d'une fonction univalente dans un domaine hyperbolique. Com. Rend. Acad. Sci. Paris 314(1992), 45-48.

[Y6] S. Yamashita: Sur allures de la densité de Poincaré et ses dérivées au voisinage d'un point frontière. Kodai Math. J. 16(1993), 235-243.

Shinji Yamashita
Département de Mathématique
Université métropolitaine de Tôkyô
Minami Osawa, Hachioji, Tôkyô 192-03
Japon