Sur l'algèbre d'Orlicz-Sobolev

Benchekroun B.M. et Benkirane A.

Abstract

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^n$ with the cone property. In this paper, we characterize the integers m for which the Orlicz-Sobolev space $W^m L_A(\Omega)$ is an algebra for the usual multiplication of functions. Here A is an N-function which satisfies some "regularity" assumption at infinity. We prove, in particular, that the space $W^m L \text{ Log } L(\Omega)$ is an algebra if and only if $m \geq n$.

Résumé

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône. Dans cet article, nous caractérisons les entiers m pour lesquels l'espace d'Orlicz-Sobolev $W^m L_A(\Omega)$ est une algèbre pour la multiplication usuelle des fonctions. A est une N-fonction supposée vérifier une certaine hypothèse de "régularité" à l'infini. Nous montrons en particulier que l'espace $W^m L \text{ Log } L(\Omega)$ est une algèbre si et seulement si $m \geq n$.

1 Introduction

Soient m un entier non nul, $p \in]1, +\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône.

Received by the editors November 1994
Communicated by J. Mawhin
AMS Mathematics Subject Classification :46 E 35.
Keywords :N-functions, Iterated N-functions of Donaldson-Trudinger, Orlicz-Sobolev spaces, Orlicz-Sobolev algebra.

Il est connu que l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est une algèbre normée (pour le produit usuel des fonctions) si et seulement si $m > n/p$. Ce résultat s'obtient essentiellement à l'aide des théorèmes d'immersion de Sobolev, voir [1] (voir aussi [12] pour une démonstration utilisant les inégalités de Gagliardo-Niremberg).

Nous nous proposons dans cet article d'étudier le cas plus général des espaces d'Orlicz-Sobolev $W^m L_A(\Omega)$, lorsque Ω est borné.

Nous montrons, moyennant une condition de régularité à l'infini sur la N-fonction A (voir définition 3-5), que si m est strictement supérieur à l'indice de Donaldson-Trudinger $q(A,n)$ (voir 2-c) alors $W^m L_A(\Omega)$ est une algèbre de Banach (voir théorème 4-1). Réciproquement si $W^m_A L(\Omega)$ est une algèbre normée alors $m \geq q(A,n)$, (voir théorème 4-3 et remarque 4-4).

L'étude du cas particulier où $A(t) = t \operatorname{Log} t$ à l'infini a ensuite permis de montrer que l'espace d'Orlicz-Sobolev $W^m L \operatorname{Log} L(\Omega)$ est une algèbre normée si et seulement si $m \geq n$.

Le plan de l'article est le suivant.

Après les rappels de la deuxième partie, nous avons fait dans la partie 3 une étude comparative des comportements à l'infini des N-fonctions itérées de Donaldson-Trudinger.

Les résultats de cette étude sont ensuite appliqués dans les parties 4 et 5 pour caractériser les algèbres d'Orlicz-Sobolev.

Pour d'autres applications des résultats de la partie 3, voir [3].

Les auteurs tiennent à exprimer leur reconnaissance au professeur J.P. Gossez pour ses suggestions et remarques.

2 Rappels

Nous donnons dans cette partie quelques rappels sur les espaces d'Orlicz et les espaces d'Orlicz-Sobolev. Les références classiques sont [1], [10] et [11].

2-a) Soit $A\ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une N-fonction, c'est-à-dire A continue, convexe et vérifiant : $A(t) > 0$ pour $t > 0$ et $\frac{A(t)}{t} \to 0$ (resp. $\to +\infty$) lorsque $t \to 0$ (resp. $t \to +\infty$). Ce qui est équivalent à dire que A admet la représentation $A(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$, où $a\ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est croissante continue à droite avec $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ si $t > 0$ et $a(t) \to +\infty$ si $t \to +\infty$. L'inégalité suivante est facile à vérifier :

$$\frac{t\,a(t)}{A(t)} > 1 \quad \text{pour tout} \quad t > 0. \qquad (2-1)$$

La N-fonction $\bar{A}$ conjuguée de A est définie par $\bar{A}(t) = \int_0^t \bar{a}(\tau)d\tau$, où $\bar{a}(t) = \operatorname{Sup}\{s, a(s) \leq t\}$. Nous avons bien sûr $\overline{\bar{A}} = A$.

Nous pouvons supposer, sans que cela diminue la généralité, que a est continue et strictement croissante (voir [4] et [7]). Dans la suite les N-fonctions seront supposées prolongées par parité à $\mathbb{R}$ tout entier.

Nous dirons que la N-fonction A vérifie la condition Δ_2 à l'infini s'il existe $k > 0$ et $t_0 > 0$ tels que : $A(2t) \leq k\,A(t)$ pour tout $t \geq t_0$. On montre que c'est équivalent à la condition :

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{t\,a(t)}{A(t)} < +\infty, \quad \text{(voir [10])}. \tag{2 − 2}$$

Soient A et B deux N-fonctions, nous dirons que A domine B à l'infini s'il existe $K > 0$ et $t_0 > 0$ tels que : $B(t) \leq A(Kt)$ pour tout $t \geq t_0$. A et B sont dites équivalentes à l'infini si A domine B et B domine A à l'infini.

2-b) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et A une N-fonction. L'espace d'Orlicz $L_A(\Omega)$ est l'espace (des classes d'équivalence) des fonctions réelles u mesurables sur Ω telles que :

$$\int_\Omega A\Big[\frac{u(x)}{\lambda}\Big]dx < +\infty$$

pour un certain $\lambda = \lambda(u) > 0$.

On munit $L_A(\Omega)$ de la norme (de Luxemburg [9]) :

$$||u||_{A,\Omega} = ||u||_A = \operatorname{Inf}\Big\{\lambda > 0 \ : \int_\Omega A\Big[\frac{u(x)}{\lambda}\Big]dx \leq 1\Big\}.$$

Rappelons que deux N-fonctions équivalentes à l'infini définissent le même espace d'Orlicz.

On désigne aussi par $E_A(\Omega)$ la fermeture dans $L_A(\Omega)$ de l'espace des fonctions mesurables bornées à supports bornés dans $\bar{\Omega}$. $E_A(\Omega)$ coïncide avec $L_A(\Omega)$ si et seulement si A vérifie la condition Δ_2 à l'infini.

Le lemme suivant est une généralisation de l'inégalité de Hölder (voir [14]).

Lemme 2-1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et A, B, C trois N-fonctions, supposons qu'il existe $t_0 > 0$ et $k_0 > 0$ tels que : $A^{-1}(t)B^{-1}(t) \leq k_0 C^{-1}(t)$ pour $t \geq t_0$. Alors pour tout $f \in L_A(\Omega)$ et $g \in L_B(\Omega)$, $f \cdot g \in L_C(\Omega)$, et $||f\,g||_C \leq K||f||_A\,||g||_B$, où $K = K(A, B, C, \Omega)$.*

Lemme 2-2. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et A une N-fonction. Alors pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$ et pour tout $g \in L_A(\Omega)$ le produit $f \cdot g$ est dans $L_A(\Omega)$ et de plus : $||f\,g||_A \leq ||f||_\infty ||g||_A$.*

En effet, on a dans le cas où, $||f||_\infty ||g||_A \neq 0$

$$\int_\Omega A\Big[\frac{f\,g}{||f||_\infty ||g||_A}\Big]dx \leq \int_\Omega A\Big[\frac{g}{||g||_A}\Big]dx \leq 1.$$

2-c) Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, A une N-fonction et m un entier ≥ 0, l'espace d'Orlicz-Sobolev $W^m L_A(\Omega)$ (resp. $W^m E_A(\Omega)$) est l'espace des fonctions $u \in L_A(\Omega)$ (resp. $E_A(\Omega)$) dont les dérivées au sens des distributions d'ordre $\leq m$ sont dans $L_A(\Omega)$ (resp. $E_A(\Omega)$). On munit $W^m L_A(\Omega)$ de la norme :

$$||u||_{m,A,\Omega} = ||u||_{m,A} = \sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha u||_A.$$

Rappelons le théorème d'immersion de Donaldson-Trudinger [8].

En remplaçant au besoin A par une N-fonction qui lui est équivalente à l'infini on peut supposer que :

$$\int_0^1 \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau < +\infty.$$

Si

$$\int_1^{+\infty} \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau = +\infty,$$

on définit la N-fonction A_1 par la relation

$$A_1^{-1}(t) = \int_0^t \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau.$$

En répétant ce procédé, on obtient une suite de N-fonctions $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_q$, définies par

$$A_i^{-1}(t) = \int_0^t \frac{A_{i-1}^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, q,$$

où $q = q(A, n)$ est tel que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{A_{q-1}^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau = +\infty \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{A_q^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau < +\infty.$$

Dans le cas où

$$\int_1^{+\infty} \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau < +\infty,$$

on posera $q(A, n) = 0$.

Lemme 2-3. ([8], et [2] dans le cas d'un ouvert non borné). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône. Si $m \leq q(A, n)$ (resp. $m > q(A, n)$) alors $W^m L_A(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L_{A_m}(\Omega)$ (resp. $L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$).*

Le lemme suivant constitue une généralisation au cas des espaces d'Orlicz-Sobolev du théorème classique de Meyers-Serrin [13].

Lemme 2-4. ([8] et [9]). *Pour tout $u \in W^m E_A(\Omega)$, on peut trouver une suite $u_k \in W^m E_A(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ convergeant en norme vers u.*

Nous rappelons aussi l'inégalité d'interpolation suivante :

Lemme 2-2. ([5] et [7]). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône, et soit A une N-fonction. Alors il existe une constante $k = k(A, m, \Omega) > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout entier i, $1 \leq i \leq n - 1$ et pour tout u dans $W^m L_A(\Omega)$ on ait :*

$$|u|_{i,A} \leq k\epsilon ||u||_{m,A} + k\epsilon^{-i/m-i} ||u||_A$$

où

$$|u|_{i,A} = \sum_{|\alpha|=i} ||D^\alpha u||_A.$$

3 Résultats préliminaires

Soient $A(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau$ une N-fonction et A_i, $0 \leq i \leq q(A,n)$, les N-fonctions itérées de Donaldson-Trudinger définies dans le paragraphe 2-c). Nous posons dans toute la suite :

$$\beta_1(A) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{t\,a(t)}{A(t)}, \quad \beta_2(A) = \liminf_{t\to+\infty} \frac{t\,a(t)}{A(t)} \,\text{et}\, \beta(A) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\,a(t)}{A(t)} \text{ dans}$$

le cas où $\beta_1(A) = \beta_2(A)$. On a : $1 \leq \beta_1(A) \leq \beta_2(A) \leq +\infty$.

Les lemmes suivants ont pour but de faire une étude comparative des comportements à l'infini des N-fonctions A_i, $0 \leq i \leq q(A,n)$.

Lemme 3-1. *Soit A une N-fonction telle que $q(A,n) \neq 0$. Alors il existe $C > 0$ et $t_0 > 0$ tels que : $A^{-1}(t) \leq C\,t^{1/n} A_1^{-1}(t)$ pour $t \geq t_0$.*

Démonstration : On pose $f(t) = C\,A_1^{-1}(t) - t^{-1/n} A^{-1}(t)$, on a

$$f'(t) = t^{-1/n}\Big[(C + 1/n)\frac{A^{-1}(t)}{t} - \frac{1}{a(A^{-1}(t))}\Big], \quad t > 0,$$

on choisit donc $C > 0$ telle que

$$C + 1/n \geq 1 \,\text{et}\, C \geq \frac{A^{-1}(1)}{A_1^{-1}(1)}$$

(c'est-à-dire $f(1) \geq 0$) ce qui donne d'après (2-1), $f(t) \geq 0$ pour $t \geq 1$.

Lemme 3-2. *Soit A une N-fonction, alors on a les inégalités suivantes :*

(i) $\beta_2(A) \leq n/q$

(ii) $\beta_1(A) \geq n/(q+1)$.

Démonstration : (i) si $q = 0$, l'inégalité est évidente sinon, une application répétée du théorème de Fubini permet d'avoir :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{A_{q-1}^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau &= \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+1/n}} d\tau \int_0^{\tau} \frac{A_{q-2}^{-1}(t)}{t^{1+1/n}} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{A_{q-2}^{-1}(t)}{t^{1+1/n}} dt \int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+1/n}} \\
&= n \int_0^{+\infty} \frac{A_{q-2}^{-1}(t)}{t^{1+2/n}} dt = \dots \\
&= \frac{n^{q-1}}{(q-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+q/n}} dt \qquad (3-1)
\end{aligned}$$

ainsi, comme les intégrales convergent en zéro :

$$\int_1^{+\infty} \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+q/n}} dt = +\infty$$

d'où

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{A^{-1}(t)}{t^{q/n-\mu}} = +\infty,$$

pour tout μ tel que $0 < \mu < q/n$, c'est-à-dire

$$\liminf_{s\to+\infty} \frac{A(s)}{s^{n/(q-n\mu)}} = 0. \qquad (3-2)$$

D'autre part, dans le cas où $\beta(A) \neq +\infty$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $s_0 > 0$ tel que : $\frac{\beta_2-\epsilon}{s} \leq \frac{a(s)}{A(s)}$, pour tout $s \geq s_0$, ce qui donne après intégration : $C\, s^{\beta_2(A)-\epsilon} \leq A(s)$, pour $s \geq s_0$, d'où d'après (3-2) :

$$\lim_{s\to+\infty} s^{\beta_2(A)-\epsilon-[n/(q-n\mu)]} = 0,$$

c'est-à-dire : $\beta_2(A) \leq \frac{n}{q-n\mu}$, pour tout $\mu \in]0, q/n[$. Ainsi $\beta_2(A) \leq n/q$.
Maintenant, dans le cas où $\beta_2(A) = +\infty$, on a nécessairement $q(A, n) = 0$, car sinon :

$$\int_1^{+\infty} \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+1/n}} dt$$

diverge et donc

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{A(t)}{t^{1/n-\epsilon}} = +\infty, \text{ pour tout } \epsilon \in]0, 1/n[\qquad (3-3)$$

or $\frac{a(t)}{A(t)} \geq C/t$ pour tout $C > 0$ et $t \geq t_0$, et après intégration on obtient, $A(t) \geq t^C$ pour $t \geq t_0$, ce qui contredit (3-3) pour $C^{-1} < 1/n - \epsilon$.

(ii) Nous avons d'après (3-1) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{A_q^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau = \frac{n^q}{q!} \int_0^{+\infty} \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{1+(q+1)/n}} d\tau \qquad (3-4)$$

et la convergence de cette dernière intégrale permet d'avoir :

$$\liminf_{\tau\to+\infty} \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{\epsilon+(q+1)/n}} = 0$$

pour tout $\epsilon > 0$, c'est-à-dire

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{A(t)}{t^{n/(q+1+\epsilon n)}} = +\infty \qquad (3-5)$$

or dans le cas $\beta_1(A) < +\infty$, pour tout $\mu > 0$ il existe $t_0 > 0$ tel que $A(t) \leq C\, t^{\beta_1(A)+\mu}$, ce qui donne d'après (3-5) : $\beta_1(A) + \mu > \frac{n}{q+1+\epsilon n}$, c'est-à-dire : $\beta_1(A) \geq n/q + 1$.

Lemme 3-3. *Soit A une N-fonction telle que $q = q(A,n) > 1$. Si $\beta_1(A) \leq n/q$, alors pour tout entier r tel que $1 \leq r \leq q-1$ on a :*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{A_r^{-1}(t)t^{1/n}}{A_{r-1}^{-1}(t)} \leq \frac{n\beta_1(A)}{n-\beta_1(A)r}. \qquad (3-6)$$

Démonstration : Nous montrons (3-6) par récurrence sur r. Pour $r=1$, posons $g_1(t) = C\,t^{-1/n}A^{-1}(t) - A_1^{-1}(t)$ où $C > \frac{n\beta_1(A)}{n-\beta_1(A)}$ on a

$$g_1'(t) = t^{-1/n}\frac{C}{a[A^{-1}(t)]} - (1+C/n)\frac{A^{-1}(t)}{t},$$

d'où $g_1'(t) \geq 0$ si et seulement si, $\frac{s\,a(s)}{A(s)} \leq \frac{n\,C}{n+C}$ où l'on a posé $s = A^{-1}(t)$, or $\beta_1(A) < \frac{n\,C}{n+C}$ donc il existe s_1 tel que $\frac{s\,a(s)}{A(s)} \leq \frac{n\,C}{n+C}$ pour $s \geq s_1$, c'est-à-dire $g_1'(t) \geq 0$, pour $t \geq t_1 = A(s_1)$ et $g_1(t) \geq g_1(t_1)$ pour $t \geq t_1$ ou encore, $C\,t^{1/n}A^{-1}(t) \geq A_1^{-1}(t) + g_1(t_1)$ pour $t \geq t_1$, ce qui montre que

$$\lim_{t\to+\infty} C\,t^{-1/n}A^{-1}(t) = +\infty,$$

d'où

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{A_1^{-1}(t)t^{1/n}}{A^{-1}(t)} \leq C.$$

Supposons maintenant que (3-6) a lieu pour $(r-1)$, où $2 \leq r \leq q-1$ et posons :

$$g_r(t) = C_r t^{-1/n}A_{r-1}^{-1}(t) - A_r^{-1}(t) \,\text{avec}\, C_r > \frac{n\,\beta_1(A)}{n - r\,\beta_1(A)}$$

on a,

$$\begin{aligned} g_r'(t) &= t^{-1-1/n}\left[-\frac{C_r+n}{n}A_{r-1}^{-1}(t) + C_r t^{-1/n}A_{r-2}^{-1}(t)\right] \\ &\geq t^{-1-1/n}\left[-\frac{C_r+n}{n}C_{r-1}t^{-1/n}A_{r-2}^{-1}(t) + C_r t^{-1/n}A_{r-2}^{-1}(t)\right] \end{aligned}$$

pour $C_{r-1} \in \left]\frac{n\,\beta_1(A)}{n-(r-1)\beta_1(A)}, \frac{n\,C_r}{C_r+n}\right[$ et $t \geq t_0$ d'où : $g_r'(t) \geq \frac{A_{r-2}(t)}{t^{1+2/n}}\left[C_r - \frac{C_{r-1}}{n}(C_r+n)\right]$, pour $t \geq t_0$ donc $g_r'(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$, c'est-à-dire $g_r(t) \geq g_r(t_0)$ pour tout $t \geq t_0$, d'où $C_r t^{-1/n}A_{r-1}^{-1}(t) \geq A_r^{-1}(t) + g_r(t_0)$ pour tout $t \geq t_0$ et

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1/n}A_{r-1}^{-1}(t) = +\infty$$

donc

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{A_r^{-1}(t)t^{1/n}}{A_{r-1}^{-1}(t)} \leq C_r.$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents.

Lemme 3-4. *Soit A une N-fonction telle que $q(A,n) > 1$ et $\beta_1(A) = \beta_2(A)$. Alors pour tout entier r tel que $1 \le r \le q(A,n) - 1$ il existe $C > 0$, $t_0 > 0$ tels que $A_r^{-1}(t) \le C\, t^{-r/n} A^{-1}(t)$ pour $t \ge t_0$.*

Définition 3-5. *Soit A une N-fonction. Nous dirons que A est une B-fonction si elle vérifie la condition suivante : $\beta = \beta_1(A) = \beta_2(A)$ et $\frac{t\,a(t)}{A(t)}$ tend vers β par valeurs supérieures ou inférieures quand $t \to +\infty$.*

Remarquons que cette dernière condition est vérifiée pour les N-fonctions usuelles, c'est-à-dire celles construites à l'aide des fonctions puissances, logarithmes et exponentielles.

Lemme 3-6. *Soit A une B-fonction telle que $q = q(A,n) \ge 1$. Alors il existe une constante $C > 0$ et $t_0 > 0$ tels que :*

$$A_q^{-1}(t) \le C\, t^{1/n} \,\text{pour}\, t \ge t_0.$$

Démonstration : $\beta(A)$ est nécessairement fini puisque $q \ge 1$ (voir lemme 3-2), nous donnons la démonstration dans le cas où $\frac{t\,a(t)}{A(t)}$ tend vers $\beta(A)$ par valeurs négatives, l'autre cas se traite de la même manière.

Pour tout $\epsilon > 0$ on a, $\beta(A) - \epsilon \le \frac{t\,a(t)}{A(t)} \le \beta(A)$ pour $t \ge t_0$, ce qui donne après intégration entre t et t_0, $C_2 t^{\beta-\epsilon} \le A(t) \le C_1 t^{\beta}$ pour $t \ge t_0$ ou encore,

$$C_1' t^{1/\beta} \le A^{-1}(t) \le C_2' t^{1/(\beta-\epsilon)} \,\text{pour}\, t \ge t_0 \qquad (3-5)$$

on a donc

$$C_1' t^{-1-(q+1)/n+1/\beta} \le \frac{A^{-1}(t)}{t^{1+(q+1)/n}} \,\text{pour}\, t \ge t_0,$$

ce qui donne, $-1/\beta + (q+1)/n > 0$ en utilisant la convergence de l'intégrale

$$\int^{+\infty} \frac{A^{-1}(\tau)}{\tau^{1+(q+1)/n}} \qquad \text{(voir lemme 3-2)},$$

donc $\beta > n/(q+1)$, d'autre part, posons $g(t) = C\, t^{1/n} - A_q^{-1}(t)$ où C est une constante que nous préciserons plus loin. On a

$$g'(t) = [C/n\, t^{1/n} - A_{q-1}^{-1}(t)] \cdot t^{-1-1/n}$$

et d'après le lemme 3-4

$$\begin{aligned} A_{q-1}^{-1}(t) &\le C'\, t^{-(q-1)/n} A^{-1}(t) \,\text{pour}\, t \ge t_0 \\ &\le C''\, t^{-(q-1)/n+(q+1)/n} = C'' t^{2/n} \,\text{pour}\, t \ge t_0 \qquad (3-5) \end{aligned}$$

il suffit donc de choisir $C > nC''$ pour avoir $g'(t) \ge 0$ pour $t \ge t_0$ d'où le résultat.

Remarque 3-7. *Soit A une B-fonction avec $q = q(A, n) \geq 1$. Il est utile de noter l'inégalité suivante démontrée dans le lemme précédent :*

$$A^{-1}(t) \leq C\, t^{(q+1)/n}, \text{ où } C = C(A, n) > 0 \text{ et } t \geq t_0 = t_0(A, n).$$

Remarque 3-8. *Il est aussi aisé de voir, en utilisant les lemmes 3-1 et 3-2, que si $\beta_1(A) = \beta_2(A)$ alors pour tout entier r, $1 \leq r \leq q(A, n) - 1$, on peut définir une N-fonction B_r par : $B_r(t) = t^{-r/n}A^{-1}(t)$ à l'infini, B_r sera équivalente à A_r à l'infini.*

Lemme 3-9. *Soit A une B-fonction telle que $\beta(A) < +\infty$ et $q(A, n) = 1$, alors il existe $C > 0$ et $t_0 > 0$ tels que : $[A_1^{-1}(t)]^2 \leq C\, A^{-1}(t)$ pour $t \geq t_0$.*

Démonstration : On pose $f(t) = C\, A^{-1}(t) - [A_1^{-1}(t)]^2$, C étant une constante qu'on déterminera par la suite, on a

$$f'(t) = \frac{C}{a[A^{-1}(t)]} - 2A_1^{-1}(t)\frac{A^{-1}(t)}{t^{1+1/n}},$$

et d'après le lemme 3-6,

$$f'(t) \geq \frac{C}{a[A^{-1}(t)]} - 2C_1\frac{A^{-1}(t)}{t} \qquad (\text{pour}\, t \geq t_0)$$

ainsi $f'(t) \geq 0$ pour $C/2C_1 \geq \beta(A)$ et $t \geq t_0$.

4 Résultats principaux

Théorème 4-1. *Soient A une B-fonction, $m \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône. Si $m > q(A, n)$ alors l'espace d'Orlicz-Sobolev $W^m L_A(\Omega)$ est une algèbre multiplicative normée, c'est-à-dire :*

$$u\, v \in W^m L_A(\Omega) \textit{ si } u, v \in W^m L_A(\Omega), \quad \textit{et}$$

$$||u\, v||_{m,A} \leq C||u||_{m,A}||v||_{m,A}, \text{ où}\, C = C(m, A, \Omega). \qquad (4-1)$$

Démonstration : Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer que $W^{q+1}L_A(\Omega)$ est une algèbre car si $W^m L_A(\Omega)$ $(m \geq q)$ est une algèbre, alors $W^{m+1}L_A(\Omega)$ est encore une algèbre.

En effet, en désignant par D^p une dérivée d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ pour tout $u, v \in W^{m+1}L_A(\Omega)$, $m \geq q$ on a :

$$D^1(uv) = (D^1u)v + u(D^1v), (u\, \text{et}\, v\, \text{étant bornées}) \qquad (4-2)$$

donc, $D^1(uv) \in W^m L_A(\Omega)$ et $D^{m+1}(uv) = D^m[D^1(uv)] \in L_A(\Omega)$, d'où $u\, v \in W^{m+1}L_A(\Omega)$, les inégalités de normes étant évidentes, d'après (4-2) et les lemmes 2-2 et 2-3.

Nous supposons donc dans la suite, $m = q(A, n) + 1$.

D'autre part, si $\beta(A) = +\infty$ alors d'après le lemme 3-2, $q(A, n) = 0$ et il suffit donc de montrer dans ce cas que $W^1 L_A(\Omega)$ est une algèbre normée.

Supposons donc d'abord $\beta(A)=+\infty$ et soit $u,v\in W^1L_A(\Omega)$, on a :

$$D^1(uv)=(D^1u)v+u(D^1v)\in L_A(\Omega). \qquad (4-3)$$

Les inégalités de normes sont là encore déduites facilement de (4-3) et des lemmes 2-2 et 2-3.

Nous supposons maintenant $\beta(A)<+\infty$ et $q\geq 1$, ce qui veut dire en particulier que A vérifie la condition Δ_2 à l'infini, et il suffit donc de montrer (4-1) pour $u\in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap W^mL_A(\Omega)$ et, $v\in W^mL_A(\Omega)$, où $m=q+1$, en effet supposons que :

$$||uv||_{m,A}\leq C||u||_{m,A}||v||_{m,A}, C=C(m,A,\Omega) \qquad (4-4)$$

pour tout $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap W^mL_A(\Omega)$ et $v\in W^mL_A(\Omega)$ et soit $u\in W^mL_A(\Omega)$ et (u_k) une suite de $C^\infty(\Omega)\cap W^mL_A(\Omega)$ convergeant vers u, en norme (voir lemme 2-4), comme $||u_kv-u_lv||_{m,A}\leq C||u_k-u_l||_{m,A}||v||_{m,A}$, donc (u_kv) est de Cauchy et converge vers $w\in W^mL_A(\Omega)$, d'autre part, on a,

$$\begin{aligned} ||w-uv||_A &\leq ||w-u_kv||_A+||(u_k-u)v||_A \\ &\leq ||w-u_kv||_A+||v||_\infty||u_k-u||_A \end{aligned}$$

ainsi $w=uv$ (p.p. dans Ω) et $uv\in W^mL_A(\Omega)$, de plus un passage à la limite dans l'inégalité : $||u_kv||_{m,A}\leq C||u_k||_{m,A}||v||_{m,A}$, donne (4-1). Maintenant, comme $||uv||_A\leq||u||_\infty||v||_A\leq C||u||_{m,A}||v||_{m,A}$, d'après les lemmes 2-2 et 2-3, alors il suffit pour avoir (4-4), de montrer que pour tout multi-indice α tel que $|\alpha|=m$ et pour tout $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap W^mL_A(\Omega)$ et $v\in W^mL_A(\Omega)$:

$$||D^\alpha(uv)||_A\leq C||u||_{m,A}||v||_{m,A} \text{ où } C=C(m,A,\Omega) \qquad (4-5)$$

et en utilisant la formule de Leibnitz, il suffit de voir que :

$$||(D^\beta u)(D^{\alpha-\beta}v)||_A\leq C||u||_{m,A}||v||_{m,A} \text{ où } C=C(m,A,\Omega) \qquad (4-6)$$

pour $0\leq\beta\leq\alpha$.

Les cas $\beta=0$ et $\beta=\alpha$ sont évidents, puisque :

$$||u\,D^\alpha v||_A\leq||u||_\infty||D^\alpha v||_A\leq C||u||_{m,A}||v||_{m,A}$$

et de même :

$$||(D^\alpha u)v||_A\leq C||u||_{m,A}||v||_{m,A}$$

les autres cas se résument en les situations suivantes :

<u>1ier cas</u> : $|\beta|=q$ (et donc $|\alpha-\beta|=1$).
On a dans ce cas, $D^\beta u\in W^1L_A(\Omega)\subset L_{A_1}(\Omega)$ et $D^{\alpha-\beta}v\in W^qL_A(\Omega)\subset L_{A_q}(\Omega)$ d'après le lemme 2-3, d'autre part, les lemmes 3-5 et 3-6 donnent dans le cas $q>1$:

$$A_1^{-1}(t)A_q^{-1}(t)\leq C\,t^{-1/n}A^{-1}(t)t^{1/n}=C\,A^{-1}(t),$$

$C=C(n,A)$ pour tout $t\geq t_0$, ce qui donne (4-6) en appliquant le lemme 2-1.

Le cas $|\alpha-\beta|=q$ se traite de la même manière.

Si maintenant $q=1$, alors on a d'après le lemme 3-9,

$$A_1^{-1}(t)A_1^{-1}(t)\leq C\,A^{-1}(t)\ t\geq t_0,$$

d'où (4-6).

2ième cas : $(1 < |\beta| < q$ et $1 < |\alpha-\beta| < q)$.
On a dans ce cas, $D^\beta u \in W^{q+1-|\beta|}L_A(\Omega) \subset L_{A_{q+1-|\beta|}}(\Omega)$ et $D^{\alpha-\beta}v \in W^{|\beta|}L_A(\Omega) \subset L_{A_{|\beta|}}(\Omega)$ et d'après le lemme 3-3 et la remarque 3-7 :

$$A^{-1}_{q+1-|\beta|}(t)A^{-1}_{|\beta|}(t) \leq C\,t^{-(q+1)/n}A^{-1}(t)A^{-1}(t) \leq C_1A^{-1}(t),$$

$C_1 = C_1(n, A)$ pour $t \geq t_0$, d'où d'après les lemmes 2-1 et 2-3

$$\begin{aligned}||D^\beta u\, D^{\alpha-\beta}v||_A &\leq C||D^\beta u||_{A_{q+1-|\beta|}}||D^{\alpha-\beta}v||_{A_{|\beta|}}\\ &\leq C_1||D^\beta u||_{q+1-|\beta|,A}||D^{\alpha-\beta}v||_{|\beta|,A}\\ &\leq C_2||u||_{m,A}||v||_{m,A} \,\text{où}\, C_2 = C_2(A,n,\Omega).\end{aligned}$$

Proposition 4-3. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, A une N-fonction et $m \in \mathbb{N}$. Alors toute algèbre multiplicative normée contenue dans $W^mL_A(\Omega)$, (c'est-à-dire telle que la condition 4-1 est vérifiée) est contenue dans $L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{A}$ une telle algèbre, on a pour tout

$$u \in \mathcal{A}\,\text{et}\, r \in \mathbb{N}^* \ : ||u^r||_A^{1/r} \leq ||u^r||_{m,A}^{1/r} \leq K||u||_{m,A} = \lambda < +\infty,$$

donc $\int_\Omega A\Big[\frac{u^r(x)}{\lambda^r}\Big]dx \leq 1$.
Supposons par l'absurde que, $u \in L^\infty(\Omega)$ alors : $\forall C > 0\ \exists H \subset \Omega$ de mesure non nulle tel que : $|u(x)| \geq C\ \forall x \in H$ on aura donc

$$1 \geq \int_\Omega A\Big[\frac{u^r(x)}{\lambda^r}\Big]dx \geq \int_H A\Big[\frac{C^r}{\lambda^r}\Big]dx = |H|A[(C/\lambda)^r],$$

ce qui est impossible, puisque pour $C > \lambda$, $A[(C/\lambda)^r] \to +\infty$ quand $r \to +\infty$.

Théorème 4-3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône et soit A une N-fonction telle que : $\beta_1(A) = \beta_2(A) = \beta(A)$.*
Si $W^mL_A(\Omega)$ est une algèbre multiplicative normée (c'est-à-dire vérifiant 4-1), alors $m \geq q(A,n)$.

Démonstration : Remarquons d'abord que si $\beta(A) = +\infty$ alors $q(A,n) = 0$, le théorème est donc évident dans ce cas.

Supposons donc $\beta(A) < +\infty$.
D'après la proposition 4-3, $W^mL_A(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$. D'autre part, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_0 > 0$ tel que :

$$\frac{t\,a(t)}{A(t)} \leq \beta(A) + \epsilon, \quad t \geq t_0$$

et par intégration entre t et t_0, on obtient

$$A(t) \leq C\,t^{\beta(t)+\epsilon}, \quad t \geq t_0$$

d'où,

$$L^{\beta(A)+\epsilon}(\Omega) \subset L_A(\Omega)$$

et

$$W^{m,\beta(A)+\epsilon}(\Omega) \subset W^m L_A(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \quad \epsilon > 0.$$

Donc : $\beta(A) + \epsilon > n/m$, $\epsilon > 0$ (voir [1]), c'est-à-dire

$$\beta(A) \geq n/m,$$

ce qui donne le résultat, en utilisant le lemme 3-2.

Remarque 4-4. *Dans le cas $m = q(A,n)$, on ne peut rien affirmer comme le montrent les exemples suivants :*
1) Si $A(t) = t^p$, $1 < p < +\infty$, alors on a $q(A,n) = [n/p]$, où $[n/p]$ désigne la partie entière de n/p, et dans le cas où $m = [n/p]$, $W^{m,p}(\Omega)$ n'est pas une algèbre.
Pour le cas $p = 1$ voir le corollaire 5-2.
2) Si $A(t) = t \operatorname{Log} t$ (à l'infini), alors nous verrons dans le paragraphe suivant que $W^m L_A(\Omega)$ est une algèbre lorsque $m = q(A,n) = n$.

5 Le cas de l'espace $W^m L$ Log $L(\Omega)$

Théorème 5-1. *Soit A une N-fonction égale à la fonction $t \operatorname{Log} t$ à l'infini et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône. Alors :*

(i) $q(A,n) = n$

(ii) $W^m L_A(\Omega)$ *est une algèbre normée si et seulement si* $m \geq n$.

Démonstration :
(i) On peut voir sans difficulté que $A^{-1}(t)$ est équivalente à $t(\operatorname{Log} t)^{-1}$ à l'infini (voir [14]), ce qui permet d'avoir d'après la formule (3-3) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{Log} t \, t^{(q+1)/n}} < +\infty \text{ où } q = q(A,n)$$

d'où $q + 1 > n$, c'est-à-dire $q = n$ puisqu'on a dans tous les cas $q \leq n$ (voir [6] pour le cas $n = 2$).
(ii) D'après la démonstration du théorème 4-1, il suffit de montrer que $W^n L_A(\Omega)$ est une algèbre normée.

En effet on a les inclusions suivantes :

$$W^n L_A(\Omega) \subset W^{n,1}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega).$$

On fait ensuite une démonstration identique à celle du théorème 4-1, en montrant une inégalité du type (4-6) pour $|\alpha| = n$, $0 \leq \beta \leq \alpha$, $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^n L_A(\Omega)$ et $v \in W^n L_A(\Omega)$, u et v étant bornées, les cas $\beta = 0$ et $\beta = \alpha$ sont évidents. Pour $0 < |\beta| < n$, on a pour t assez grand :

$$A^{-1}_{n-|\beta|}(t) A^{-1}_{|\beta|}(t) \leq C \, t^{-1} A^{-1}(t) A^{-1}(t) \leq C_1 \, A^{-1}(t)$$
$$C_1 = C_1(A,n).$$

D'où :

$$\begin{aligned} ||D^\beta u \cdot D^{\alpha-\beta} v||_A &\leq C' ||D^\alpha u||_{A_{n-|\beta|}} ||D^{\alpha-\beta} v||_{A_{|\beta|}} \\ &\leq C'_1 ||u||_{n,A} ||v||_{n,A}. \end{aligned}$$

Le corollaire suivant se déduit facilement de la démonstration du théorème 4-1.

Corollaire 5-2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété du cône. Alors l'espace de Sobolev $W^{m,1}(\Omega)$ est une algèbre normée si et seulement si $m \geq n$.*

References

[1] ADAMS, R., *Sobolev spaces*, Acad. Press (1975).

[2] ADAMS, R., *On the Orlicz-Sobolev Imbedding theorem*, J. Func. Analysis, 24 (1977) pp. 241-257.

[3] BENCHEKROUN, B.M., *Sur quelques propriétés des espaces d'Orlicz-Sobolev et Applications*, Thèse de 3ème cycle, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Faculté des Sciences de Fès (1992).

[4] BENKIRANE, A., *Potentiel de Riesz et problèmes elliptiques dans les espaces d'Orlicz*, Thèse de Doctorat, Université libre de Bruxelles (1988).

[5] BENKIRANE, A., *Inégalités d'interpolation dans les espaces de Sobolev-Orlicz*, Bull. Soc. Math. Belg. 42 (1990), 3, Ser. B-285.

[6] BENKIRANE, A., *Approximations de type Hedberg dans les espaces W^mL* Log *$L(\Omega)$ et applications*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse Vol XI n^{0}2 (1990) pp. 67-78.

[7] BENKIRANE, A. and GOSSEZ J.P., *An approximation theorem in higher order Orlicz-Sobolev spaces and applications*, Studia Math. 92 (1989) pp. 231-255.

[8] DONALDSON, T. and TRUDINGER, N., *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, J. Funct. Anal. 8 (1971) pp. 52-75.

[9] GOSSEZ, J.P., *Some approximation properties in Orlicz-Sobolev spaces*, Studia Math. 74 (1982) pp. 17-24.

[10] KRASNOLEK'SKII, M. and RUTICKII, Ya, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff (1961).

[11] KUFNER, A., JOHN, O. and FUCIK, S., *Function spaces*, Academia (Prague) 1977.

[12] MAZ'YA, Y.G. and SHAPOSHNIKOVA, T.O., *Theory of Multipliers in spaces of Differentiable Functions*, Pitman (1985).

[13] MEYERS, N. and SERRIN, J., $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 51 (1964) 1055-1056.

[14] O'NEIL, R., *Fractional integration in Orlicz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1988) pp. 300-328.

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, B.P. 1796-Atlas
Fès, Maroc.