Divulgaciones Matemáticas Vol. 15 No. 2(2007), pp. 149–160

Coeficientes de Reflexión *vs* Autocorrelaciones Parciales

Reflection Coefficients vs *Partial Autocorrelations*

Glaysar Castro (gcastro@euler.ciens.ucv.ve)
Escuela de Matemática. Universidad Central de Venezuela.

Resumen

Los coeficientes de reflexión son los coeficientes que aparecen en una relación de recurrencia entre los errores de predicción a un paso hacia adelante y hacia atrás de una serie de tiempo de segundo orden. En este trabajo se muestra como estos coeficientes caracterizan las series de tiempo, reflejando su estructura de autocovarianzas. Los coeficientes de reflexión tienen propiedades similares a las autocorrelaciones parciales con la ventaja de que se generalizan al caso multivariado y multidimensional estacionario de forma natural.
Palabras y frases clave: coeficientes de reflexión, autocorrelaciones parciales, series de Tiempo no estacionarias de segundo orden, procesos estacionarios multivariados, procesos periódicamente correlacionados.

Abstract

The reflection coefficients appear in a recurrence relation between the forward and backward one step prediction error of a second order time series. In this work, it is shown how these coefficients characterize the time series keeping its auto-covariance structure. The reflection coefficients have similar properties to partial auto-correlations with the advantage that they can be generalized to the multivariate and multidimensional stationary cases in a natural way.
Key words and phrases: reflection coefficients, partial autocorrelations, non stationary second order time series, stationary multivariate processes, periodically correlated processes.

Recibido 2006/03/10. Revisado 2006/06/21. Aceptado 2006/07/15.
MSC (2000): Primary 62M10, 62H05, 60G12, 94A12; Secondary 93E12.

1 Introducción

Las series de tiempo (ST) de segundo orden se caracterizan por sus *autocorrelaciones parciales*. Las ST autoregresivas estacionarias a valores escalares, fueron caracterizadas por Barndoff-Nielsen y Schou (1973), el caso general estacionario fue hecho paralelamente por Ramsey (1974) y Burg (1975) quien con esta caracterización creó el método de estimación por máxima entropía. El caso no estacionario fue tratado por H. Levvi-Ari y T. Kailath (1981),(1984), T. y mas recientementre el caso no por S. Déregine y S. Lambert-Lacroix (2003).

Los *coeficientes de reflexión* aparecen en una relación de recurrencia entre los errores de predicción a un paso hacia adelante y hacia atrás de una ST estacionaria de segundo orden y tienen interpretación física en óptica (ecuaciones de Fresnel), en acústica ver Markel y Gray (1978), en geofísica, en sísmica ver Claerbout (1976) y en otros campos.

Las autocorrelaciones parciales y los coeficientes de reflexión son muy utilizados en la identificación y construcción de modelos autoregresivos, juegan un rol fundamental en el problema de extensión de covarianzas y además intervienen en muchos algoritmos eficientes del tipo Durbin-Levinson utilizados en la resolución de grandes sistemas. Estos algoritmos han sido generalizados al caso multivariado donde la función de autocovarianzas es matricial Toeplitz por bloques. Ha habido una actividad intensa en este campo desde los años 70, principalmente en la construcción de algoritmos numéricos eficientes y en el dominio de la teoría de interpolación. En este proceso, ha surgido una conexión con otras áreas de la matemática y se han desarrollado nuevas disciplinas, como ejemplo de estas conexiones y extensiones se tiene la teoría de desplazamiento de rango, el método de banda, el problema del levantamiento commutable, la teoría moderna de funciones analíticas y la teoría de operadores, ver Bakonyi y Constantinescu (1992), Foias y Frazo (1990), Kailath y Sayed (1995) Rissanen (1973), Gohberg, Kaashoek y Woerdeman (1991).

La generalización del concepto de autocorrelaciones parciales al caso multivariado no es inmediato y ha sido muy estudiado, ver Morf, Vieira y Kailath (1978), Dégerine (1994) y las referencias allí citadas. La principal dificultad es que la definición involucra la raíz cuadrada de una matriz positiva definida que como es bien sabido, no es única, recientemente, Marcano y Morán (2003) lograron evadir esta dificultad, utilizando la teoría de operadores. En este trabajo se trata de introducir el concepto de coeficientes de reflexión, independientemente del concepto de autocorrelaciones parciales y caracterizar las series de tiempo no estacionarias en función de los coeficientes de reflexión. Los conceptos de autocorrelacion parcial y de coeficiente de reflexión se han identificado, sin embargo, los coeficientes de reflexión se pueden interpretar de manera que tomen en cuenta, en el caso no estacionario, la diferencia que existe, entre el error cuadrático de predición a un paso hacia adelante y el error cuadrático de predición a un paso hacia atrás, evitando así la normalización que aparece en las autocorrelaciones parciales y que ha hecho difícil su generalización al caso multivariado. De hecho, los coeficientes de reflexión pueden generalizarse al caso multivariado y multidimensional de forma sencilla y natural, obteniéndose caracterizaciones para las ST periódicamente correlacionadas, ver Castro y Girardin (2002) y algoritmos para filtros multidimensionales estables, ver Alata y Olivier (2003), Castro, Geronimo y Woerdeman (2003). Los coeficientes de reflexión permiten tratar el problema de extensión de funciones positivas bidimensionales, ver Castro (1997), resultado que ayudó a la solución del problema de los momentos trigonométricos bidimensional y a obtener condiciones necesarias y suficientes para la existencia de factorizaciones de Fejér-Riez de polinomios trigonométricos positivos bidimensionales, ver Geronimo y Woerdeman (2004).

En este trabajo, se obtiene una caracterización de las ST no estacionarias de segundo orden por sus coeficientes de reflexión. Aunque éstos últimos han sido ampliamente utilizados en la construcción de filtros y algoritmos, el autor no encontró en la bibliografía ninguna caracterización de este tipo.

En el caso de series de tiempo estacionarias a valores escalares, los coeficientes de reflexión coinciden con las autocorrelaciones parciales. En general, los coeficientes de reflexión caracterizan a las series de tiempo no estacionarias de segundo orden captando sus estructuras de autocovarianzas. En particular, captan la estructura de autocovarianzas de las series de tiempo periódicamente correlacionadas . La estructura de autocovarianzas de las series de tiempo estacionarias multivariadas coincide con la estructura de las series de tiempo no estacionarias periódicamente correlacionadas y existe una relación biunívoca entre estas series establecida por Gladyshev (1961). Es natural identificar los coeficientes de reflexión de las series de tiempo multivariadas estacionarias con los coeficientes de reflexión de la serie periódicamente correlacionada correspondiente por la relación biunívoca entre ellas.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma, en los preliminares se definen los coeficientes de reflexión y se dan algunas propiedades para poder establecer en la segunda sección, una relación biunívoca entre las autocovarianzas y los coeficientes de reflexión de series temporales de segundo orden. En la segunda sección se obtienen además las autocorrelaciones parciales en función de los coeficientes de reflexión y se comparan sus propiedades. Por último, se explica, a manera de ilustración, como se definen los coeficientes de reflexión de series de tiempo multivariadas estacionarias a partir de la caracterización dada. Otras aplicaciones de los coeficientes de reflexión de series de tiempo multivariadas estacionarias son tratadas en Castro y Girardin (2002).

2 Preliminares

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad y $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ el espacio de Hilbert formado por todas las variables aleatorias (*v.a.*) con varianza finita definidas en Ω a valores en $\mathbb{C}$, con el producto interno $\langle X, Y \rangle = E[X\bar{Y}]$.
Sea $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ una serie de tiempo (ST) centrada contenida en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ a valores complejos y con función de covarianzas *c(.,.)* positiva definida, el caso singular se estudia mas adelante.

Sea $\mathcal{H}^{\mathcal{X}}$ el espacio de Hilbert generado por el proceso X en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Como la función de covarianzas *c(.,.)* es positiva definida, se tiene que para distintos valores de $t_0, ..., t_n \in \mathbb{Z}$, la matriz de covarianzas del vector aleatorio $X_{t_0}, ..., X_{t_n}$, es estrictamente positiva, esto implica que X es una base en $\mathcal{H}^{\mathcal{X}}$. Un proceso con esta propiedad es llamado *regular*.

Se consideran también los subespacios $\mathcal{H}_{k,l}$ generados por las *v.a.* X_t con $k \leq t \leq l$ y se denota por $\Pi_{k,l}$ al proyector ortogonal de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ sobre $\mathcal{H}_{k,l}$.

Para todo $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, tal que $k < l$, se definen las siguientes *v.a.* en $\mathcal{H}_{k,l}$

$$p_{k,l} = X_k - \Pi_{k+1,l}(X_k) \quad \text{y} \quad q_{k,l} = X_l - \Pi_{k,l-1}(X_l).$$

Estas *v.a.* son conocidas como el error de predicción a un paso hacia atrás dado $\mathcal{H}_{k+1,l}$ y el error de predicción a un paso hacia adelante dado $\mathcal{H}_{k,l-1}$.

Es importante señalar que por definición, las familias de v.a. $(p_{j,l})_{j=k}^{l}$ y $(q_{k,j})_{j=k}^{l}$ son dos familias ortogonales en $\mathcal{H}_{k,l}$.

La prueba de los resultados expuestos en esta sección se pueden ver en Castro (1997) y Castro y Seghier (1996). El siguiente teorema establece una relación de recurrencia entre $p_{k,l}$ y $q_{k,l}$, con las condiciones iniciales $p_{k,k} = q_{k,k} = X_k$.

Teorema 1. *Para cada $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $k < l$, existe un número complejo $r(k,l)$ llamado coeficiente de reflexión, que verifica las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned} p_{k,l} &= p_{k,l-1} - r(k,l) q_{k+1,l}, \\ q_{k,l} &= q_{k+1,l} - \overline{r(k,l)} \frac{\|q_{k+1,l}\|^2}{\|p_{k,l-1}\|^2} p_{k,l-1}. \end{aligned}$$

En el caso estacionario $\|q_{k+1,l}\|^2 = \|p_{k,l-1}\|^2$ y se obtiene la bien conocida recursión de Levinson equivalente a una relación entre polinomios trigonométricos obtenida por Szegö. Para simplificar se define, $r(l,k)$ como

$$r(l,k) = \overline{r(k,l)}\frac{\|q_{k+1,l}\|^2}{\|p_{k,l-1}\|^2} \tag{1}$$

y la relación del teorema anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} p_{k,l} &= p_{k,l-1} - r(k,l)q_{k+1,l}, & (2)\\ q_{k,l} &= q_{k+1,l} - r(l,k)p_{k,l-1}. & (3) \end{aligned}$$

Observe que esta recurrencia es por diagonales. Para la diagonal $d = k-l = 0$ se tienen las condiciones iniciales $p_{k,k} = q_{k,k} = X_k$ y para calcular $r(k,l)$ en términos de lo obtenido en la diagonal anterior $d = l-k-1$ se tienen las siguientes identidades.

Proposición 1. *Para cada* (k,l), $0 \leq k < l \leq n-1$, *se verifica*

$$\begin{aligned} r(k,l) &= \frac{\langle p_{k,l-1}, q_{k+1,l}\rangle}{\|q_{k+1,l}\|^2}, & (4)\\ r(l,k) &= \overline{r(k,l)}\frac{\|q_{k+1,l}\|^2}{\|p_{k,l-1}\|^2} = \frac{\langle q_{k+1,l}, p_{k,l-1}\rangle}{\|p_{k,l-1}\|^2}, &\\ \|p_{k,l}\|^2 &= \|p_{k,l-1}\|^2[1 - r(k,l)r(l,k)] = \|X_k\|^2 \prod_{j=k+1}^{l}[1 - r(k,j)r(j,k)] & (5)\\ \|q_{k,l}\|^2 &= \|q_{k+1,l}\|^2[1 - r(k,l)r(l,k)] = \|X_l\|^2 \prod_{j=k}^{l-1}[1 - r(j,l)r(l,j)]. & (6) \end{aligned}$$

Una propiedad muy importante de estos coeficientes de reflexión es que

$$0 \leq r(k,l)r(l,k) \leq 1.$$

Se verifica con una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Shwartz. Este producto resulta ser el cuadrado de la autocorrelación parcial entre X_k y X_l.

Para poder establecer una relación entre las covarianzas y los coeficientes de reflexión se necesita una fórmula en función de los coeficientes de reflexión para calcular los determinantes de las matrices de covarianzas. Sea $\Gamma_{k,l}$ la matriz de covarianzas del vector aleatorio $(X_k, X_{k+1}, ..., X_l)$. y sean $\mathbf{q}_{i,j}$, $\mathbf{p}_{i,j}$,

$k \leq i < j \leq l$ los $(l-k+1) \times 1$ vectores columnas de los coeficientes de las v.a. $q_{i,j}$ y $p_{i,j}$ en términos de $\{X_k, X_{k+1}, ..., X_l\}$. Se definen las siguientes matrices por sus vectores columnas

$$R^p_{k,l} = [\mathbf{p}_{k,l}, \mathbf{p}_{k+1,l}, ..., \mathbf{p}_{l,l}],$$
$$R^q_{k,l} = [\mathbf{q}_{k,k}, \mathbf{q}_{k,k+1}, ..., \mathbf{q}_{k,l}].$$

Las matrices $R^p_{k,l}$ son triangulares inferiores con unos sobre la diagonal principal y las matrices $R^q_{k,l}$ son triangulares superiores con unos sobre la diagonal principal. Por lo tanto,

$$det(R^q_{k,l}) = det(R^p_{k,l}) = 1 \tag{7}$$

Proposición 2. *Para cada $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $k < l$, las matrices $D^p_{k,l}$ y $D^q_{k,l}$ definidas por*

$$D^p_{k,l} = (R^p_{k,l})^*(\Gamma_{k,l})(R^p_{k,l}) \tag{8}$$
$$D^q_{k,l} = (R^q_{k,l})^*(\Gamma_{k,l})(R^q_{k,l}) \tag{9}$$

son matrices diagonales tales que $D^p_{k,l}(i,i) = \|p_{i,l}\|^2$ y $D^q_{k,l}(i,i) = \|q_{k,i}\|^2$, $k \leq i \leq l$.

La demostración es una consecuencia inmediata de la ortogonalidad de los vectores columnas de las matrices $R^p_{k,l}$ y $R^q_{k,l}$. De esta proposición se obtienen dos resultados importantes:

1. Dos factorizaciones de las inversas de las matrices de covarianzas: Como el proceso es regular, las matrices de covarianzas $\Gamma_{k,l}$ son inversibles. De (8) y (9) se deducen las siguientes factorizaciones triangulares para $\Gamma^{-1}_{k,l}$, $k < l$,

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}_{k,l} &= (R^p_{k,l})(D^p_{k,l})^{-1}(R^p_{k,l})^* \\ &= (R^q_{k,l})(D^q_{k,l})^{-1}(R^q_{k,l})^* \end{aligned}$$

   donde los factores triangulares se calculan de forma recursiva.

2. Una fórmula para el determinante. De (7), (8) y (9) se obtiene,

$$\begin{aligned} Det(\Gamma_{k,l}) &= \prod_{k \leq i \leq l} \|p_{i,l}\|^2, \\ &= \prod_{k \leq i \leq l} \|q_{k,i}\|^2. \end{aligned}$$

El símbolo * denota la transpuesta conjugada.

Al reemplazar $\|p_{i,l}\|^2$ o $\|q_{k,i}\|^2$ por su valor dado en (5) o en (6) se llega a la siguiente *fórmula del determinante* en términos de los coeficientes de reflexión.

$$Det(\Gamma_{k,l}) = \prod_{k \leq i < j \leq l} \|X_i\|^2 (1 - r(i,j)r(j,i)). \tag{10}$$

Es importante resaltar que si el proceso es regular, las matrices $\Gamma_{k,l}$ son positivas definidas, entonces, para todo $(k,l) \in \mathbb{Z}$, se debe verificar que $Det(\Gamma_{k,l}) > 0$. Por lo tanto, por (10) el producto $r(i,j)r(j,i)$ debe ser estrictamente menor que uno para todo $i < j$.

Cuando $r(k,l)r(l,k) = 1$ para algún par de enteros $k < l$, el proceso no es regular, el conjunto de *v.a.* $\{X_k, X_{k+1}, ..., X_l\}$ es casi seguramente linealmente dependiente y se dice que el proceso es no regular. Además , $\|q_{k,l}\|^2 = \|p_{l,k}\|^2 = 0$ y las relaciones de recurrencia (2) y (3) se interrumpen pues $r(k, l+1)$ y $r(l, k-1)$ no están bien definidos. En este caso se hace la siguiente convención para todo entero $s > 0$,

$$r(k, l+s) \quad = \quad r(l, k-s) = 0, \tag{11}$$

de esta forma, se puede seguir aplicando las relaciones de recurrencia (2) y (3) obteniéndose

$$p_{k,l+s} = p_{k,l} \quad \text{y} \quad q_{k-s,l} = q_{k,l}.$$

3 Caracterización de ST no estacionarias por sus coeficientes de reflexión

Es bien sabido que una ST centrada no estacionaria en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ se caracteriza por su función de autocovarianzas, en esta sección estableceremos una relación biunívoca entre la clase de funciones de autocovarianzas y la clase de funciones de coeficientes de reflexión.

Se denota por $\mathcal{C}$ la clase de funciones de autocovarianzas, es decir, la clase de funciones no negativas definidas en $\mathbb{Z}^2$ a valores en $\mathbb{C}$.

Definición 1. *Se define la clase $\mathcal{R}$ de funciones de coeficientes de reflexión como aquellas funciones r definidas en $\mathbb{Z}^2$ a valores en $\mathbb{C}$ que cumplen las siguientes propiedades*

$$\begin{aligned} r(k,k) &\geq 0, && (12)\\ r(l,k) &= \overline{r(k,l)}\rho(k,l) \qquad l > k, && (13)\\ 0 &\leq r(k,l)r(l,k) \leq 1. && (14) \end{aligned}$$

Donde $\rho(k,l)$ se define recursivamente como sigue

$$\begin{aligned}\rho(l,k) &= \frac{r(l,l)\prod_{j=k+1}^{l-1}[1-r(j,l)r(l,j)]}{r(k,k)\prod_{j=k+1}^{l-1}[1-r(k,j)r(j,k)]}, \text{ si el denominador es distinto de cero,}\\ &= 0 \text{ si no.}\end{aligned}$$

La clase $\mathcal{R}$ de funciones de coeficientes de reflexión no es tan bonita como la clase de autocorrelaciones parciales definida por S. Déregine y S. Lambert-Lacroix (2003), pero una de sus ventajas, es que permite la generalización al caso multidimensional sin ninguna complicación.
La subclase de $\mathcal{C}$ correspondiente a autocovarianzas de procesos estacionarios se caracteriza por la subclase de $\mathcal{R}$ que verifica

$$\frac{r(l,l)\prod_{j=k+1}^{l-1}[1-r(j,l)r(l,j)]}{r(k,k)\prod_{j=k+1}^{l-1}[1-r(k,j)r(j,k)]} = \begin{matrix} 1 & \text{si el denominador es distinto de cero,}\\ 0 & \text{si no.}\end{matrix}$$

Teorema 1. *Existe una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{R}$.*

Demostración: Dada una función c en $\mathcal{C}$, existe un único proceso X_t en $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ que realiza estas covarianzas. Se construye la función $r \in \mathcal{R}$ correspondiente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&r(k,k) = c(k,k),\\ &r(k,l) \text{ y } r(l,k) \quad k>l, \quad \text{se obtienen aplicando las fórmulas (2) y (3)}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{y si no están definidas (11).}\end{aligned}$$

Esta función satisface las propiedades requeridas para estar en $\mathcal{R}$. Como $c(k,k) \geq 0$ para toda función c en $\mathcal{C}$, r satisface la propiedad (12). Por (1), (5), (6) y la definición de $\rho(l,k)$, r satisface (13) , y por último la propiedad (14) es consecuencia de (10) ya que el determinante de las matrices de covarianzas no puede ser negativo.

Dada una función r en $\mathcal{R}$, de define $c(k,k) = r(k,k)$. Obtener $c(k,l)$, con $k>l$ es algo mas complicado. Se quiere determinar las autocovarianzas del proceso X_t cuyos coeficientes de reflexión vienen dados por r. De este proceso se sabe, que la varianza de X_k es

$$\|X_k\|^2 = c(k,k) = r(k,k)$$

y que debe satisfacer la recurrencia del Teorema 1 con el r dado. Entonces, para $l = k+1$ debe cumplirse que

$$\begin{aligned}p_{k,k+1} = p_{k,k} - r(k,k+1)q_{k+1,k+1} \quad &\Rightarrow\\ X_k - \Pi_{k+1,k+1}(X_k) = X_k - r(k,k+1)X_{k+1},&\end{aligned} \tag{15}$$

tomando el producto interno en (15) por X_{k+1} se obtiene que

$$0 = c(k,k+1) - r(k,k+1)c(k,k)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}c(k,k+1) &= r(k,k+1)r(k+1,k+1),\\ c(k+1,k) &= \overline{c(k,k+1)}.\end{aligned}$$

Para $l = k+2$ se tiene,

$$\begin{aligned} p_{k,k+2} &= p_{k,k+1} - r(k,k+2)q_{k+1,k+2} \quad \Rightarrow \\ X_k - \Pi_{k+1,k+2}(X_k) &= X_k - \Pi_{k+1,k+1}(X_k) - r(k,k+2)q_{k+1,k+2} \quad \Rightarrow \\ X_k - \Pi_{k+1,k+2}(X_k) &= X_k - \frac{c(k+1,k+1)}{c(k,k)}X_{k+1} - r(k,k+2)q_{k+1,k+2} \end{aligned} \tag{16}$$

Tomando el producto interno en (16) por X_{k+2} se obtiene que

$$0 = c(k,k+2) - \frac{c(k+1,k+1)}{c(k,k)}c(k+1,k+2) - r(k,k+2)\|q_{k+1,k+2}\|^2$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} c(k,k+2) &= \frac{c(k+1,k+1)}{c(k,k)}c(k+1,k+2) + \\ & \quad r(k,k+2)r(k+2,k+2)[1 - r(k+1,k+2)r(k+2,k+1)], \\ c(k+2,k) &= \overline{c(k,k+2)}. \end{aligned}$$

La generalización a cualquier $l > k$ se basa en dos hechos fundamentales,

1. El producto interno $\langle \Pi_{k+1,l-1}(X_k), X_l\rangle = -\langle X_k - p_{k,l-1}, X_l\rangle$ depende de las autocovarianzas definidas en los pasos anteriores y los coeficientes de reflexión dados.
2. La norma $\|q_{k+1,l}\|^2$ se puede escribir en términos de los coeficientes de reflexión,

$$\|q_{k+1,l}\|^2 = r(l,l)\prod_{j=k+1}^{l-1}[1 - r(j,l)r(l,j)].$$

Procediendo de manera similar para obtener $c(k,k+2)$, se llega a

$$\begin{aligned} c(k,l) &= r(k,l)\|q_{k+1,l}\|_c^2 + \langle \Pi_{k+1,l-1}(X_k), X_l\rangle \\ &= r(k,l)\|q_{k+1,l}\|_c^2 - \langle X_k - p_{k,l-1}, X_l\rangle. \end{aligned}$$

La propiedad (13) asegura que el proceso con esta función de autocovarianzas satisface la recurrencia del Teorema 1. Finalmente la función construida c pertenece a la clase $\mathcal{C}$ ya que el determinante de las matrices $[c(i,j)]_{i,j=k}^{l}$ es no negativo por la propiedad (14) y la fórmula (10). ♢

Esta biyección permite resolver el problema de extensión de covarianzas, que consiste en hallar una *ST* cuyas primeras covarianzas coincidan con unas dadas. La matriz de covarianzas dada tiene asociada sus coeficientes de reflexión, por cada extensión de estos coeficientes con la debida propiedad se obtiene una solución al problema de extensión de covarianzas. La solución de máxima entropía se obtiene completando la sucesión de coeficientes de reflexión con ceros, ver Castro y Girardin (2002).

3.1 Autocorrelaciones parciales

Definición 2. *La autocorrelación parcial $\delta(k,l)$ entre X_k y X_l $(k < l)$ se define como la correlación entre X_k y X_l después de haber eliminado todos los efectos lineales de las variables intermedias. Es decir se define como la correlación entre $p_{k,l-1}$ y $q_{k+1,l}$.*

$$\delta(k,l) = \frac{\langle p_{k,l-1}, q_{k+1,l}\rangle}{\|q_{k+1,l}\|\|p_{k,l-1}\|}$$

Las autocorrelaciones parciales se pueden escribir el función de los coeficientes de reflexión , de hecho, es inmediato verificar las siguientes identidades,

$$\begin{aligned}\delta(k,l) &= \frac{\|q_{k+1,l}\|}{\|p_{k,l-1}\|}r(k,l),\\ \delta(l,k) &= \frac{\|p_{k,l-1}\|}{\|q_{k+1,l}\|}r(l,k),\\ r(k,l).r(l,k) &= |\delta_{k,l}|^2.\end{aligned}$$

Además,

$$\frac{\|q_{k+1,l}\|}{\|p_{k,l-1}\|} = \frac{r(l,l)^{1/2}\prod_{j=k+1}^{l-1}[1-r(j,l)r(l,j)]^{1/2}}{r(k,k)^{1/2}\prod_{j=k+1}^{l-1},[1-r(k,j)r(j,k)]^{1/2}}$$

donde se considera la raíz positiva pues se trata de normas.

En el caso estacionario $\|q_{k+1,l}\| = \|p_{k,l-1}\|$ y los coeficientes de reflexión coinciden con las autocorrelaciones parciales. En el caso no estacionario, los coeficientes de reflexión dan mas información sobre el proceso que las autocorrelaciones parciales pues toman en cuenta que las normas de los errores de predicción hacia adelante y hacia atrás son diferentes.

3.2 Caso Multivariado

La estructura de las matrices de covarianzas de las series de tiempo periódicamente correlacionadas coincide con las de las series de tiempo estacionarias multivariadas, ambas son Toeplitz por bloques. Existe una relación biunívoca entre estas series establecida por Gladyshev (1961). Es natural identificar los coeficientes de reflexión de las series de tiempo multivariadas estacionarias con los coeficientes de reflexión de la serie periódicamente correlacionada correspondiente por la relación biunívoca entre ellas.

Definición 3. *Una serie de tiempo de segundo orden $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es llamada* **Periódicamente Correlacionada** *con período $d \in \mathbb{N}$ si para cada tripleta de números enteros s, t, k , su función de autocovarianzas c verifica*

$$c(s,t) = c(s+kd, t+kd).$$

Sea X una serie de tiempo periódicamente correlacionada con período d, $PC(d)$. Se define el proceso estacionario $Y_t^k = X_{k+dt}$, $k = 1, ..., d$ como el k-ésimo componente de un proceso d-variado

$$Y = (Y^1, Y^2, ..., Y^d).$$

Teorema 2. *(GLADYSHEV) X es $PC(d) \iff (Y^1, ..., Y^d)$ es estacionario.*

Este teorema permite trasladar los resultados conocidos para series de tiempo periódicamente correlacionadas a las series de tiempo multivariadas estacionarias y viceversa. Por ejemplo, el concepto de función de densidad espectral para series no estacionarias no está claro, sin embargo este concepto es muy preciso en el caso de series de tiempo multivariadas estacionarias y se puede trasladar a series de tiempo periódicamente correlacionadas , ver Castro& Girardin (2002).

La estructura de autocovarianzas de una serie de tiempo d-variadas estacionaria Y de segundo orden, está unívocamente determinada por una función c en $\mathcal{C}$ con la siguiente estructura

$$c(s,t) = c(s+kd, t+kd), \quad s,t,k \in \mathbb{Z}.$$

Por el Teorema 1, a c le corresponde una función r en $\mathcal{R}$, que conserva la estructura

$$r(s,t) = r(s+kd, t+kd), \quad s,t,k \in \mathbb{Z}.$$

Las matrices de covarianzas $d \times d$ de la serie de tiempo d-variada estacionaria Y, $C_0, C_1, \cdots, C_n, ...$ vienen dadas por

$$C_n = [c(k,l)]_{k=0,\ldots,d-1;\;\; l=nd,nd+1,\ldots,(n+1)d-1}, n \geq 0, \qquad C_{-n} = \overline{C_n}.$$

Definición 4. *Se definen los coeficientes de reflexión de la serie de tiempo d-variada estacionaria Y de segundo orden como, para $n \geq 0$*

$$R_n = [r(k,l)]_{k=0,\ldots,d-1;\;\; l=nd,nd+1,\ldots,(n+1)d-1},$$
$$R_{-n} = [r(k,l)]_{l=0,\ldots,d-1;\;\; k=nd,nd+1,\ldots,(n+1)d-1}$$

Estos coeficientes de reflexión sirven para identificar el orden de un modelo autoregresivo multivariado. La serie de tiempo d-variada estacionaria Y es autoregresiva de orden p si y solo si R_p y R_{-p} no son nulas y $R_k = 0$ para $|k| > p$. Para obtener los errores de predicción a un paso, las extensiones de covarianzas de series de tiempo multivariadas estacionarias , para identificar modelos, obtener soluciones de máxima entropía, etc., lo mejor es trabajar con la serie de tiempo periódicamente correlacionada y luego traducir los resultados a la serie de tiempo multivariada correspondiente, tal como se hace en Castro& Girardin (2002).

Referencias

[1] O. Alata, C. Olivier, *Choice of a 2-D causal autoregressive texture model using information criteria*, Pattern Recognition Letters 24(2003), 1191–1201.

[2] M. Bakonyi, T. Constantinescu, *Schur's Algorithms and Several Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics no. 261., White Plains, NY, Longman, 1992.

[3] O. Barndoff-Nielsen, G. Schou, *On the parametrization of autoregressive models by partial autocorrelations*, J. Multivariate Anal. 3(1973), 408–409.

[4] J. P. Burg, *Maximum entropy spectral analysis*, Ph. D. dissertation, Dept. Geophys., Stanford Univ., 1975.

[5] G. Castro, A. Seghier, *Schur-Szegö Coefficients for positive definite Hermitian Forms and Orthogonal Polynomials*, C. R. Sci. Paris, t. 332, Série 1 (1996), 1129–1134.

[6] G. Castro, *Coefficients de réflexion généralisés, extension de covariances mutidimensionnelles et autres applications*, Thèse Univ. Paris-Sud, France, 1997.

[7] G. Castro, V. Girardin, *Maximum of Entropy and Extension of Covariance Matrices for Periodically Correlated and Multivariate Stationary Processes*, Statistic and Probability Letters, 59(2002), 37–52.

[8] G. Castro, J. S. Geronimo, H. J. Woerdeman, *A numerical algorithm for stable 2D autoregressive filter design*, Signal Processing, 83(6) (2003), 1299–1308.

[9] J. F. Claerbout, *Fundamentals of geophysical data processing*, McGraw-Hill, 1976.

[10] S. Dégerine, *Sample partial autocorrelation function of a nonstationary time series*, J. Multivariate Anal. 50(1994), 294–313.

[11] S. Dégerine, S. Lambert-Lacroix, *Characterization of the partial autocorrelation function of a multivariate time series*, J. Multivariate Anal. 87(1) (2003), 46–59.

[12] C. Foias, E. Frazho, *The Commutant lifting approach to interpolation problems*, Operator Theory: Advances and Applications, Base, Switzerland: Birkäuser-Verlag, 44, 1990.

[13] E. Gladyshev, *Periodically correlated random sequences*, Sov. Math. Dokl. 2(1961), 385–388.

[14] M. A. Kaashoek, I. Gohberg, H. J. Woerdeman, *The Band Method for Several Positive Extension Problems of Non-Band Type*, J. Operator Theory 26(1991), 191-218.

[15] J. S. Geronimo, H. J. Woerdeman, *Positive extensions, Féjer-Riez factorization and autoregressive filters in two variables*, Annals of Math. 160(2004), 839–906.

[16] T. Kailath, H. Sayed, *Displacement structure: Theory and applications*, SIAM Rev., 37(3) (1995), 297–386.

[17] H. Lev-Ari, T. Kailath, *Lattice filter parameterization and modeling of nonstationary processes*, Information Theory, IEEE Transactions 30(1) (1984), 2–16.

[18] H. Lev-Ari, T. Kailath, *Schur and Levinson algorithms for nonstationary processes*, Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, Signal Processing, 30(1981), 860–864.

[19] J. G. Marcano, M. D. Morán, *The ArovGrossman Model and the Burg Multivariate Entropy*, J. Fourier Analysis and Applications, 9(6) (2003), 623–647.

[20] J. D. Markel, H. Gray Jr., *Linear prediction of speech*, Springer Verlag, New York, 1978.

[21] M. Morf, A. Vieira, T. Kailath, *Covariance characterization by partial autocorrelation matrices*, Ann. Statist., 6(1978), 643–48.

[22] J. Rissanen *Algorithms for the triangular decomposition of block Hankel and Toeplitz matrices with application to factoring positive matrix polynomials*, Math. Comp., 27(1973), 147–154.