

# Problemas de Suma Cero y Baricéntricos

## *Zero Sum and Baricentric Problems*

Agatina Cammaroto, Mirelli Durán, Samuel González  
Departamento de Formación General y Ciencias Básicas.  
Universidad Simón Bolívar. Sede del Litoral. Camurí Grande.  
Apartado Postal 314. La Guaira. Municipio Vargas. Venezuela.

### Resumen

Los objetivos de este trabajo son:

1. Determinar:
  - (a) El Número Ramsey de Suma Nula para  $t$  estrellas  $K_{1,n}$  con lados coloreados con elementos de  $Z_k$ .
  - (b) La caracterización de las coloraciones de los lados del grafo completo  $K_{n+k-1}$  en  $Z_k$  de tal forma que no existan estrellas  $K_{1,n}$  de suma nula (para  $k$  impar).
2. La definición del Número Ramsey Baricéntrico y el establecimiento de sus propiedades básicas. El valor de este número es calculado para estrellas  $K_{1,p}$  con  $p$  primo.

**Palabras y frases clave:** Números Ramsey, grafo completo, estrella de suma nula, coloración, suma baricéntrica.

### Abstract

The objectives of this paper are:

1. To determine:
  - (a) The zero-sum Ramsey number for  $t$  stars  $K_{1,n}$  with sides colored by elements of  $Z_k$ .
  - (b) The maximum number of colors to label the sides of a complete graph  $K_{n+k-1}$  with no null-sum stars  $K_{1,n}$ .
2. To define the Ramsey Baricentric Number and to establish its basic properties. The value of this number is calculated for stars  $K_{1,p}$  with  $p$  prime.

**Key Words and phrases:** Ramsey Numbers, complete graph, stars with null sum, coloration, baricentric sum .

## 1 Introducción

En 1961 P. Erdős, A. Ginzburg y A. Ziv [9] demostraron que toda sucesión de elementos en un grupo abeliano  $G$ , de longitud  $2n - 1$ , contiene una subsucesión de longitud  $n$  de suma cero. Actualmente existen varias demostraciones de este teorema, entre ellas podemos mencionar además de la versión original las de H. Mann [14] , C. Bailey y R. Richter [2] y Y. Hamidoune [12]. Este resultado motivó en el campo de la Teoría Aditiva y Combinatoria el desarrollo de diversas áreas de investigación entre las cuales tenemos el estudio de los problemas sobre los números Ramsey de suma cero. En 1992, Y. Caro [3] y A. Bialostocki y P. Dierker [6] demostraron que el mínimo orden que debe tener un grafo completo (de lados coloreados con elementos de  $Z_k$ ) para que exista una estrella de suma nula es  $n + k - 1$  si  $n \equiv k \equiv 0 \pmod{2}$  y  $n + k$  en los casos restantes.

Una de las finalidades de este trabajo es caracterizar la manera de colorear los lados del grafo completo  $K_{n+k-1}$  con elementos de  $Z_k$  , de tal forma que no contenga una copia  $K_{1,n}$  de suma nula. Además se determina el mínimo orden que debe tener un grafo completo (de lados coloreados con elementos de  $Z_k$ ) para que existan  $t$  copias de la estrella de suma nula, se define el Número Ramsey Baricéntrico  $BR(G, Z_k)$  de un grafo  $G$  y se establecen sus propiedades básicas, con algunas estimaciones de  $BR(K_{1,p}, Z_p)$ .

## 2 Terminología y notación

A continuación daremos las definiciones básicas utilizadas en el desarrollo de este trabajo.  $Z_k$  denotará el grupo de los enteros módulo  $k$ . Una  $k$ -coloración de los lados de un grafo  $G = (V(G), E(G))$  es una función  $f: E(G) \rightarrow Z_k$ . Si

$$\sum_{e \in E(G)} f(e) = 0$$

diremos que  $G$  es un *grafo de suma nula con respecto a  $f$* . El grafo completo de  $n$  vértices lo denotamos  $K_n$ . El *número Ramsey clásico*  $R(G; 0, 1, 2, \dots, k-1)$  se define como el mínimo entero  $M$  tal que para cualquier  $k$ -coloración de los lados de  $K_M$  exista una copia monocromática de  $G$  en  $K_M$ . Un  $m$ -subconjunto de un conjunto  $A$  es un conjunto  $B \subset A$  con  $|B| = m$ .

### 3 Herramientas

Uno de los primeros resultados dentro de los problemas de suma cero es el siguiente (ver [12]):

**Lema 3.1** *Sea  $G$  un grupo abeliano de orden  $n$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una sucesión de elementos de  $G$ . Entonces existe una subsucesión no vacía  $x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(k)}$  con suma nula.*

Demostración: Consideremos el conjunto de sumas

$$x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Si estos  $n$  elementos son todos diferentes entonces el cero debe ser uno de ellos. En caso contrario dos de ellos deben coincidir, al simplificar se obtiene una subsucesión no vacía de suma nula.

El siguiente teorema (ver [9]) motivó el desarrollo de los problemas de suma cero sobre un grupo  $G$ .

**Teorema 3.2 (Erdős–Ginzburg–Ziv, 1961)**

*Toda sucesión de  $2n - 1$  elementos (no necesariamente distintos) de un grupo abeliano  $G$  de orden  $n$  contiene una subsucesión de cardinalidad  $n$  de suma nula.*

La longitud de la sucesión  $2n - 1$  dada en el teorema es la mejor posible ya que si se tiene una sucesión de  $n - 1$  ceros y  $n - 1$  unos no existe ninguna subsucesión de  $n$  elementos de suma cero.

**Teorema 3.3** *Sean  $G$  un grupo de orden  $n$ ,  $k = ns$  un entero positivo,  $A$  un grupo con  $|A| = n + k - 1$  y una función  $f: A \rightarrow G$ . Entonces, existen  $A_1, A_2, \dots, A_s$  subconjuntos de  $A$ , con  $|A_i| = n$  para  $1 \leq i \leq s$  y  $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , tales que  $\sum_{x \in A_i} f(x) = 0$ .*

Demostración: Por inducción.

El Teorema 3.2 puede obtenerse a partir de este último tomando  $s = 1$ . Recientemente Bialostocki y Dierker [3], Caro [6] y Flores y Ordaz [11] han precisado el Teorema de Erdős–Ginzburg–Ziv de la siguiente forma:

**Teorema 3.4 ([3], [6])** *Supóngase que  $n \geq k \geq 2$  son enteros tales que  $k$  divide a  $n$ . Sea  $f: A \rightarrow Z_k$ , con  $|A| = n + k - 2$ , una sucesión; entonces una de las dos siguientes condiciones se cumple:*

*i) Existe  $S \subset A$  con  $|S| = n$  tal que  $\sum_{x \in S} f(x) = 0$ .*

- ii) Existen  $a, b \in Z_k$  tales que  $\langle a - b \rangle = Z_k$  (es decir  $Z_k$  es generado por  $b - a$ ) y la sucesión  $f$  está formada por  $rk - 1$  elementos iguales a  $a$  y  $(s - r)k + k - 1$  elementos iguales a  $b$ , donde  $n = ks$  y  $1 \leq r \leq s$ .

**Teorema 3.5 ([11])** Sean  $n \geq 3$  y  $A$  un conjunto finito con  $|A| \geq 2n - 3$ . Sea  $f: A \rightarrow Z_n$  tal que  $\sum_{x \in B} f(x) \neq 0$  para todo  $B \subset A$  tal que  $|B| = n$ . Entonces existen  $a, b \in Z_n^*$  tales que una de las siguientes condiciones es válida:

- i)  $|A| \leq 2n - 2$ ,  $|f^{-1}(a)| = n - 1$  y  $|f^{-1}(b)| = |A| - n + 1$ .  
 ii)  $|A| = 2n - 3$ ,  $|f^{-1}(a)| = n - 1$ ,  $|f^{-1}(b)| = n - 3$  y  $|f^{-1}(2b - a)| = 1$ .

Un conocido resultado de Teoría de Grafos es el siguiente:

**Lema 3.6** El número de vértices de grado impar es par.

**Teorema 3.7 (Harary, [13])**

- i) Si  $n$  es impar, entonces  $K_n$  es la unión disjunta por lados de  $(n - 1)/2$  ciclos hamiltonianos.  
 ii) Si  $n$  es par, entonces  $K_n$  es la unión disjunta por lados de  $(n - 1)/2$  ciclos hamiltonianos y un matching perfecto.

## 4 Números Ramsey de suma nula

Sean  $G$  un grafo y  $k$  un entero positivo que divide a  $|E(G)|$ . El número Ramsey de suma nula denotado por  $R(G, Z_k)$  se define como el mínimo entero  $M$  tal que para toda  $Z_k$ -coloración de los lados de  $K_M$  éste contiene una copia de  $G$  de suma nula. La existencia del número Ramsey de suma nula está garantizada por la existencia del número Ramsey clásico  $N = R(G; 0, 1, 2, \dots, k - 1)$ . En efecto, para toda  $k$ -coloración  $f$  de  $K_N$  éste contiene una copia monocromática de  $G$ , digamos de color  $s$ . Al sumar los valores de  $f$  en lados de la copia de  $G$  resulta  $|E(G)|s \equiv 0 \pmod{k}$ . Luego  $R(G, Z_k)$  existe y es menor o igual a  $R(G; 0, 1, 2, \dots, k - 1)$ . Observe que  $|E(G)|$  debe ser múltiplo de  $k$ , ya que de lo contrario para la  $k$ -coloración de  $K_M$  idénticamente igual a uno en cada arista no habría ninguna copia de  $G$  en  $K_M$  con suma nula.

**Lema 4.1** Sea  $G$  un grafo,  $f$  una  $k$ -coloración de  $G$  y  $n$  un entero positivo múltiplo de  $k$ . Si  $G$  tiene un vértice  $x$  de grado  $d(x) \geq k + n - 1$ , entonces  $G$  contiene una copia de  $K_{1,n}$  de suma nula.

**Teorema 4.2** *Si  $k$  divide a  $n$ , entonces*

$$R(K_{1,n}, Z_k) = \begin{cases} n+k-1 & \text{si } n \equiv k \equiv 0 \pmod{2} \\ n+k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este número fue calculado para  $k = n$  por Bialostocki y Dierker [3] en 1992 y en el caso general ( $n$  múltiplo de  $k$ ) por Caro [6] en el mismo año.

Los siguientes dos teoremas no sólo permiten determinar el mínimo orden  $M = R(tK_{1,n}, Z_k)$  de un grafo completo que garantice la presencia de  $t$ -estrellas disjuntas por lados, cada una de suma nula, sino que también da una estimación de la cantidad de copias de la estrella de suma nula.

**Teorema 4.3** *Sean  $M$  y  $k$  enteros positivos,  $n$  un múltiplo de  $k$  tal que  $M \geq n+k$  y  $t$  el número de estrellas disjuntas por lados de suma nula en una  $k$ -coloración de  $K_M$ . Entonces,*

$$\left\lceil \frac{M(M-n-k+1)}{2n} \right\rceil \leq t \leq \left\lfloor \frac{M(M-1)}{2n} \right\rfloor$$

Demostración: Si  $d(x) \geq n+k-1$  para algún  $x \in V(K_M)$ , entonces existe en  $K_M$  una copia de  $K_{1,n}$  de suma nula. Luego, se suprimen de  $K_M$  todos los lados de esta copia y se repite el proceso hasta obtener un grafo  $K_M$  con vértices de grado menor o igual que  $n+k-2$ , logrando así la cota inferior.

La cota superior se obtiene observando que el número de lados de  $K_M$  es  $M(M-1)/2$ . Por lo tanto, en  $K_M$  se pueden obtener a lo sumo  $M(M-1)/(2n)$  estrellas. Entonces,

$$\frac{M(M-n-k+1)}{2n} \leq t \leq \frac{M(M-1)}{2n} \tag{1}$$

Ahora bien, como consecuencia de (1) se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 4.4** *El mínimo orden  $M$  de un grafo completo que garantice la presencia de  $t$  estrellas disjuntas por lados de suma nula es al menos*

$$\sqrt{2tn + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

y a lo sumo

$$\sqrt{2tn + \frac{(n+k-1)^2}{4}} + \frac{n+k-1}{2}$$

Como una aplicación de los teoremas anteriores se tiene que:

- 1) El mínimo orden  $M$  de un grafo completo que garantice la presencia de cuatro estrellas  $K_{1,4}$  disjuntas por lados de suma nula en  $Z_2$  es por lo menos 7 y a lo sumo 24, es decir  $7 \leq R(4K_{1,4}, Z_2) \leq 24$ . En este ejemplo podemos visualizar que en  $K_6$  no podemos encontrar  $4K_{1,4}$  disjuntas por lados con suma nula en  $Z_2$ . Por lo tanto  $R(4K_{1,4}, Z_2) = 7$ .
- 2) En  $K_8$  coloreado con elementos de  $Z_2$  se pueden encontrar de 3 a 7 estrellas  $K_{1,4}$  de suma nula.

## 5 No existencia de las estrellas de suma nula

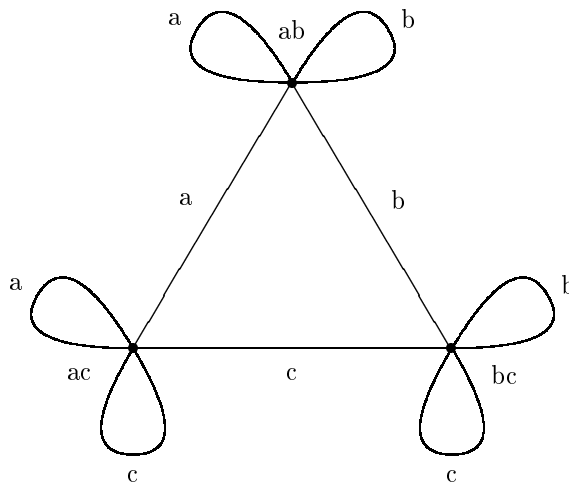
Sean  $k$  un número impar y  $n$  un múltiplo de  $k$ . El objetivo de esta sección es determinar el número máximo de colores con los que se debe colorear los lados de un grafo completo  $K_{n+k-1}$  de tal forma que no contenga una estrella  $K_{1,n}$  de suma nula y dar la descripción de la coloración del grafo completo. Consideremos un grafo  $G$  con lados coloreados de manera que cada vértice tiene lados incidentes coloreados con dos colores (un par de colores). Un grafo  $C$  tal que cada vértice está identificado por el par de colores (elementos de  $Z_k$ ) con los que están coloreados sus lados incidentes, se denomina *grafo de pares de colores*. Un grafo de pares de colores  $C$  satisface las siguientes propiedades:

- i) Dos vértices en  $V(C)$  son adyacentes si y sólo si existe un color común entre los pares de colores; en tal caso, el lado incidente está etiquetado con el color común.
- ii) A cada vértice de  $V(C)$  se le asignan dos bucles ('loops'), uno de cada color. Por ejemplo en el vértice  $ab$  hay dos bucles, uno etiquetado con  $a$  y el otro con  $b$ .

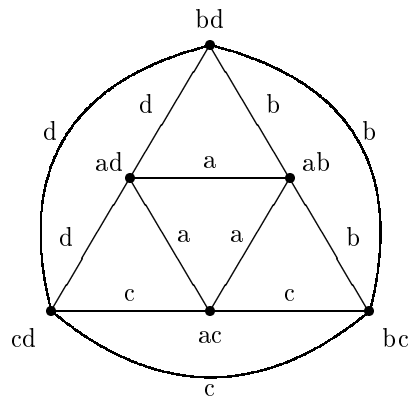
Es claro que los vértices  $ab$  y  $cd$  no son adyacentes, por lo que decimos que los vértices son *disjuntos*.

A continuación se presentan ejemplos de grafos de pares de colores.

- 1) Con tres colores  $a, b, c$ .

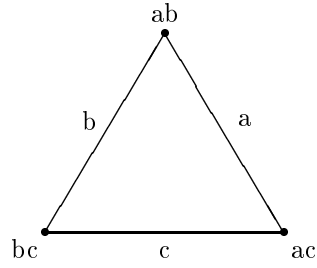


2) El grafo  $C$  de cuatro colores  $a, b, c, d$  se obtiene adicionándole los bucles al siguiente grafo (Octaedro):

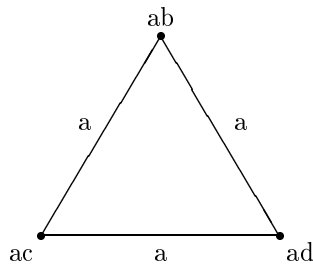


En la figura se puede observar que los cliques del octaedro tienen a lo sumo tres vértices. Más aún, existen dos clases de cliques con tres vértices:

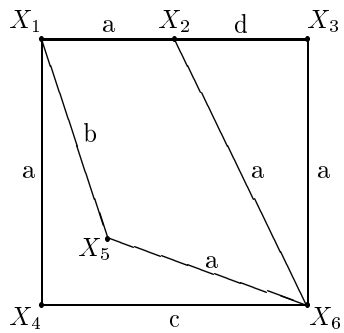
i) Tipo 1 con sólo tres colores, por ejemplo el de vértices  $ab, bc, ac$  y lados incidentes de diferente color:



ii) Tipo 2 , por ejemplo el de vértices  $ab$ ,  $ac$ ,  $ad$  y lados incidentes de un mismo color (a):

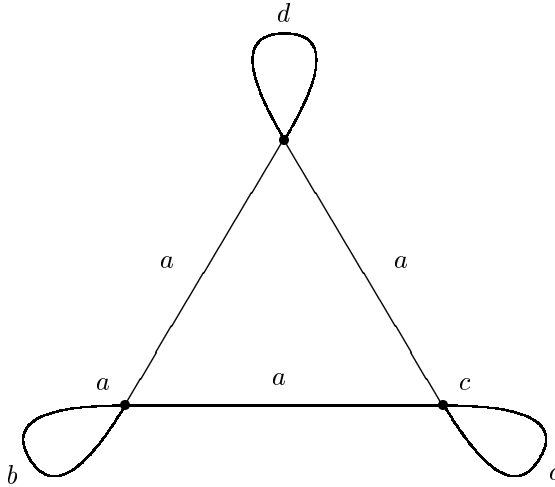


El grafo  $C$  permite considerar la aplicación  $h$  del grafo  $G$  (coloreado) en  $C$  que preserva los colores de los lados,  $h: G \rightarrow C$ , la cual asigna a cada vértice de  $G$  el par de colores que aparece en los lados incidentes. Por lo tanto para  $G$  dado en la siguiente figura:





se obtiene la siguiente imagen en  $C$  con bucles.



De donde, se puede decir que dos vértices  $X_1$  y  $X_5$  van a  $ab \in V(C)$  y al lado incidente (color b) en  $E(G)$  le corresponde un bucle (color b) en  $C$  mediante esta aplicación. Si el grafo  $G$  es completo, entonces su imagen en  $C$  es completo. En efecto, para  $ab \in \text{Im}(h)$ , existe algún vértice  $x \in V(G)$  que tiene lados incidentes de colores a y b, y además es adyacente al resto de los vértices de  $V(G)$ , por lo tanto  $ab$  es adyacente a todo  $y \in \text{Im}(g) \setminus \{ab\}$ , pues  $h$  preserva los colores de los lados. Si hay un bucle se debe a la existencia en  $V(G)$  de dos vértices adyacentes con lados coloreados con el mismo par de colores.

El siguiente teorema acota el número de colores que debe tener una coloración de los lados del grafo completo  $K_{n+k-1}$  sin estrella de suma nula.

**Teorema 5.1** *Sea  $k$  un entero y  $n$  un múltiplo de  $k$ . Una coloración de  $K_{n+k-1}$  con colores en  $Z_k$  sin estrellas  $K_{1,n}$  de suma nula, contiene a lo sumo  $\text{frac}nk + 1$  colores si  $\text{frac}nk \geq 2$  y a lo más tres colores si  $n = k$ .*

Demostración: Por el Teorema 3.5, cada vértice del grafo completo  $K_{n+k-1}$  coloreado tiene lados incidentes etiquetados con sólo dos colores. Determinando el número de vértices de  $K_{n+k-1}$ , que se le asigna a un vértice de  $C$  mediante la aplicación natural  $h: K_{n+k-1} \rightarrow C$  (que preserva los colores) se sigue el teorema.

En los siguientes teoremas se describen las coloraciones de los grafos completos sin estrella de suma cero.

Dado el número de colores con que está coloreado el grafo completo  $K_{n+k-1}$  y los pares de colores (ab, ac, ad, ...) con que están etiquetados los lados de los vértices, se determinan las condiciones sobre la cardinalidad (x, y, z, ...) de los conjuntos de vértices (con lados incidentes etiquetados con el mismo par de colores) y la cantidad de uplas x, y, z, ... que existen (es decir el número de coloraciones que hay), mediante un argumento de paridad sobre los subgrafos generados por los conjuntos de vértices de cada par de colores. Consideremos una coloración de  $K_{n+k-1}$ ,  $f: E(K_{n+k-1}) \rightarrow Z_k$  con  $|\text{Im}(f)| = s + 1$ ,  $n = sk$ . Además, cada vértice tiene lados etiquetados con un par de colores ab, con  $1 \leq b \leq s$ . La coloración produce  $s$  subgrafos disjuntos por vértices sobre los conjuntos de vértices (de un par de colores)  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , con

$$\sum_{1 \leq i \leq s} |V_i| = n + k - 1$$

y cada subgrafo tiene vértices con lados color a y p, donde p es uno de los  $s$  colores; más aún, los lados incidentes entre vértices de  $V_t$  y  $V_r$ , con  $1 \leq t, r \leq s$ , tienen el color común a.

El siguiente teorema está relacionado con el número de  $s$ -uplas de cardinalidad  $|V_i|$ ,  $1 \leq i \leq s$ , que se pueden formar para que la coloración posea las características anteriores.

**Teorema 5.2** Sean  $k$  impar,  $n$  múltiplo de  $k$  y  $f: E(K_{n+k-1}) \rightarrow Z_k$  una coloración sin estrella de suma cero, tal que  $|\text{Im}(f)| = s + 1$  y  $V_i$  conjunto de vértices con lados etiquetados con el par de colores ap con  $1 \leq p \leq s$ . Entonces existen

$$\binom{n - sk + k + s - 2}{s - 1}$$

valores convenientes para las  $s$ -uplas de cardinalidad  $|V_i| \geq k$  con  $1 \leq i \leq s$ .

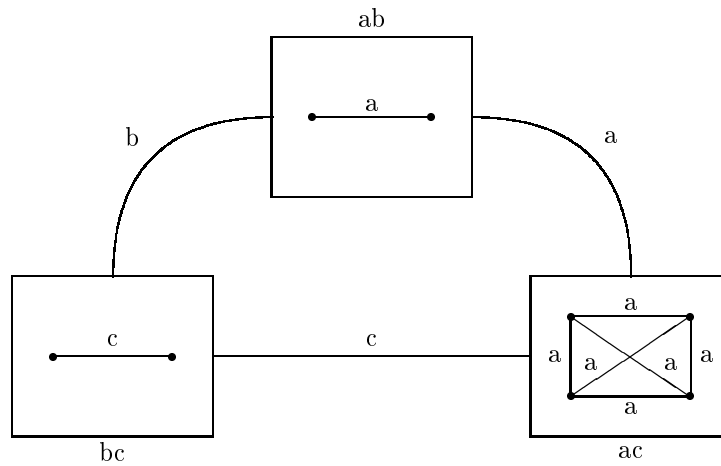
Demostración: se aplica el Teorema 3.5.

En el siguiente teorema los lados incidentes a los vértices del grafo completo  $K_{n+k-1}$  están coloreados con los pares de colores ab, bc y ca.

**Teorema 5.3** Sean  $k$  impar,  $n = sk$  y  $f: E(K_{n+k-1}) \rightarrow Z_k$  una coloración sin estrella  $K_{1,n}$  de suma nula, con  $|\text{Im}(f)| = 3$ . Sean  $x, y, z$  las cardinalidades de los conjuntos de vértices con lados etiquetados con los pares ab, bc, ca respectivamente; entonces el número de tripletas  $xyz$  que satisfacen  $x \geq 3k - 1 - (y \bmod k) - (z \bmod k)$  es  $n^2/2 + O(s)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

Demostración: Por el Teorema 3.5 se calcula una estimación de  $x, y, z$  y el argumento de paridad sobre los subgrafos generados por los conjuntos de vértices con lados  $ab, bc, ca$  determina el número de tripletas convenientes. Es importante destacar que cada tripleta  $xyz$  identifica una coloración de  $K_{n+k-1}$  sin estrellas  $K_{1,n}$  de suma nula.

**Ejemplo 5.4** Sean  $k = 3, s = 2, n = sk = 6$ ; así  $K_{n+k-1} = K_8$ . Sea  $t$  el número de colores de la coloración  $f: E(K_8) \rightarrow Z_3$  sin estrella de suma cero. Entonces por el Teorema 5.1,  $t \leq 3$  con  $n/k = 2$ . Supongamos que  $t = 3$ ; por el Teorema 5.3 se puede considerar la tripleta  $xyz$  que satisface la expresión  $x \geq 3k - 1 - (y \bmod k) - (z \bmod k)$ , con  $x = 2, y = 3, z = 3$ . Además por el Teorema 3.5 un vértice con lados etiquetados con  $ab(bc)(ca)$  tiene 5 lados color  $a$  y 2 lados color  $b$  (con 2 y 5), (con 2, 5). La siguiente figura representa una coloración de  $K_8$  sin estrellas  $K_{1,6}$  de suma nula.



## 6 Número Ramsey baricéntrico

La necesidad de la condición  $|E(H)| \equiv 0 \pmod n$  para la existencia de  $R(H, Z_n)$  es clara; coloreando los lados de cualquier grafo completo con 1, no es posible hallar copias del grafo dado  $H$  tales que la suma de los colores asignados a sus lados sea nula. Recientemente, Y. Hamidoune demostró la siguiente generalización del Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv:

**Teorema 6.1** Sea  $A$  un conjunto con cardinalidad  $n+k-1$ . Sean  $f: A \rightarrow Z_n$  una sucesión en  $Z_n$  y  $\{w_i: 1 \leq i \leq n\}$  una familia de números naturales tal

que para todo  $i$ ,  $\text{mcd}(w_i, n) = 1$ . Entonces existen  $k$  elementos distintos  $a_1, a_2, \dots, a_k$  en  $A$  tales que:

$$\sum_{i=1}^k w_i f(a_i) = \left( \sum_{i=1}^k w_i \right) f(a_k) \quad .$$

Cuando  $k = n$  y  $w_i = 1$ , con  $1 \leq i \leq n$ , se obtiene el Teorema de Erdős-Ginzburg-Ziv [5].

El Teorema de Hamidoune sugiere la definición de un concepto similar al de número Ramsey de suma nula, trabajando con grafos  $H$  y enteros  $n$  arbitrarios (sin exigir la condición  $|E(H)| \equiv 0 \pmod{n}$ ), tomando, además, algún conjunto particular de pesos y reemplazando la condición de suma nula por la condición baricéntrica en el Teorema 6.1.

**Definición 6.2** Sea  $n \geq 2$  un entero. Sean  $G$  un grupo abeliano de orden  $|G| = n$  y  $H$  un grafo con  $|E(H)| = k$ . El número Ramsey baricéntrico del par  $(H, G)$ , denotado por  $BR(H, G)$ , es el mínimo entero  $r$  tal que para cada coloración  $f$  de los lados de  $K_r$  con elementos de  $G$ , existe una copia de  $H$ , digamos  $H_0$ , y un lado  $e_0 \in E(H_0)$ , tales que la siguiente igualdad se cumple:

$$\sum_{e \in E(H_0)} f(e) = kf(e_0)$$

Los siguientes resultados se obtienen de forma inmediata a partir de la definición :

**Teorema 6.3**

- a)  $BR(H, G)$  siempre existe. De hecho, si  $R(H, n)$  es el usual número Ramsey para  $n$  colores ([9], [5]), se cumple  $BR(H, G) \leq R(H, n)$ .
- b) Si  $G = Z_n$  y  $n$  divide a  $E(H)$ , entonces  $BR(H, G) = R(H, Z_n)$ .

Seguidamente calcularemos, o al menos acotaremos, algunos de estos números baricéntricos.

Cuando  $G$  es el grupo cíclico de orden 2, el número Ramsey baricéntrico queda completamente determinado para cualquier grafo  $H$ , como lo muestra el siguiente teorema:

**Teorema 6.4** *Si  $H$  tiene un número impar de lados, entonces  $BR(H, Z_2) = |V(H)|$ . Si  $H$  tiene un número par de lados, entonces  $BR(H, Z_2) = R(H, Z_2)$ .*

Por lo tanto los resultados en [2] y [11] pueden aplicarse:

$R(H, Z_2) = |V(H)|$  a menos que:

- $H$  sea completo ( y entonces  $R(H, Z_2) = |V(H)| + 2$ ).
- $H$  sea la unión disjunta de dos cliques.
- $H$  no sea completo y todos los vértices tengan grado impar.

En los dos últimos casos  $R(H, Z_2) = |V(H)| + 1$ .

A continuación veremos algunos resultados con  $G = Z_3$ . Los primeros resultados obtenidos en este caso se refieren a la estrella  $K_{1,k}$ .

**Teorema 6.5** *Si  $k$  no es múltiplo de 3,  $BR(K_{1,k}, Z_3)$  es  $k + 2$  y  $k + 3$  en caso contrario. Por otra parte,  $BR(K_{1,1}, Z_3) = 2$  y  $BR(K_{1,2}, Z_3) = 5$ .*

Demostración: Cuando  $k$  es múltiplo de 3, podemos usar los resultados sobre estrellas de suma nula [9] y combinarlos con la propiedad (b) en el Teorema 6.3. Supongamos que  $k$  no es múltiplo de 3. El caso  $k = 1$  es trivial. Se mostrará que  $K_{k+2}$ , para cualquier coloración con elementos de  $Z_3$ , contiene alguna estrella  $K_{1,k}$  con la propiedad baricéntrica. Si en algún vértice los lados incidentes en él están coloreados con tres colores, con al menos dos de estos lados con el mismo color, entonces existirá una estrella  $K_{1,k}$  centrada en ese vértice cuyos lados estarán coloreados con los tres colores y, por lo tanto, tendrá la propiedad baricéntrica.

Si todos los lados incidentes en algún vértice de  $K_{k+2}$  están coloreados con el mismo color, toda estrella centrada en este vértice tendrá la propiedad baricéntrica.

Finalmente, si los lados incidentes en un vértice están coloreados con exactamente dos colores, digamos a y b, apareciendo cada uno  $r$  y  $s = k + 1 - r$  veces respectivamente, uno de los baricentros

$$\frac{ra + (s - 1)b}{k} \quad \text{y} \quad \frac{(r - 1)a + sb}{k}$$

recaerá al menos en a o b.

De hecho se ha mostrado que si  $k \geq 4$ , cada vértice en  $K_{k+2}$  es el centro de alguna estrella  $K_{1,k}$  con la propiedad baricéntrica. Consecuentemente  $BR(K_{1,k}, Z_3) \leq k + 2$ . Se verá en lo que sigue que  $BR(K_{1,k}, Z_3) \geq k + 2$ .

Cuando  $k \equiv 1 \pmod{3}$  y  $k \geq 2$ , puede construirse un subgrafo regular de grado 2 en  $K_{k+1}$  con sus lados coloreados con 1 y los restantes lados del grafo completo coloreados con 0. Similarmente si  $k \equiv 2 \pmod{3}$  y  $k > 4$ , puede construirse un subgrafo regular de grado 4 cuyos lados estén coloreados con 1 y los restantes lados con 0. Entonces el baricentro es 2, el cual no se encuentra entre los colores asignados a los lados del grafo completo. Por lo tanto  $BR(K_{1,k}, Z_3) > k + 1$ . Por otra parte si  $k = 2$ , coloreamos los lados de  $K_4$  con tres colores, cada uno de ellos asignado a lados “opuestos”. Con esta coloración es imposible encontrar copias de  $K_{1,2}$  baricéntricas, lo que muestra que  $BR(K_{1,2}, Z_3) > 4$ . En  $K_5$  se comprueba fácilmente que cada vértice es el centro de una estrella  $K_{1,2}$  monocromática, con lo cual puede concluirse que  $BR(K_{1,2}, Z_3) = 5$ .

**Teorema 6.6**  $BR(K_{1,2}, G)$  es  $|G| + 2$  si  $|G|$  es impar y  $|G| + 1$  si  $|G|$  es par.

Demostración: Para probar la igualdad  $BR(K_{1,2}, G) = t$ , debe mostrarse que cualquier coloración de los lados del grafo completo  $K_t$  da dos lados adyacentes con el mismo color, y que alguna coloración de  $K_{t-1}$  impide esta configuración. Si el orden de  $G$  es impar, puede descomponerse  $K_{|G|+1}$  en  $|G|$  matchings perfectos (ver [13], Teorema 9.1, pág. 85), y colorearse cada matching con un color diferente. Por otro lado, en cada vértice de  $K_{|G|+2}$  algunos de los  $|G| + 1$  lados incidentes en el vértice comparten el mismo color. Si el orden de  $G$  es par, puede descomponerse  $K_{|G|}$  en  $|G| - 1$  matchings perfectos y colorearse cada matching con un color diferente, para de esta forma evitar la formación de estrellas  $K_{1,2}$  baricéntricas. Por otra parte, no es posible que cada color quede asignado a un solo lado en cada uno de los vértices del grafo completo  $K_{|G|+1}$  de orden impar. Por tanto, algún color aparece dos veces en algún vértice.

## Referencias

- [1] Alon, N., Caro, Y. *On Three Zero-Sum Ramsey type problems*, J. of Graph Theory **17** (1993), 177–192.
- [2] Bailey, C., Richter, R. B. *Sum zero (mod n), size n subsets of integers*, Amer. Math. Monthly **96** (1989), 240–242.
- [3] Bialostocki, A., Dierker, P. *On the Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem and Ramsey Number for stars and matchings* Discrete Math. **110** (1992), 1–8.

- [4] Cammaroto, A., Delorme, C., Ordaz, O. *Stars with null sum in graphs* Internal Report 985, LRI, URA 410, CNRS, UPS, Orsay, 1995.
- [5] Caro, Y. *On Zero-Sum Problems, a survey*, Preprint, 1991.
- [6] Caro, Y. *On Zero-Sum Ramsey Numbers-Stars*, Discrete Math. **104** (1992), 1–6.
- [7] Delorme, C., Duran, M., Ordaz, O. *The Zero-Sum Stars Problems*, Internal Report 965, LRI, URA 410, CNRS, UPS, Orsay, 1995.
- [8] C. Delorme, Fernández De La Vega, W., González, S., Ordaz, O. *Baricentric Ramsey Number*, Internal Report 989, LRI, URA 410, CNRS, UPS, Orsay, 1995.
- [9] Erdős, P., Ginzburg, A., Ziv, A. *Theorems in Additive Number Theory*, Bull. Res. Council Israel **10** (1961).
- [10] Flores, C., Ordaz, O. *On the Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem*, to appear in Discrete Math.
- [11] Flores, C., Ordaz, O. *On Zero-Sum Sequences in Abelian Groups*, Homenaje al Dr. Rodolfo Ricabarra, Instituto de Matemática (Conicet-UNS), Bahía Blanca, 1995.
- [12] Hamidoune, Y. *On Weighted Sequence Sums*, Preprint, 1994.
- [13] Harary, F. *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1972.
- [14] Mann, H. B. *Two Addition Theorems*, Journal of Combinatorial Theory **3** (1967), 233–235.