Divulgaciones Matemáticas v. 5, No. 1/2 (1997), 3–10

Generadores de Algebras Universales Libres

Generators of Free Universal Algebras

Hernando Gaitán *
Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Universidad de Los Andes. Mérida. Venezuela.
(e-mail: gaitan@@ciens.ula.ve)

Resumen

En esta nota se da una forma general de hallar el álgebra libre sobre un conjunto finito en una variedad de álgebras universales generada por un número finito de sus miembros finitos.
Palabras y frases clave: variedad, retículo, algebra subdirectamente irreducible, teoría de la dualidad.

Abstract

In this note a general method is given for finding the free algebra over a finite set in a variety of universal algebras generated by a finite number of their finite members.
Key words and phrases: variety, lattice, subdirectly irreducible algebra, duality theory.

1 Introducción

El Teorema de representación subdirecta de Birkhoff nos dice que cada variedad $\mathcal{A}$ coincide con $\mathbb{ISP}(\mathcal{A}_{si})$ donde $\mathcal{A}_{si}$ es la clase de elementos subdirectamente irreducibles de $\mathcal{A}$ e $\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbb{P}$ son los operadores "formación de isomorfismos, subálgebras y productos directos" respectivamente. En otras palabras, cada álgebra de la variedad $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra de un producto

*Este trabajo fue financiado por el CDCHT de la ULA.

directo de elementos de $\mathcal{A}_{si}$. En este trabajo consideraremos variedades $\mathcal{A}$ para las cuales $\mathcal{A}_{si}$ es un conjunto finito de álgebras finitas, digamos

$$\mathcal{A}_{si} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}.$$

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n variables. Una de las consecuencias de la teoría de la dualidad de Werner-Davey-Priestley es el hecho de que el álgebra libre $F_{\mathcal{A}}(X)$ sobre $\mathcal{A}$ con n generadores es isomorfa al conjunto de todas las funciones f de la unión disjunta de las potencias P_i^n en la unión disjunta de los P_i tales que $f(P_i^n) \subseteq P_i$ y que preservan un conjunto R de "relaciones algebraicas", relaciones éstas que determinan una dualidad para $\mathcal{A}$. A manera de ejemplo, para la variedad $\mathcal{B}$ de las álgebras Booleanas, $R = \emptyset$. Para la variedad $\mathcal{D}$ de los retículos distributivos, $R = \{\leq\}$. En el caso en que $k = 1$, ya Birkhoff en 1930 había notado que $F_{\mathcal{A}}(X)$ es una subálgebra de P^{P^n}, donde $\mathcal{A}_{si} = \{P\}$ (ver [5] y para el caso particular $k = 1$, [3]). Para la terminología y los conceptos básicos de álgebra universal ver [1]. En esta nota presentamos n funciones de las mencionadas arriba que sirven como generadores del álgebra libre $F_{\mathcal{A}}(X)$, con total desconocimiento de conjunto alguno R de relaciones que determinen una dualidad para $\mathcal{A}$. Más aún, estas funciones podrían ser útiles en la búsqueda de un conjunto apropiado R de relaciones que arrojen una dualidad para una variedad con un número finito de álgebras subdirectamente irreducibles.

2 Funciones Generadoras

Sea $*$ un símbolo para una operación de m argumentos del tipo de las álgebras de $\mathcal{A}$. En el conjunto

$$P = \left\{ f : \dot{\bigcup_{1\leq i\leq k}} P_i^n \to \dot{\bigcup_{1\leq i\leq k}} P_i \;\mid\; f(P_i^n) \subseteq P_i \quad 1 \leq i \leq k \right\}$$

interpretamos $*$ de la siguiente forma: si $f_1, \ldots f_n$ son elementos de P, entonces dado $\overrightarrow{a} \in \dot{\bigcup}_{1\leq i\leq k} P_i^n$ hay un único i_0, $1 \leq i_0 \leq k$, tal que $\overrightarrow{a} \in P_{i_0}^n$ y $*^P(f_1, \ldots, f_m)(\overrightarrow{a}) = *^{P_{i_0}}(f_1(\overrightarrow{a}), \ldots, f_m(\overrightarrow{a}))$.

Afirmamos que la subálgebra de P generada por las proyecciones

$$\pi_j : \dot{\bigcup_{1\leq i\leq k}} P_i^n \longrightarrow \dot{\bigcup_{1\leq i\leq h}} P_i, \quad \pi_j(\overrightarrow{a}) = a_j$$

donde $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, es isomorfa a $F_{\mathcal{A}}(X)$. Para ver esto es suficiente verificar que el homomorfismo

$$\varphi : F_{\mathcal{A}}(X) \longrightarrow P$$

dado por

$$\varphi(\overline{x}_i)(\overrightarrow{a}) = a_i,$$

es inyectivo. En efecto, sean $\overline{s}$, $\overline{t} \in F_{\mathcal{A}}(X)$. Aquí, s y t son términos del tipo de las álgebras de $\mathcal{A}$ sobre X. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(\overline{t}) &= \varphi(\overline{s}) \Rightarrow t(\varphi(\overline{x}_1), \ldots, \varphi(\overline{x}_n)) = s(\varphi(\overline{x}_1), \ldots, \varphi(\overline{x}_n)) \\
&\Rightarrow t(\varphi(\overline{x}_1), \ldots, \varphi(\overline{x}_n))(\overrightarrow{a}) = s(\varphi(\overline{x}_1), \ldots, \varphi(\overline{x}_n))(\overrightarrow{a}) \quad \forall \overrightarrow{a} \in \dot{\bigcup_{1 \le i \le k}} P_i^n \\
&\Rightarrow t(\overrightarrow{a}) = s(\overrightarrow{a}) \quad \forall a \in P_i^n \quad \forall i \quad 1 \le i \le k \\
&\Rightarrow \mathcal{A} \models t(x_1, \ldots, x_n) \approx s(x_1, \ldots, x_n) \\
&\Rightarrow \overline{t} = \overline{s} \quad \text{en} \quad F_{\mathcal{A}}(X).
\end{aligned}$$

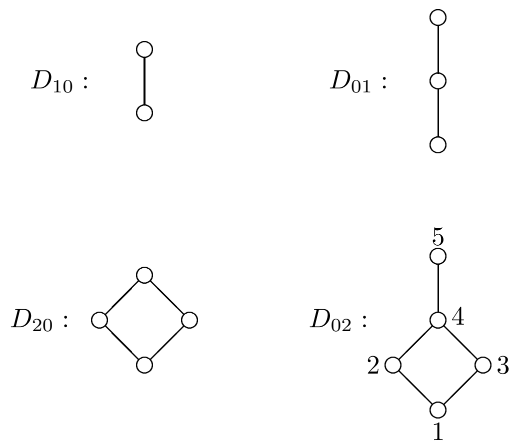
Muchas variedades de álgebras universales son de la forma $\mathbb{HSP}(A)$ donde $\mathbb{H}$ es el operador "formación de imágenes homomórficas" y A es un álgebra finita tal que todos los elementos subdirectamente irreducibles de la variedad pertenecen a $\mathbb{HS}(A)$, es decir son imágenes homomórficas de subálgebras de A. (Debido al Lema de Jónsson este es el caso si se trata de álgebras que tienen como reducto un retículo distributivo, o más general, si la variedad es distributiva para congruencias. Ver [5] p. 149). En este caso, una ligera modificación del argumento previo nos lleva a concluir que

$$\pi_j : A^n \to A \quad , \quad \pi_j(\overrightarrow{a}) = a_j, \qquad 1 \le j \le n$$

generan el álgebra libre. Si A mismo es subdirectamente irreducible, el tamaño de las listas a manipular se simplifica significativamente como se verá en el ejemplo siguiente.

3 Un ejemplo

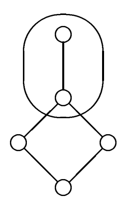
Consideremos la variedad $\mathcal{D}_{02}$ de Q-retículos (ver [2]). El tipo de los Q-retículos es $\{\vee, \wedge, 0, 1, \triangledown\}$; $\vee$ y $\wedge$ (unión e intersección respectivamente) son símbolos para operaciones en 2 argumentos; 0 y 1 (mínimo y máximo) son símbolos para operaciones sin argumentos y $\triangledown$ (cuantificador) es símbolo para una operación en un sólo argumento. Los Q-retículos tienen como reducto un retículo distributivo con máximo y mínimo de tipo $\{\vee, \wedge, 0, 1\}$. Los elementos subdirectamente irreducibles de $\mathcal{D}_{02}$ son



con $\triangledown$ definido por la prescripción

$$\triangledown(a) = \begin{cases} \text{el mínimo del retículo si } \ a \text{ es el mínimo,} \\ \text{el máximo del retículo en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

$\mathcal{D}_{02} = \mathbb{ISP}(\{D_{02}, D_{20}\})$ pues D_{10} y D_{02} son isomorfos a subálgebras de D_{02}. Más aún, $\mathcal{D}_{02} = \mathbb{HSP}(D_{02})$ (D_{10}, D_{01} son subálgebras de D_{02} y D_{20} es una imagen homomórfica de D_{02}).



En [5] se determina que un conjunto de 11 relaciones (8 subálgebras maximales de D_{02}^2 y 3 endomorfismos de D_{02}) determinan una dualidad para $\mathcal{D}_{02}$. El cálculo de $F_{\mathcal{D}_{02}}(2)$ por el método de verificar si una función $f : D_{02}^2 \to D_{02}$ dada satisface o no cada una de estas once relaciones luce bastante dispendioso a mano y para nosotros, neófitos en computación, aún con un computador. Para tener una idea de la magnitud de los cálculos, precisamos aquí, qué significa que una función $f : D_{02}^2 \to D_{02}$ preserve una relación M (para el caso que nos ocupa, subálgebra de D_{02}^2). Primero que todo, ¿cuál es la interpretación de M en D_{02}^2? La natural:

$$((a,b),(c,d)) \in M \Leftrightarrow (a,c) \in M \quad \text{y} \quad (b,d) \in M.$$

En otras palabras, M se extiende puntualmente a cualquier potencia de D_{02}. Ahora, que f preserve M significa que

$$((a,b),(c,d)) \in M \Rightarrow (f(a,b), f(c,d)) \in M.$$

Sin embargo, es fácil implementar el cálculo de estas funciones usando las funciones generadoras

$$\begin{aligned} x_1 &= [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5] \\ x_2 &= [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5] \end{aligned}$$

Aquí por supuesto, se identifica la función con el conjunto de las preimágenes de los elementos de su dominio, en un orden arbitrario pero predeterminado. Aprovechamos aquí para señalar que nuestro cálculo del álgebra libre $F_{\mathcal{D}_{01}}(2)$ sobre la variedad generada por D_{01}, difiere del dado en [5]. Nosotros obtenemos que el cardinal de esta álgebra es 20. A continuación presentamos la entrada y salida de un programa en el lenguaje MAPLE que nos da la lista de los elementos de $F_{\mathcal{D}_{02}}(2)$.

```
>mt:=proc(i,j) if {i,j}={2,3} then 1 else min(i,j) fi end:

>mts:=(z,w)->[seq(mt(z[i],w[i]),i=1..25)]:

>jt:=proc(i,j) if {i,j}={2,3} then 4 else max(i,j) fi end:

>jts:=(z,w)->[seq(jt(z[i],w[i]),i=1..25)]:

>nb:=proc(i) if i=1 then 1 else 5 fi end:

>nbs:=z->[seq(nb(z[i]),i=1..25)]:

>x1:=[1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5]:
```

```
>x2:=[1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5]:

>c0:=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]:

>c1:=[5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5]:

>F:=proc(S) local x,y,T;
>T:=S;
>for x in S do
>   for y in S do
>      T:=T union {mts(x,y)};
>      T:=T union {jts(x,y)};
>   od;
>od;
>T;
>end:

>G:=proc(S) local x, T;
>T:=S;
> for x in S do
>  T:=T union {nbs(x)}:
> od;
>T;
>end:

>S:={x1,x2,c0,c1}:

>flag:=1:

>while flag<>0 do
>    N:=nops(S):
>      S:=F(S):
>      S:=G(S):
>    flag:=nops(S)-N:
>od:
>for x in S do print(x) od;
```

[1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5]
[1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5]
[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]
[5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,2,3,4,5,2,2,4,4,5,3,4,3,4,5,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,1,2,2,1,1,3,3,3,1,2,3,4,4,1,2,3,4,5]
[1,2,3,4,5,2,5,5,5,5,3,5,5,5,5,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,2,2,4,4,5,3,4,3,4,5,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5]
[1,2,3,4,5,1,2,4,4,5,1,4,3,4,5,1,4,4,4,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,4,4,5,1,4,3,4,5,1,4,4,4,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,1,4,5,1,1,3,4,5,1,4,4,4,5,1,5,5,5,5]
[1,2,3,4,5,2,5,4,5,5,3,4,5,5,5,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,5,1,5,5,1,1,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,5,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,1,2,2,1,1,3,3,3,1,4,4,4,4,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,2,5,4,5,5,3,4,5,5,5,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,4,4,4,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,1,3,3,3,3,1,4,4,4,4,1,5,5,5,5]
[1,5,5,5,5,2,5,5,5,5,3,5,5,5,5,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,2,5,2,5,5,3,3,5,5,5,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,2,4,5,1,3,3,4,5,1,4,4,4,5,1,5,5,5,5]
[1,2,3,4,5,1,5,4,5,5,1,4,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5]
[1,2,3,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,2,1,4,5,1,1,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5]
[1,2,3,4,5,1,5,3,5,5,1,2,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,5,4,5,5,1,4,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,5,3,5,5,1,2,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,1,5,2,5,5,1,3,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,2,2,2,4,5,3,3,3,4,5,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5]
[1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,4,4,4,5,1,5,5,5,5]
[1,1,1,1,1,2,5,5,5,5,3,5,5,5,5,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5]
[1,2,3,4,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5,1,5,5,5,5]

Las listas a manipular, si se usa $D_{02} \dot{\cup} D_{20}$, tienen $4^2 + 5^2 = 41$ entradas y por supuesto el resultado es el mismo.

Referencias

[1] Burris, S., Sankappanavar, H. P., *A course in Universal Algebra*, Springer-Verlag.

[2] Cignoli, R., *Quantifiers on distributive lattices*, Discrete Mathematics **96**(1991), 183–197.

[3] Davey, B. A. , Priestley, H. A., *Partition-induced natural dualities for varieties of pseudocomplemented distributive lattices*, Discrete Mathematics **113** (1993), 41–58.

[4] Davey, B. A., Priestley, H. A., *Optimal natural dualities*, Transactions of the AMS, Vol **338**, Number 2, August 1993, 655–677.

[5] Priestley, H. A., *Natural dualities for varieties of distributive lattices with a quantifier*, Algebraic methods in logic and computer sciences, Banach Center Publication, Vol. **28**(1993), 291–310.