

## Problemas Sobre Estrellas en Grafos Completos

*Problems on Stars in Complete Graphs*

Agatina Cammaroto (acammaro@usb.ve)  
Luisa Cordero (lcordero@usb.ve)  
Mirelli Duran (mduran@usb.ve)  
Samuel González (sgalois@cantv.net)

Universidad Simón Bolívar  
Decanato de Investigación y Desarrollo  
Apartado Postal 80659  
Caracas. Venezuela

### Resumen

Los resultados de este trabajo son los siguientes: 1) Se determina que el mínimo orden de un grafo completo orientado simétricamente que garantiza la existencia de  $t$  estrellas dirigidas  $K_{1,n}$  disjuntas por lados, de suma cero, es aproximadamente  $\sqrt{nt}$ . Para torneos este número es aproximadamente  $\sqrt{2nt}$ . 2) Se logran las siguientes estimaciones para el número de Ramsey baricéntrico asociado a las estrellas  $K_{1,5t+2}$  y  $K_{1,3}$  y al grupo cíclico  $Z_p$ : a) Si  $p$  es un número primo,  $p \geq 5$ , entonces  $BR(K_{1,3}, Z_p) \leq 2 \lceil p/3 \rceil + 2$ , b) Si  $t \geq 2$  es un entero, entonces  $BR(K_{1,5t+2}, Z_5) \leq 5(t+1)$ . 3) Se demuestra que si  $p$  es un número primo impar y  $t > 2$  es un entero, entonces  $BR(K_{1,tp+1}, Z_5) = (t+1)p$ . 4) Se determinan coloraciones de los grafos completos  $K_{n+k-3}$  con  $k$  primo y  $n = k - 1$ ,  $K_{n+1}$  con  $n \equiv 1 \pmod{3}$  y  $K_{n+1}$  con  $n < p$  ( $p$  primo) sin estrellas  $K_{1,n}$  baricéntricas. 5) Se describen las estructuras del grafo completo  $K_{3k-1}$  sin estrellas  $K_{1,n}$  de suma cero, con  $n = 2k$ , y se calculan los diferentes tipos de particiones del conjunto de vértices inducidas por coloraciones con 3 colores: a) Existen  $k$  formas de particionar el conjunto  $V(K_{3k-1})$  en subconjuntos  $X, Y$ . b) Existen  $9(k^2-1)/8$  formas de particionar el conjunto  $V(K_{3k-1})$  en subconjuntos  $X, Y, Z$ .

**Palabras y frases claves:** número de Ramsey, número de Ramsey baricéntrico, grafo completo orientado, estrellas de suma cero.

### Abstract

The results of this paper are the following: 1) It is determined that the minimum order of a complete symmetrically oriented graph which guarantees the existence of  $t$  oriented stars  $K_{1,n}$  disjoint by sides, with zero sum, is approximately  $\sqrt{nt}$ . For tournaments this number is approximately  $\sqrt{2nt}$ . 2) The following estimates are found for the barycentric Ramsey numbers associated with the stars  $K_{1,5t+2}$  and  $K_{1,3}$  and the cyclic group  $Z_p$ : a) If  $p$  is a prime number,  $p \geq 5$ , then  $BR(K_{1,3}, Z_p) \leq 2\lceil p/3 \rceil + 2$ , b) If  $t \geq 2$  is an integer, then  $BR(K_{1,5t+2}, Z_5) \leq 5(t+1)$ . 3) It is proved that if  $p$  is a prime number and  $t \geq 2$  is an integer, then  $BR(K_{1,tp+1}, Z_5) = (t+1)p$ . 4) Colorations are found for the complete graph  $K_{n+k-3}$  with  $k$  a prime number and  $n = k - 1$ ,  $K_{n+1}$  with  $n \equiv \pmod{3}$  and  $K_{n+1}$  with  $n < p$  ( $p$  prime) without barycentric stars  $K_{1,n}$ . 5) The structures of a complete graph  $K_{3k-1}$  without stars  $K_{1,n}$  of zero sum with  $n = 2k$  are described and the number of types of induced partitions of the set of vertices in subsets  $X, Y$  or  $X, Y, Z$  is calculated: a) there are  $k$  forms of partitioning the set  $V(K_{3k-1})$  in subsets  $X, Y$ . b) there are  $9(k^2 - 1)/8$  forms of partitioning the set  $V(K_{3k-1})$  in subsets  $X, Y, Z$ .

**Key words and phrases:** Ramsey number, barycentric Ramsey number, complete oriented graph, zero-sum stars.

## 1 Introducción

Erdős, Ginzburg y Ziv [7] demostraron que en un grupo abeliano de orden  $n$ , toda sucesión con longitud  $2n - 1$  contiene una subsucesión de longitud  $n$  y de suma cero. Este resultado motivó en el campo de la teoría Aditiva y Combinatoria el desarrollo de diversas áreas de investigación entre las cuales tenemos el cálculo de los números de Ramsey de suma cero.

Actualmente existen varias demostraciones de este teorema, entre ellas podemos mencionar las de Mann [11], la de Bailey y Richter [1], y más recientemente la de Hamidoune [10].

Caro [5] y Bialostocki-Dierker [2] demostraron que el mínimo orden de un grafo completo (de lados coloreados con elementos de  $Z_k$ ) para que este contenga una estrella  $K_{1,n}$  de suma cero es  $n + k - 1$  si  $n \equiv k \equiv 0 \pmod{2}$  y  $n + k$  en los casos restantes.

Los números de Ramsey baricéntricos, para grafos  $H$  y grupos abelianos finitos  $G$ , fueron introducidos por Delorme, Fernández de La Vega y Ordaz en el año 1995. Este concepto generaliza el de números de Ramsey de suma cero.

En este trabajo se dan resultados acerca de la existencia o no de estrellas de suma cero o baricéntricas en grafos completos. En las secciones 4.2 y 4.3 se estiman los números de Ramsey de suma cero y baricéntrico de estrellas dirigidas y estrellas, respectivamente, y en las secciones 4.1 y 4.4 se dan resultados que caracterizan las coloraciones de un grafo completo de tal forma que no contenga estrellas de suma cero o baricéntricas, respectivamente.

## 2 Terminología y notaciones

A continuación daremos las definiciones básicas utilizadas en el desarrollo de este trabajo.

- 2.1 Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo. Una  $k$ -coloración de  $G$  es una función  $f : E(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ .
- 2.2 Sea  $Z_k$  el grupo cíclico de los enteros módulo  $k$ . Una  $Z_k$ -coloración de los lados de un grafo  $G = (V(G), E(G))$  es una función  $f : E(G) \rightarrow Z_k$ .
- 2.3 Si  $\sum_{e \in E(G)} f(e) = 0$ , diremos que  $G$  es un *grafo de suma cero* con respecto a  $f$ .
- 2.4 Se denomina *grado de un vértice*  $x$ , denotado por  $d(x)$ , al número de lados incidentes en el vértice  $x$ .
- 2.5 El *grafo completo de orden*  $n$ , denotado  $K_n$ , es el grafo dado por  $|V(K_n)| = n$ ,  $E(K_n) = \{(u, v) : u, v \in V(K_n), u \neq v\}$ .
- 2.6 La *estrella de orden*  $n$ ,  $K_{1,n}$ , es el grafo dado por
- $$\begin{aligned} V(K_{1,n}) &= \{u\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \\ E(K_{1,n}) &= \{(u, v_i) : i = 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$
- 2.7 La *estrella*  $K_{1,n}$  *dirigida*, es aquella que tiene todos sus lados orientados hacia el centro o partiendo de él.
- 2.8 El *número de Ramsey clásico*  $R(G; 0, 1, 2, \dots, k-1)$  se define como el mínimo entero  $M$  tal que para cualquier  $k$ -coloración  $f : E(K_M) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$  de los lados del grafo completo  $K_M$  existe una copia de  $G$  monocromática en  $K_M$ .

- 2.9 Sea  $G$  un grafo con  $|E(G)|$  múltiplo de  $k$ , El *número de Ramsey de suma cero*  $R(G, Z_k)$  se define como el mínimo entero  $M$  tal que para toda  $Z_k$ -coloración de los lados de  $K_M$  existe una copia de  $G$  en  $K_M$  de suma cero.
- 2.10 Sea  $A$  un conjunto con  $|A| = k$  y  $h$  un entero positivo tal que  $h \leq k$ . Definimos  $h \hat{=} A = \{a_1 + a_2 + \dots + a_h : a_i \in A, i = 1, 2, \dots, h\}$ .
- 2.11 Sean  $n \geq 2$  un número entero,  $G$  un grupo abeliano de orden  $n$  y  $H$  un grafo con  $|E(H)| = k$ . El *número de Ramsey baricéntrico* del par  $(H, G)$ , denotado por  $BR(H, G)$ , es el menor entero  $t$  tal que cada coloración  $f : E(K_t) \rightarrow G$  de los lados de  $K_t$  con elementos de  $G$  induce en  $K_t$  una copia  $H_0$  del grafo  $H$ , con un lado  $e_0 \in E(H_0)$ , tal que se cumple la siguiente igualdad:  $\sum_{e \in E(H_0)} f(e) = kf(e)$ . Se dice que la copia  $H_0$  es *baricéntrica* con respecto a la coloración  $f$ .
- 2.12 Una sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_n$  con  $n \geq 2$  en un grupo abeliano  $G$  se denomina *baricéntrica* si existe  $s \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $na_s = a_1 + a_2 + \dots + a_s + \dots + a_n$ . En este caso se dice que  $a_s$  es el *baricentro* de la sucesión.

La existencia del número de Ramsey de suma cero está garantizada por la existencia del número de Ramsey clásico  $R(G; 0, 1, 2, \dots, k-1)$ . En efecto, supongamos que  $|E(G)|$  es múltiplo de  $k$ . Si se tiene un grafo completo de orden  $R(G; 0, 1, \dots, k-1)$  coloreado con elementos del conjunto  $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , en el grafo completo  $K_{R(G; 0, 1, \dots, k-1)}$  se encuentra una copia de  $G$  monocromática. Al sumar los lados de la copia de  $G$  resulta  $|E(G)| \cdot s$ , donde  $s$  es el color que tiene la copia monocromática de  $G$ . Como  $|E(G)|$  es un múltiplo de  $k$  se obtiene suma cero (mod  $k$ ). Luego  $R(G, Z_k) \leq R(G; 0, 1, 2, \dots, k-1)$  por ser  $R(G, Z_k)$  el mínimo.

Observe que  $|E(G)|$  debe ser múltiplo de  $k$ , ya que de lo contrario la función  $f : E(K_M) \rightarrow Z_k$  idénticamente igual a uno, no permitiría que  $G$  fuese un grafo de suma cero.

### 3 Herramientas

Uno de los primeros resultados dentro de los problemas de suma cero es el Lema siguiente:

**Lema 3.1 ([8]).** *Sea  $G$  un grupo abeliano de orden  $n$ . Sea  $x_1, x_2, \dots, x_n$  una sucesión de elementos de  $G$ . Entonces existe una subsucesión no vacía  $x_{j(1)}, x_{j(2)}, \dots, x_{j(k)}$  con suma cero.*

El siguiente teorema de P. Erdős, A. Ginzburg y A. Ziv motivó el estudio de los problemas de suma cero sobre un grupo  $G$ .

**Teorema 3.2 ([7]).** *Sea  $G$  un grupo abeliano de orden  $n$  y sea  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$  una sucesión de elementos de  $G$ . Entonces existe un conjunto  $I \subset \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ , con  $|I| = n$ , tal que  $\sum_{i \in I} a_i = 0$ .*

La longitud de la sucesión  $2n-1$  del teorema es la menor posible ya que si se tiene una sucesión de  $(n-1)$  ceros y  $(n-1)$  unos no existe una subsucesión de  $n$  elementos de suma cero.

Caro [5] y Bialostocki-Dierker [2] demostraron el siguiente teorema, denominado “Teorema de Ramsey de suma cero”, que garantiza la existencia de una estrella de suma cero en un grafo completo de  $R(K_{1,n}, Z_k)$  vértices:

**Teorema 3.3 ([5]).** *Sean  $n$  y  $k$  enteros positivos tales que  $n \geq k \geq 2$ . Si  $k$  divide a  $n$  entonces*

$$R(K_{1,n}, Z_k) = \begin{cases} n+k-1 & \text{si } n \equiv k \equiv 0 \pmod{2} \\ n+k & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Este número fue calculado para  $k = n$  por Bialostocki y Dierker [2] y para  $n$  múltiplo de  $k$  por Caro [5]. Una consecuencia del Teorema 3.2 es el siguiente resultado:

**Lema 3.4.** *Sea  $G$  un grafo y  $f : E(G) \rightarrow Z_k$ . Sea  $n$  un entero positivo múltiplo de  $k$ . Si existe un vértice  $x$  de  $G$  con  $d(x) \geq n+k-1$  entonces  $G$  contiene una copia de  $K_{1,n}$  de suma cero.*

En 1992 Caro [5] demuestra que el mínimo entero  $M$  tal que para toda  $Z_k$  coloración de los lados de  $K_M$  y cualquier orientación de sus lados existe al menos una estrella  $K_{1,n}$  dirigida y de suma cero es  $2(n+k-1)$ . Una consecuencia de este resultado es el siguiente lema.

**Lema 3.5 ([5]).** *Sea  $G$  un grafo dirigido,  $n$  múltiplo de  $k$  y  $f : E(G) \rightarrow Z_k$ . Si  $G$  tiene un vértice  $x$  con  $d(x) \geq 2n+2k-3$  entonces  $x$  es el centro de alguna estrella dirigida de suma cero.*

En el siguiente Teorema Caro, Bialostocki-Dierker y Flores-Ordaz caracterizan las sucesiones que no contienen subsucesiones de longitud  $n$  y suma cero.

**Teorema 3.6 ([2], [5], [9]).** *Sean  $n$  y  $k$  enteros ( $n \geq k \geq 2$ ) con  $n$  múltiplo de  $k$ . Sea  $f : A \rightarrow Z_k$ ,  $|A| = n+k-2$  una sucesión. Entonces una y sólo una de las siguientes condiciones es válida:*

a) Existe  $S \subset A$ ,  $|S| = n$ , tal que  $\sum_{x \in S} f(x) = 0$ .

b) Existen  $a$  y  $b \in Z_k$  con  $\langle b - a \rangle = Z_k$  (es decir,  $Z_k$  es generado por  $b - a$ ) y la sucesión  $f$  está formada por  $rk - 1$  elementos iguales a  $a$  y  $(s - r)k + k - 1$  elementos iguales a  $b$ , con  $n = sk$  y  $1 \leq r \leq s$ .

**Teorema 3.7 (Dias da Silva – Hamidoune [6]).** Sea  $p \geq 5$  un número primo y sea  $A \subset Z_p$ , donde  $|A| = k$ . Sea  $2 \leq h \leq k$ . Entonces

$$|h \hat{A}| \geq \min\{p, h(k - h) + 1\}.$$

Se considera  $h \geq 2$  para evitar casos triviales.

## 4 Resultados

### 4.1 Particiones del conjunto de vértices del grafo completo $K_{3k-1}$ sin estrellas $K_{1,2k}$ de suma cero

El número de Ramsey de suma cero de la estrella de  $n$  lados,  $R(K_{1,n}, Z_k)$ , para  $n = k$  y  $n$  múltiplo de  $k$ , fue determinado por Bialostocki-Dierker y Caro. Seguidamente Cammaroto, Duran y González [3] estiman el número de Ramsey de suma cero para  $t$ -estrellas,  $R(tK_{1,n}, Z_k)$ .

En esta sección se determinan: la estructura del grafo completo  $K_{3k-1}$  coloreado con elementos de  $Z_k$ , sin estrellas  $K_{1,2k}$  de suma cero, para  $k$  impar; las características de las cardinalidades  $x, y, z$  de los subconjuntos  $X, Y, Z$  que conforman la partición del conjunto de vértices  $V(K_{3k-1})$  inducida por la coloración y el número de tales particiones.

Los resultados dados en esta sección están basados fundamentalmente en el Teorema 3.6. La siguiente observación es una consecuencia inmediata de este teorema.

**Observación 4.1.1.** En una  $Z_k$ -coloración del grafo completo  $K_{n+k-1}$  sin estrellas  $K_{1,n}$  de suma cero, para  $k$  impar y  $n$  múltiplo de  $k$ , cada vértice en  $V(K_{n+k-1})$  tiene  $rk - 1$  lados incidentes etiquetados con  $a$  y  $(s - r)k + k - 1$  lados incidentes etiquetados con  $b$ , siendo  $a$  y  $b$  elementos de  $Z_k$  tales que  $\langle b - a \rangle = Z_k$ ,  $1 \leq r \leq s$ .

Diremos en este caso que cada vértice del grafo completo  $K_{n+k-1}$  tiene lados incidentes etiquetados con un par de colores. Dados dos vértices de  $K_{n+k-1}$  con lados incidentes etiquetados con los pares de colores  $ab$  y  $cd$  respectivamente, entonces debe existir un color común a ambos pares, ya que

el grafo es completo. Por lo tanto si coloreamos los lados del grafo completo  $K_{n+k-1}$  con tres colores  $a$ ,  $b$  y  $c$ , podemos considerar dos tipos de pares de colores con los que se etiquetan los lados incidentes en un vértice en el grafo completo sin estrellas  $K_{1,n}$  de suma cero:

tipo 1)  $\{ab, bc\}$ , con un color en común, y

tipo 2)  $\{ab, bc, ca\}$ , los cuales no tienen un color en común.

En el siguiente teorema se determina el número máximo de colores con los que se puede colorear los lados del grafo completo  $K_{n+k-1}$ , con  $k$  impar y  $n$  múltiplo de  $k$ , de tal forma que éste no contenga una copia de la estrella  $K_{1,n}$  de suma cero.

**Teorema 4.1.2.** *Sean  $k$  impar y  $n$  múltiplo de  $k$ . Una  $Z_k$ -coloración de  $K_{n+k-1}$  sin estrellas  $K_{1,n}$  de suma cero tiene a lo sumo  $\frac{n}{k} + 1$  colores si  $n \geq 2k$  y a lo más tres colores si  $n = k$ .*

Es inmediato que si coloreamos el grafo completo  $K_{n+k-1}$  con sólo un elemento, éste tendrá en cada vértice una estrella  $K_{1,n}$  de suma cero.

En los siguientes resultados se toma  $n = k$  y se describen las coloraciones del grafo completo  $K_{2k-1}$  sin estrellas  $K_{1,k}$  de suma cero (con  $k$  impar) usando dos o tres colores. Es decir,  $|\text{Im } f|$  es igual a 2 o 3, donde  $f : E(K_{2k-1}) \rightarrow Z_k$  es una coloración de  $K_{2k-1}$ .

Cada vértice  $v$  de  $K_{2k-1}$  tiene grado  $2k - 2$ , entonces de la Observación 4.1.1, el vértice  $v$  tendrá  $k - 1$  lados incidentes etiquetados con  $a_v$  y  $k - 1$  lados incidentes etiquetados con  $b_v$  para  $a_v$  y  $b_v \in Z_k$ .

**Proposición 4.1.3 ([4]).** *Una  $Z_k$ -coloración de  $K_{2k-1}$  sin estrellas  $K_{1,k}$  de suma cero, con  $k$  impar, tal que  $|\text{Im } f| = 2$ , determina dos subgrafos  $(k - 1)$ -regulares monocromáticos.*

En la Proposición 4.1.3 se da la estructura del grafo completo de orden  $2k - 1$  (sin estrellas  $K_{1,k}$  de suma cero) a partir de los subgrafos inducidos por los lados de un mismo color, cada subgrafo con orden  $2k - 1$ .

En el siguiente teorema se describe la estructura del grafo completo  $K_{2k-1}$  determinando la forma de particionar el conjunto de vértices  $V(K_{2k-1})$  en los subconjuntos  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de manera tal que:

1. Los vértices de  $X$  tienen lados incidentes etiquetados con el par de colores  $ab$ .

2. Los vértices de  $Y$  tienen lados incidentes etiquetados con el par de colores  $bc$ .
3. Los vértices de  $Z$  tienen lados incidentes etiquetados con el par de colores  $ca$ .

Cada vértice en el conjunto  $X$  tiene  $k - 1$  lados incidentes etiquetados con  $a$  y  $k - 1$  lados incidentes etiquetados con  $b$ . Los vértices de los conjuntos  $Y$  y  $Z$  tienen igual cantidad de lados incidentes etiquetados con los colores de los pares  $bc$  y  $ca$ , respectivamente. Si  $|X| = x$ ,  $|Y| = y$  y  $|Z| = z$ , entonces  $x + y + z = 2k - 1$ .

El siguiente teorema da el número de formas de particionar el conjunto  $V(K_{2k-1})$  en los subconjuntos  $X, Y, Z$ , es decir el número de posibles ternas  $(x, y, z)$ .

**Teorema 4.1.4 ([4]).** *Sea  $k$  un número impar. Entonces existen  $\frac{3(k^2-1)}{8}$  formas de particionar el conjunto de vértices del grafo completo  $K_{2k-1}$  (sin estrellas  $K_{1,k}$  de suma cero) en subconjuntos  $X, Y, Z$ , de modo que los lados incidentes con los vértices de cada subconjunto est'en etiquetados con los pares de colores  $ab, bc$  y  $ca$  respectivamente.*

En la demostración del teorema 4.2.4 se deduce que las cardinalidades  $x, y, z$  no pueden ser simultáneamente números impares.

En la presente sección se describen las estructuras del grafo completo  $K_{3k-1}$  sin estrellas  $K_{1,n}$  de suma cero, con  $n = 2k$ , y se determina el número de tipos de particiones inducidas de su conjunto de vértices.

De la Observación 4.1.1, cada vértice de  $K_{3k-1}$  tiene lados incidentes etiquetados con dos colores y tales colores aparecen  $k - 1$  y  $2k - 1$  veces, es decir, cada vértice  $v$  tendrá  $k - 1$  lados incidentes etiquetados con  $a_v$  y  $2k - 1$  lados incidentes etiquetados con  $b_v$  para  $a_v$  y  $b_v \in Z_k$ .

En la siguiente proposición se da la estructura del grafo completo de orden  $3k - 1$ , a partir de los subgrafos inducidos por los lados de un mismo color.

**Proposición 4.1.5.** *Sean  $k$  impar y  $f : E(K_{3k-1}) \rightarrow Z_k$  una coloración sin estrellas  $K_{1,2k}$  de suma cero tal que  $|\text{Im } f| = 2$ . Entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:*

1. La coloración genera dos subgrafos monocromáticos regulares de grados  $k - 1$  y  $2k - 1$ .
2. La coloración genera dos subgrafos monocromáticos de grado  $k - 1$  o  $2k - 1$ .



Sea  $X$  el subconjunto de vértices de lados incidentes etiquetados con los colores  $a$  y  $b$ ,  $Y$  el subconjunto de vértices de lados incidentes etiquetados con los colores  $b$  y  $c$ . En el siguiente teorema se da la estructura del grafo completo  $K_{3k-1}$  sin estrellas  $K_{1,2k}$  de suma cero, particionando el conjunto  $V(K_{3k-1})$  en los subconjuntos  $X, Y$ . Además se determina el número de tipos de particiones del conjunto de vértices en los subconjuntos  $X$  e  $Y$ .

**Teorema 4.1.6.** *Sea  $k$  un número impar y consideremos las  $Z_k$ -coloraciones de  $K_{3k-1}$  sin estrellas  $K_{1,2k}$  de suma cero. Entonces existen  $k$  formas de particionar el conjunto de vértices  $V(K_{3k-1})$  en subconjuntos  $X, Y$ , con lados incidentes etiquetados con los pares de colores  $ab$  y  $bc$ , respectivamente.*

*Demostración.* Dado que el grafo completo  $K_{3k-1}$  no contiene estrellas  $K_{1,2k}$  de suma cero, se tienen las desigualdades  $x, y \leq 2k - 1$ . Por lo tanto:

$$x = 3k - 1 - y \geq 3k - 1 - 2k + 1 = k, \quad (1)$$

de donde  $x$  e  $y \geq k$ . Entonces calcular el número de formas de particionar el conjunto  $V(K_{3k-1})$  en subconjuntos  $X, Y$ , es equivalente a calcular el número de soluciones de (2).

$$\begin{cases} x + y = 3k - 1 \\ k \leq x \leq 2k - 1 \\ k \leq y \leq 2k - 1 \end{cases} \quad (2)$$

Llamemos *dupla* a una solución  $(x, y)$  de (2). Cada vértice  $v \in X$  tiene  $y$  lados incidentes de color  $b$  del total de lados etiquetados con el color  $b$ . Análogamente cada vértice  $w \in Y$  tiene  $x$  lados incidentes de color  $b$  del total de lados etiquetados con el color  $b$

Por ser  $y \geq k$  cada uno de los  $x$  vértices tienen  $k - 1$  lados incidentes coloreados con  $a$  y  $2k - 1$  lados incidentes coloreados con  $b$

Como  $y$  lados color  $b$  son incidentes a cada  $v \in X$ , al considerar el subgrafo regular del conjunto de vértices  $X$  inducido por los lados color  $b$  cuyo grado es  $2k - 1 - y = x - k$ , se tienen dos casos:

- Para  $x$  un número par, el subgrafo monocromático de color  $b$  tiene grado impar y orden par.
- Si  $x$  es un número impar, el subgrafo monocromático de color  $b$  tiene grado par y un número impar de vértices.

Entonces el grafo completo  $K_{3k-1}$  tiene un subgrafo monocromático de vértices  $X$ ,  $(x - k)$ -regular y color  $b$  para  $x$  un número par o impar.

Análogamente, dado que  $x \geq k$ , cada uno de los  $y$  vértices tiene  $k-1$  lados incidentes color  $c$  y  $2k-1$  lados incidentes color  $b$ . Además, ya que  $x$  lados color  $b$  son incidentes a todo vértice  $w \in Y$ , se tiene que para  $y$  un número par o impar los lados color  $b$  con extremos en  $Y$  generan un subgrafo regular de grado  $2k-1-x=y-k$  y de orden  $y$ .

Además en  $K_{3k-1}$  hay dos subgrafos monocromáticos  $(k-1)$ -regulares inducidos por los lados de color  $a$  y  $c$  respectivamente, de órdenes  $x = |X|$  e  $y = |Y|$ .

Por lo tanto la estructura de la coloración del grafo completo  $K_{3k-1}$  puede describirse con cuatro subgrafos monocromáticos complementarios: dos de ellos  $(k-1)$ -regulares, uno  $(x-k)$ -regular de orden  $x$  y otro  $(y-k)$ -regular de orden  $y$ .

Por otro lado, ya que  $k \leq x \leq 2k-1$ , se tienen  $2k-1-k+1=k$  valores de  $x$ . Por ser  $y = 3k-1-x$ , existen entonces  $k$  duplas  $(x, y)$ .  $\square$

En el siguiente Teorema se determina el número de formas de particionar el conjunto de vértices del grafo completo  $K_{3k-1}$  sin estrellas  $K_{1,2k}$  de suma cero en tres subconjuntos  $X, Y, Z$ .

**Teorema 4.1.7.** *Sea  $k$  un número impar y consideremos las  $Z_k$ -coloraciones de  $K_{3k-1}$  sin estrellas  $K_{1,2k}$  de suma cero. Entonces existen  $\frac{9(k^2-1)}{8}$  formas de particionar  $V(K_{3k-1})$  en subconjuntos  $X, Y, Z$  con lados incidentes etiquetados con los pares de colores  $ab, bc$  y  $ac$ , respectivamente.*

A lo sumo una de las tres cardinalidades:  $x, y, z$  es mayor o igual que  $k$ , pues de lo contrario sería posible hallar una estrella  $K_{1,2k}$  de suma cero.

La demostración del Teorema 4.1.7 es similar a la del Teorema 4.1.6; determinando en este caso la solución del sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 3k - 1 \\ \text{con } 1 \leq y, z < k; k \leq x \leq 2k - 1 \end{cases}$$

Adicionando las siguientes condiciones:

1. (a)  $x, y, z$  deben ser números pares, o  
(b) Dos de estas cardinalidades son impares.
2. Si  $x$  es un número par y  $x \geq k$ , se tiene  $z$  e  $y$  que no deben ser números impares.

## 4.2 Estrellas dirigidas de suma cero

En 1996 Cammaroto, Duran y González [3] determinaron el mínimo orden de un grafo completo, de lados coloreados con elementos de  $Z_k$ , que garantiza la presencia de  $t$  copias disjuntas por lados de la estrella  $K_{1,n}$ , cada una de suma cero. Además se demuestra un resultado que permite estimar la cantidad de estrellas de suma cero que pueden extraerse de un grafo completo dado, como lo enuncian los siguientes teoremas:

**Teorema 4.2.1 ([3]).** Sean  $M$  y  $k$  enteros positivos,  $n$  un múltiplo de  $k$  tal que  $M \geq n + k$ ,  $f : E(K_M) \rightarrow Z_k$  y  $t$  el número de estrellas  $K_{1,n}$ , disjuntas por lados, de suma cero. Entonces:

$$\left\lceil \frac{M(M - n - k + 1)}{2n} \right\rceil \leq t \leq \left\lfloor \frac{M(M - 1)}{2n} \right\rfloor$$

**Teorema 4.2.2 ([3]).** Sean  $M$  y  $k$  enteros positivos,  $n$  múltiplo de  $k$ ,  $M \geq n + k$ ,  $f : E(K_M) \rightarrow Z_k$ . El mínimo orden  $M$  de un grafo completo que garantice la presencia de  $t$  estrellas  $K_{1,n}$ , disjuntas por lados y de suma cero, es al menos

$$\sqrt{2tn + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

y a lo sumo

$$\sqrt{2tn + \frac{(n + k - 1)^2}{4}} + \frac{(n + k - 1)}{2}.$$

Los dos siguientes teoremas permiten determinar el mínimo orden  $M = R(tK_{1,n}, Z_k)$  de un grafo completo orientado que garantice la presencia de  $t$  estrellas  $K_{1,n}$  dirigidas, disjuntas por lados, de suma cero. Además dan una estimación de la cantidad de copias de  $K_{1,n}$ , dirigidas, de suma cero, que pueden extraerse de un grafo completo  $K_M$  dado.

**Teorema 4.2.3.** Sea el grafo completo  $K_M$  orientado (en forma simétrica),  $n$  múltiplo de  $k$ .  $M \geq 2n + 2k - 2$ ,  $f : E(K_M) \rightarrow Z_k$  y  $t$  el número de estrellas  $K_{1,n}$  disjuntas por lados, de suma cero, en  $K_M$ . Entonces:

$$\left\lceil \frac{M(M - n - k + 1)}{n} \right\rceil \leq t \leq \left\lfloor \frac{M(M - 1)}{n} \right\rfloor.$$

*Demostración.* Sea  $f : E(K_M) \rightarrow Z_k$  una  $Z_k$ -coloración de los lados del grafo completo  $K_M$ . Sea  $G_0 = K_M$ . Como para todo  $x \in V(K_M)$  es  $d(x) \geq 2n + 2k - 3$ , existe en  $K_M$  una copia  $I$  de  $K_{1,n}$ , dirigida y de suma cero ( $\sum_{e \in E(I)} f(e) = 0$ ).

Consideremos ahora el grafo completo  $K_M$  sin los lados de la copia  $I$ ,  $G_1 = K_M - E(I)$ , y tomemos  $y \in V(K_M)$  tal que  $y \neq x$  y  $d(y) \geq 2n + 2k - 3$ . Entonces existe en  $K_M$  una copia  $\underline{I}$  de la estrella dirigida  $K_{1,n}$  de suma cero,

Sea  $G_2 = G_1 - E(\underline{I})$ . Si no, entonces  $d(y) \leq 2n + 2k - 4$ .

Se reitera este proceso hasta obtener un grafo  $G_s$  dirigido con  $M$  vértices, cada uno de los cuales con grado menor o igual que  $2n + 2k - 4$ , por lo que

$$|E(G_s)| = \frac{1}{2} \sum d(x) \leq \frac{2(M(n+k-2))}{2},$$

$$|E(G_0)| - |E(G_s)| \geq M(M-1) - M(n+k-2) = M(M-n-k+1),$$

y se obtiene

$$t \geq \frac{M(M-n-k+1)}{n}.$$

En el grafo completo  $K_M$  el número de lados es  $M(M-1)$ , por lo tanto  $K_M$  puede tener a lo sumo  $M(M-1)/n$  estrellas  $K_{1,n}$  disjuntas por lados. Por lo tanto

$$\frac{M(M-n-k+1)}{n} \leq t \leq \frac{M(M-1)}{n}.$$

□

**Teorema 4.2.4.** *Sea  $M$  un entero positivo,  $f : E(K_M) \rightarrow Z_k$ ,  $n$  múltiplo de  $k$ . El menor orden  $M$  de un grafo completo  $K_M$  orientado en forma simétrica, que garantice la presencia de  $t$  estrellas  $K_{1,n}$  disjuntas por lados, de suma cero, es*

$$\sqrt{nt + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \leq M \leq \sqrt{nt + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2},$$

donde  $a = n + k - 1$ .

*Demostración.* Por el teorema 4.2.3 en un grafo completo orientado en forma simétrica  $K_M$  se puede obtener  $t$  estrellas disjuntas por lados de suma cero, con

$$\frac{M(M-n-k+1)}{n} \leq t \leq \frac{M(M-1)}{n}.$$

En consecuencia

$$M(M-n-k+1) \leq nt \leq M(M-1),$$

de donde:

$$\sqrt{nt + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \leq M \leq \sqrt{nt + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2},$$

donde  $a = n + k - 1$ .

□

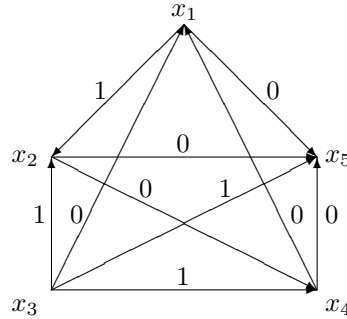


Figura 1: Torneo de 5 vértices.

**Teorema 4.2.5.** Sean  $G$  un grafo dirigido,  $f : E(G) \rightarrow Z_k$  y  $n$  un múltiplo de  $k$ . Entonces

- a) Si  $G$  es un torneo de  $M$  vértices, entonces  $G$  contiene por lo menos  $M(M - 2n - 2k + 3)/(2n)$  estrellas de suma cero dirigidas de  $n$  arcos y a lo sumo  $M(M - 1)/(2n)$ .
- b) El número de vértices necesarios para garantizar la presencia de  $t$  estrellas de suma cero en un torneo es aproximadamente  $\sqrt{2nt}$  para  $t$  suficientemente grande.

*Demostración.* La demostración de la parte a) es similar a la del teorema 4.2.3 y la parte b) es consecuencia de a). □

La Figura 1 muestra que un torneo de 5 vértices coloreado con elementos de  $Z_2$  contiene a lo sumo cinco estrellas  $K_{1,2}$  dirigidas de suma cero.

- 1)  $\{x_2, x_5\} \rightarrow 0, \{x_2, x_4\} \rightarrow 0$
- 2)  $\{x_3, x_1\} \rightarrow 0, \{x_4, x_1\} \rightarrow 0$
- 3)  $\{x_3, x_5\} \rightarrow 1, \{x_3, x_4\} \rightarrow 1$
- 4)  $\{x_1, x_5\} \rightarrow 0, \{x_4, x_5\} \rightarrow 0$
- 5)  $\{x_1, x_2\} \rightarrow 1, \{x_3, x_2\} \rightarrow 1$ .

### 4.3 Número de Ramsey baricéntrico para estrellas

En esta sección se determina el número de Ramsey baricéntrico  $BR(K_{1,tp+1}, Z_5)$  y se estiman  $BR(K_{1,5t+2}, Z_5)$  y el número de Ramsey baricéntrico para la estrella de tres lados  $K_{1,3}$ . Además se definen coloraciones de grafos completos sin estrellas baricéntricas.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $p \geq 5$  un número primo. Entonces*

$$BR(K_{1,3}, Z_p) \leq 2 \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 2.$$

*Demostración.* Coloreemos los lados de  $K_t$  con  $t = 2 \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 2$  colores en  $Z_p$ . Entonces:

- Existen tres lados incidentes en algún vértice con el mismo color, y en consecuencia se tendrá una estrella monocromática  $K_{1,3}$ , centrada en dicho vértice, o
- Los lados incidentes en algún vértice son coloreados con al menos  $t = \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1$  colores. En este caso se empleará el Teorema 3.7 para demostrar la existencia de estrellas baricéntricas de tres lados.

Sea  $C$  el conjunto de los colores asignados a los lados incidentes en el vértice considerado. Recordemos que

$$2^{\wedge}C = \{x_1 + x_2, \text{ con } x_1, x_2 \in C \text{ y } x_1 \neq x_2\}.$$

Entonces

$$|2^{\wedge}C| \geq \min \left\{ p, 2 \left( \left( \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 \right) - 2 \right) + 1 \right\} = \min \left\{ p, 2 \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1 \right\} = 2 \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1.$$

Por otra parte, el conjunto de  $t$  valores en  $Z_p$  de la forma  $2x$ , donde  $x \in C$ , debe intersectarse con el conjunto  $2^{\wedge}C$  pues

$$t + |2^{\wedge}C| = \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 + 2 \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1 = 3 \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil > p.$$

En consecuencia tenemos que  $2x_0 = x_1 + x_2$  para alguna tripleta de valores distintos en  $C$ , de donde  $3x_0 = x_0 + x_1 + x_2$ . Se ha encontrado de esta forma una estrella  $K_{1,3}$  baricéntrica.  $\square$

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $p$  un número primo impar y  $t > 2$  un entero. Entonces*

$$BR(K_{1,tp+1}, Z_5) = (t+1)p.$$

*Demostración.* La desigualdad  $BR(K_{1,tp+1}, Z_5) > N - 1 = (t + 1)p - 1$  está determinada por cualquier coloración de  $K_{N-1}$  con dos colores, uno de ellos coloreando algún subgrafo de grado  $p - 1$ .

Por otra parte, cualquier estrella de  $K_{(t+1)p}$  tiene  $(t + 1)p - 1$  lados y por tanto contiene una estrella de suma cero con  $tp$  vértices. Adicionando otro de los lados del centro de la estrella a la de suma cero, se obtiene una estrella baricéntrica, con el color del nuevo lado como baricentro.  $\square$

**Teorema 4.3.3.** *Sea  $t \geq 2$  un número entero positivo. Entonces*

$$BR(K_{1,5t+2}, Z_5) \leq 5(t + 1).$$

*Demostración.* Seleccionemos un vértice en  $K_{5(t+1)}$ . Considérense los  $5t + 4 = 5(t - 1) + 9$  lados incidentes en este vértice. Esta cantidad permite formar  $t - 1$  subconjuntos de lados, cada uno de cardinalidad 5 y tales que la suma de los colores asignados a los lados de cada subconjunto es cero, como consecuencia del Teorema de Erdős, Ginzburg y Ziv. Después de este procedimiento, quedan 9 lados incidentes en el vértice, sin ser considerados. Si 7 de ellos forman una estrella baricéntrica, se agregan a los  $5(t - 1)$  lados señalados para formar una estrella baricéntrica de  $5t + 5$  lados. Veamos que esto siempre es posible.

Como el orden del grupo es menor que 9, existen por lo menos dos de los 9 lados con el mismo color. Si los seleccionamos y existe algún conjunto de 5 lados con suma cero en los siete restantes, entonces estos 5 lados con los dos elegidos forman una estrella baricéntrica de 7 lados. Si por el contrario los 7 lados no contienen ningún subconjunto de 5 elementos de suma cero, ellos deben tener una de las dos siguientes coloraciones: 0, 1, 1, 1 y 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2. En cada caso, cualquiera sea el conjunto de lados seleccionados, puede encontrarse un conveniente conjunto baricéntrico. El conjunto baricéntrico y su baricentro están dados en la siguiente tabla:

<u>000011100</u>	<u>011222200</u>
<u>000011111</u>	<u>011222211</u>
<u>000011122</u>	<u>011222222</u>
<u>000011133</u>	<u>011222233</u>
<u>000011144</u>	<u>011222244</u>

$\square$

#### 4.4 Coloraciones de grafos completos sin estrellas baricéntricas

En el estudio de los problemas de coloraciones de grafos y en particular de los problemas de números de Ramsey, se hace necesario determinar las coloraciones de grafos completos sin copia de algún grafo de suma cero o baricéntrica.

A continuación damos algunos resultados de coloraciones de grafos completos sin estrellas baricéntricas.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $n < k$  con  $k$  primo. Si  $n = k - 1$  y coloreamos los lados de cada vértice del grafo completo  $K_{n+k-3}$  con dos colores en  $Z_k$  tales que  $k - 2$  lados incidentes sean coloreados con un color y  $k - 3$  lados con otro color, entonces no existe estrella  $K_{1,n}$  baricéntrica.*

*Demostración.* Cada vértice de  $K_{2k-4}$  tiene  $2k - 5$  lados incidentes. Sean  $a$  y  $b$  elementos de  $Z_k$  y coloreemos  $k - 2$  lados de  $K_{2k-4}$  con  $a$  y  $k - 3$  lados de  $K_{2k-4}$  con  $b$  y supongamos que existe  $K_{1,n}$  en  $K_{2k-4}$  baricéntrica. Entonces,  $(k - 1 - r)a + rb = na$  ó  $(k - 1 - r)a + rb = nb$ , con  $1 \leq r \leq k - 3$ .

- Si  $(k - 1 - r)a + rb = na$  entonces  $(k - 1 - r)a + rb = (k - 1)a$  y  $ra = rb$ . Esto se cumple si  $r \equiv 0 \pmod{k}$ , pero  $1 \leq r \leq k - 3$  y por lo tanto  $ra \neq rb$ .
- Si  $(k - 1 - r)a + rb = nb$  entonces  $(k - 1 - r)a + rb = (k - 1)b$  y  $(k - 1 - r)a = (k - 1 - r)b$ . Esto se cumple si  $k - 1 - r \equiv 0 \pmod{k}$ , pero  $1 \leq r \leq k - 3$  y por lo tanto  $(k - 1 - r)a \neq (k - 1 - r)b$ .

En consecuencia no existe en  $K_{2k-4}$  una estrella  $K_{1,n}$  baricéntrica. □

**Observación 4.4.2.** Una coloración del grafo completo  $K_{2p-4}$ , con tres elementos de  $Z_p$  con  $p$  primo, sin estrella  $K_{1,p-1}$  baricéntrica es la siguiente: un subgrafo  $K_{p-2}$  de  $K_{2p-4}$  se colorea con un elemento  $a$  de  $Z_p$  y otro subgrafo  $K_{p-2}$  sin vértices en común con el primero se colorea con un elemento  $b$  de  $Z_p$ . El resto de los lados de  $K_{2p-4}$  se colorean con un color  $c$ . Así cada vértice del grafo  $K_{2p-4}$  es coloreado con dos colores.

**Teorema 4.4.3.** *Sean  $n \equiv 1 \pmod{3}$  y el grafo completo  $K_{n+1}$  coloreado con dos elementos de  $Z_3$  tal que  $a$  lados están coloreados con un elemento y  $b$  lados están coloreados con el otro elemento. Si no existe estrella baricéntrica  $K_{1,n}$  en  $K_{n+1}$ , entonces  $a \equiv b \equiv 2 \pmod{3}$ .*

*Demostración.* Supongamos que los  $a$  lados de  $K_{n+1}$  están coloreados con 0 y que los otros  $b$  lados de  $K_{n+1}$  están coloreados con 1. Como en  $K_{n+1}$  no



existe  $K_{1,n}$  baricéntrica, se tiene que  $a(0) + b(1) \equiv 2 \pmod{3}$ . Entonces  $b \equiv 2 \pmod{3}$ . Por otro lado como  $n \equiv 1 \pmod{3}$  se tiene que  $a + b \equiv 1 \pmod{3}$ , así  $a \equiv 1 - 2 \equiv 2 \pmod{3}$ .  $\square$

**Observación 4.4.4.** Una coloración del grafo completo  $K_{n+1}$ , con todos los elementos de  $Z_3$ , sin estrella  $K_{1,n}$  baricéntrica es la siguiente: un grafo  $K_{a+1}$  en  $K_{n+1}$  se colorea con un elemento  $c$  de  $Z_3$  y un grafo  $K_{b+1}$  en  $K_{n+1}$  se colorea con un elemento  $d$  de  $Z_3$ , de tal forma que cada vértice de  $K_{n+1}$  tenga  $a$  lados coloreados con  $c$  y  $b$  lados coloreados con  $d$ .

El resto de los lados de  $K_{n+1}$  se colorean con el color  $e$  de  $Z_3$ .

**Teorema 4.4.5.** Sea  $n < p$ , con  $p$  primo y sea el grafo  $K_{n+1}$  coloreado con elementos de  $Z_p$ . Si los lados incidentes en cada vértice están coloreados con elementos de  $Z_p$  en progresión aritmética entonces:

- 1) Para  $n$  impar existe en  $K_{n+1}$  una estrella baricéntrica  $K_{1,n}$ .
- 2) Para  $n$  par no existe en  $K_{n+1}$  una estrella  $K_{1,n}$  baricéntrica.

*Demostración.* Sea  $x$  un vértice de  $K_{n+1}$  con sus lados incidentes coloreados con  $a, a + r, a + 2r, \dots, a + (n - 1)r$ , con  $r \in N$ , y  $a \in Z_p$ . Entonces

$$\begin{aligned} a + (a + r) + \dots + (a + (n - 1)r) &= na + (1 + 2 + \dots + (n - 1))r \\ &= n(a + ((n - 1)/2)r). \end{aligned}$$

Si  $n$  es impar,  $(n - 1)/2 \in Z$  y la estrella  $K_{1,n}$  es baricéntrica.

Si  $n$  es par,  $(n - 1)/2 \notin Z$ , y la estrella  $K_{1,n}$  no es baricéntrica.  $\square$

## Referencias

- [1] Bailey, C., Richter, R. *Sum Zero (mod n), Size n Subsets of Integers*, Amer. Math. Monthly **96**(3) (1989), 240–242.
- [2] Bialostocki, A., Dierker, P. *On the Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem and the Ramsey Numbers for Stars and Matchings*, Discrete Math. **110** (1992), 1–8.
- [3] Cammaroto, A., Duran, M. y González, S. *Problemas de Suma Cero y Baricéntricos*, Divulgaciones Matemáticas **4**(1996). 33–47.
- [4] Cammaroto, A., Delorme, Ch., Duran, M., Ordaz, O. *Caracterización de las Coloraciones del Grafo Completo  $K_{2k-1}$  sin Estrellas  $K_{1,k}$  de Suma Cero*, Preprint. VIII Jornadas de Teoría de Grafos, Marzo de 1998.

- [5] Caro, Y. *On Zero-sum Ramsey Numbers Stars*, Discrete Math. **104**(1992), 1–6.
- [6] Dias Da Silva, J. A., Hamidoune, Y. *Cyclic Spaces for Grassmann Derivatives and Additive Theory*, Bull. London Math. Soc. **26**(1994) 140–146.
- [7] Erdős, P., Ginzburg, A., Ziv, A. *Theorem in Additive Number Theory*, Bull. Res. Council Israel 10, 1961.
- [8] Erdős, P., Graham, R. *Old and New Results in Combinatorial Number Theory*, Monographie 28 de L'Enseignement Mathématique, Geneve, 1980.
- [9] Flores C., Ordaz, O. *On the Erdős-Ginzburg-Ziv Theorem*. Discrete Mathematics **152** (1996), 321–324.
- [10] Hamidoune, Y. *Combinatorial Problems on Sequence Sums*, CNRS, Paris, June 4, 1993.
- [11] Mann, H. B. *Two Addition Theorems*, Journal of Combinatorial Theory **3**(1967). 233–235.