Capacité Associeé a un Courant Positif Fermé

Dabbek Khalifa et Elkhadhra Fredj

Received: December 12, 2005
Revised: July 24, 2006

Communicated by Thomas Peternell

Abstract. Let Ω be an open set of $\mathbb{C}^n$ and T be a positive closed current of dimension $p \geq 1$ on Ω, we define a capacity associated to T by :

$$C_T(K,\Omega) = C_T(K) = \sup\left\{ \int_K T \wedge (dd^c v)^p,\ v \in \mathrm{psh}(\Omega),\ 0 < v < 1 \right\}$$

where K is a compact set of Ω.
We prove, in the same way as Bedford-Taylor, that a locally bounded plurisubharmonic function is quasi-continuous with respect to C_T. In the second part we define the convergence relatively to C_T and we prove that if (u_j) is a family of locally uniformly bounded plurisubharmonic functions and u is a locally bounded plurisubharmonic function such that $u_j \to u$ relatively to C_T then $T \wedge (dd^c u_j)^p \to T \wedge (dd^c u)^p$ in the current sense.

2000 Mathematics Subject Classification: 32C30 ; 31C10 ; 31A15 ; 32W20.
Keywords and Phrases: courant positif, plurisousharmonique , capacité, operateur de Monge Ampère.

1 Introduction

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, K un compact de Ω et T un courant positif fermé de dimension $p \geq 1$ sur Ω. On note $\mathrm{psh}(\Omega)$ l'ensemble de fonctions plurisousharmonique sur Ω et $L^\infty_{loc}(\Omega)$ l'ensemble de fonctions localement bornées. On définit la capacité de K (dans Ω) relativement à T par :

$$C_T(K,\Omega) = C_T(K) = \sup\left\{ \int_K T \wedge (dd^c v)^p,\ v \in \mathrm{psh}(\Omega),\ 0 < v < 1 \right\}$$

Dans la prémière partie on montre qu'une fonction plurisousharmonique localement bornée est continue en dehors d'un ouvert de capacité arbitrairement petite :

Théorème 1.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, $u \in \mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et T un courant positif fermé sur Ω de dimension $p \geq 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de Ω tel que $C_T(\mathcal{O}, \Omega) < \varepsilon$ et u soit continue sur $\Omega \setminus \mathcal{O}$.*

Ce résultat est prouvé dans [Be-Ta] pour $T = 1$. L'intérêt de ce théorème est dû en partie au résultat suivant, qui constitue une généralisation d'un théorème de [Be-Ta].

Théorème 1.2 (théorème de Comparaison) *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, T un courant positif fermé de dimension $p \geq 1$ sur Ω, u et $v \in \mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons que :*

$$\liminf_{\xi \to \partial\Omega} (u(\xi) - v(\xi)) \geq 0$$

Alors on a :

$$\int_{\{u<v\}} T \wedge (dd^c v)^p \leq \int_{\{u<v\}} T \wedge (dd^c u)^p$$

Dans la deuxième partie on définit la notion de convergence par rapport à C_T. On dit que u_j converge vers u par rapport à C_T sur E si pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{j \to +\infty} C_T\Big(\big\{z \in E;\quad |u_j(z) - u(z)| > \delta\big\}, \Omega\Big) = 0$$

On montre q'une suite de fonctions psh localement bornée décroissante vers une fonction psh est convergente par rapport à C_T :

Théorème 1.3 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, T un courant positif fermé sur Ω de dimension $p \geq 1$, u_j et u des fonctions psh, localement bornées sur Ω telles que $u_j = u$ sur un voisinage de $\partial\Omega$, (u_j) décroissante vers u, alors (u_j) converge vers u par rapport à C_T.*

Comme application nous généralisons des résultats de [Be-Ta] et de [Xi] sur l'opérateur de Monge-Ampère. Le théorème principale de cette partie est le suivant :

Théorème 1.4
Soient $(u_j)_j$ une suite de fonctions psh localement uniformément bornées et $u \in \mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on a :
a) *Si u_j converge vers u par rapport à C_T sur chaque $E \subset\subset \Omega$, alors le courant $T \wedge (dd^c u_j)^p$ converge au sens des courants vers $T \wedge (dd^c u)^p$.*
b) *Supposons qu'il existe $E \subset\subset \Omega$ tel que $\forall j,\ u_j = u$ sur $\Omega \setminus E$ et que les suites $uT \wedge (dd^c u_j)^p$, $u_j T \wedge (dd^c u)^p$ et $u_j T \wedge (dd^c u_j)^p$ convergent au sens des courants vers $uT \wedge (dd^c u)^p$ alors u_j converge vers u par rapport à C_T sur E.*

2 Capacité associeé a un courant positif fermé

Définition 2.1
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, K un compact de Ω et T un courant positif fermé de dimension $p \geq 1$ sur Ω, on définit la capacité de K (dans Ω) relativement à T par :

$$C_T(K,\Omega) = C_T(K) = \sup\left\{\int_K T\wedge (dd^c v)^p,\ v\in \mathrm{psh}(\Omega),\ 0<v<1\right\}$$

Pour tout $E\subset\Omega$, on pose :

$$C_T(E,\Omega) = \sup\{C_T(K),\ K \text{ compact},\ K\subset E\}$$

Proposition 2.2
1) Si E est un borélien, on a :

$$C_T(E,\Omega) = C_T(E) = \sup\left\{\int_E T\wedge (dd^c v)^p,\ v\in \mathrm{psh}(\Omega),\ 0<v<1\right\}$$

2) *Si $E_1\subset E_2$, alors $C_T(E_1,\Omega)\leq C_T(E_2,\Omega)$.*
3) *Si $E\subset\Omega_1\subset\Omega_2$, alors $C_T(E,\Omega_1)\geq C_T(E,\Omega_2)$.*
4) *Si $E_1, E_2\ldots$ sont des ensembles boréliens dans Ω, on a :*

$$C_T\Big(\bigcup_{j\geq 1} E_j,\Omega\Big) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} C_T(E_j,\Omega).$$

5) *Si $E_1\subset E_2\subset\cdots$ sont des ensembles boréliens dans Ω, alors :*

$$C_T\Big(\bigcup_{j\geq 1} E_j,\Omega\Big) = \lim_{j\to+\infty} C_T(E_j,\Omega).$$

6) *Si $f:\Omega_1\mapsto\Omega_2$ est une fonction holomorphe, propre sur* SuppT *et $\mathcal{O}$ un ouvert de Ω_2, alors :*

$$C_{f_*T}(\mathcal{O},\Omega_2) \leq C_T(f^{-1}(\mathcal{O}),\Omega_1)$$

et l'égalité a lieu si f est un biholomorphisme.

Démonstration. Pour 1) $\to$ 5), on procède comme [Be-Ta] ; pour 6) on suppose que $0\leq v\leq 1$ est psh, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_2, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} f_*T\wedge(dd^c v)^p &= \int_{\Omega_2} f_*T\wedge(\mathbb{1}_{\mathcal{O}}(dd^c v)^p)\\ &= \int_{\Omega_1} T\wedge(\mathbb{1}_{\mathcal{O}}\circ f)(dd^c(v\circ f))^p\\ &= \int_{f^{-1}(\mathcal{O})} T\wedge(dd^c(v\circ f))^p \leq C_T(f^{-1}(\mathcal{O}),\Omega_1).\end{aligned}$$

Pour obtenir ces égalités il suffit de remplacer $1\!\!1_{\mathcal{O}}$ par une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi_k \uparrow 1\!\!1_{\mathcal{O}}$. Dans le cas général, on prend $v_\varepsilon \uparrow v$ une régularisation de v et en utilisant le fait que : $\int_{\mathcal{O}} f_*T \wedge (dd^c v)^p \leq \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathcal{O}} f_*T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^p$. Si f est un biholomorphisme, on a de même

$$C_T(f^{-1}(\mathcal{O}), \Omega_1) = C_{f_*^{-1}(f_*T)}(f^{-1}(\mathcal{O}), \Omega_1) \leq C_{f_*T}(\mathcal{O}, \Omega_2).$$

Dans 6), l'inégalité peut être stricte, en effet si f est l'éclatement de centre 0, $T = [E]$ le courant d'intégration sur l'ensemble exceptionnel $E = f^{-1}(0)$. □

Problemes ouverts :

1) Si $\cdots \subset K_2 \subset K_1$ est une suite décroissante de compacts de Ω, alors d'après la proposition 2.2, $C_T(K_j)$ est décroissante. A-t-on $C_T(\cap K_j) = \lim\limits_{j \to +\infty} C_T(K_j)$?

2) A-t-on l'égalité : $\tilde{C}_T \equiv C_T$?, où on a posé

$$\tilde{C}_T(K) = \sup \left\{ \int_K T \wedge (dd^c v)^p,\ v \in \mathrm{psh}(\Omega, [0,1]), v_{|K \cap \mathrm{suppT}} \equiv 0 \right\}$$

3) Soit K un compact de Ω, existe-t-il u dans $\mathrm{psh}(\Omega, [0,1])$, telle que l'on ait $C_T(K) = \int_K T \wedge (dd^c u)^p$?

4) Définition : Un ensemble $A \subset \Omega$ est dit $T-$pluripolaire dans Ω si $C_T(A, \Omega) = 0$.
A est dit localement $T-$pluripolaire si, pour tout a dans A, il existe un voisinage ouvert V de a dans Ω tel que $A \cap V$ est $T-$pluripolaire dans V.
Un ensemble localement $T-$pluripolaire est-il $T-$pluripolaire dans Ω ?
Caractériser les ensembles $T-$pluripolaires dans Ω ?

Remarques.

(i) Si $T = [X]$ est le courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique X de dimension pure p, $\mathcal{O}$ un ouvert de Ω et $\mathrm{Reg}X$ l'ensemble des points réguliers de X. En utilisant l'égalité $\int_{\mathcal{O}} [X] \wedge (dd^c v)^p = \int_{\mathcal{O} \cap \mathrm{Reg}X} (dd^c(i^* v))^p$ où $v \in \mathrm{psh}(\Omega, [0,1])$, et $i : X \hookrightarrow \Omega$, est l'injection canonique, on a :

$$\begin{gathered}\mathcal{O} \textit{ est localement } [X]-\textit{pluripolaire} \Longleftrightarrow \\ \mathrm{Reg}X \cap \mathcal{O} \textit{ est localement pluripolaire dans } \mathrm{Reg}X\end{gathered}$$

On remarque que si T est un courant positif fermé de dimension $p \geq 1$ et $\nu_T(x) > 0$ $\forall x \in X$, alors un ouvert localement $T-$pluripolaire coupe $\mathrm{Reg}X$ en un ouvert localement pluripolaire dans $\mathrm{Reg}X$.

(ii) Si w est une fonction psh, bornée et A un borélien $T-$pluripolaire, alors A est $T \wedge (dd^c w)^k-$pluripolaire pour tout $0 \leq k \leq \mathrm{dimT}$. En effet, il est facile de voir qu'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$C_{T \wedge (dd^c w)^k}(A, \Omega) \leq \alpha C_T(A, \Omega).$$

En particulier si $T = 1$, on retrouve le fait que le courant $(dd^c w)^k$ ne charge pas les ensembles pluripolaires.

(iii) Soit $\varphi \in \mathrm{psh}(\Omega)$ et localement bornée sur $\Omega \setminus K$ où $K = \{\varphi = -\infty\}$. Alors

$$C_{T\wedge(dd^c\varphi)^k}(K) \geq C_T(K)\Big(C_{dd^c\varphi}(K)\Big)^k .$$

En effet, on peut supposer que $k = 1$ et soit $v \in \mathrm{psh}(\Omega, [0,1])$. Posons $\gamma = C_{dd^c\varphi}(K)$ et soit $\varphi_j = \max(\varphi, \gamma v - j)$. Alors $\varphi_j \downarrow \varphi$ et $\varphi_j = \gamma v - j$ sur $K_j = \{\varphi \leq -j\}$. De plus $K_j \downarrow K$. Soit j_0 fixé, alors

$$\begin{aligned}\int_{K_{j_0}} T \wedge dd^c\varphi \wedge (dd^c v)^{p-1} &\geq \limsup_{j\to+\infty} \int_{K_{j_0}} T \wedge dd^c\varphi_j \wedge (dd^c v)^{p-1} \\ &\geq \limsup_{j\to+\infty} \Big(\int_{K_j} T \wedge dd^c\varphi_j \wedge (dd^c v)^{p-1}\Big) \\ &= \gamma \limsup_{j\to+\infty} \int_{K_j} T \wedge (dd^c v)^p ,\end{aligned}$$

on fait tendre j_0 vers $+\infty$ puis on passe au sup sur tout les fonctions v psh telle que $0 \leq v \leq 1$.

(iv) Soient $\pi : \Delta^n \mapsto \Delta^k$ $(k < p)$ la projection canonique ; $v \in \mathrm{psh}(\Delta^k, [0,1])$ et $w \in (\mathrm{psh} \cap \mathcal{C}^\infty)(\Delta^n, [0,1])$. D'après [Bm-El], si $\mathcal{O} \subset\subset \Delta^n$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{a\in\pi(\mathcal{O})} \Big\{ \int_{\mathcal{O}} \langle T, \pi, a\rangle \wedge (dd^c w)^{p-k} \Big\} (dd^c v)^k &= \int_{\mathcal{O}} T \wedge (dd^c w)^{p-k} \wedge (dd^c \tilde{v})^k \\ &\leq \tfrac{2^p}{C_p^k} C_T(\mathcal{O}, \Delta^n)\end{aligned}$$

où $\tilde{v} = v \circ \pi$. Par régularisation, l'inégalité reste vraie pour $w \in \mathrm{psh}(\Delta^{\mathrm{n}}, [0,1])$. Comme $\pi(\mathcal{O}) \subset\subset \Delta^k$, on a :

$$\int_{a\in\pi(\mathcal{O})} C_{\langle T,\pi,a\rangle}(\mathcal{O})(dd^c v)^k \leq \frac{2^p}{C_p^k} C_T(\mathcal{O}, \Delta^n) ,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\ \textit{est}\ T-\textit{pluripolaire} &\implies \forall v,\ \mathcal{O}\ \textit{est}\ \langle T, \pi, a\rangle - \textit{pluripolaire} \\ &\qquad (dd^c v)^k - p.p \\ &\implies \exists N\ \textit{pluripolaire de}\ \pi(\mathcal{O})\ \textit{tel que}\ \forall a \notin N, \\ &\qquad \mathcal{O}\ \textit{est}\ \langle T, \pi, a\rangle - \textit{pluripolaire} .\end{aligned}$$

La réciproque est fausse, il suffit de prendre le courant $T = (dd^c|z'|^2)^p$.

Le résultat suivant est une conséquencce directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui sera utile dans la suite.

Proposition 2.3 *Soient* $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, \ldots, w_{p-1}$ *dans* $\mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *et* T *un courant positif fermé sur* Ω *de dimension* $p \geq 1$. *Supposons que* $\{u_1 \neq u_2\} \subset\subset \Omega$ *et soit* $0 \leq \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi = 1$ *sur* $\{u_1 \neq u_2\}$. *Alors on a :*

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega d(u_1 - u_2) \wedge d^c(v_1 - v_2) \wedge \chi\Big)^2 \leq & \Big(\int_\Omega d(u_1 - u_2) \wedge d^c(u_1 - u_2) \wedge \chi\Big). \\ & \Big(\int_\Omega \psi d(v_1 - v_2) \wedge d^c(v_1 - v_2) \wedge \chi\Big)\end{aligned}$$

où $\chi = T \wedge dd^c w_1 \wedge \ldots \wedge dd^c w_{p-1}$

Démonstration. On remarque que l'application $(u,v) \mapsto \int_\Omega \psi du \wedge d^c v \wedge \chi$ est une forme bilinéaire symétrique et positive sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \times \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. La proposition 2.3 se justifie alors par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au couple $(u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ où $u_i, v_i \in \mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Dans le cas général, on procède par régularisation. $\square$

Théorème 2.4 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, T un courant positif fermé sur Ω de dimension $p \geq 1$, u_j et u des fonctions psh, localement bornées sur Ω telles que $u_j = u$ sur un voisinage de $\partial\Omega$, (u_j) décroissante vers u, alors $\forall\ \delta > 0$ on a :*

$$\lim_{j \to +\infty} C_T\Big(\{z \in \Omega,\ u_j(z) > u(z) + \delta\}\Big) = 0\ .$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\delta = 1$. Posons $\Omega_j = \{z \in \Omega,\ u_j(z) > u(z) + 1\}$ et choisissons un ouvert $\mathcal{W}$ de sorte que $\{u_j \neq u\} \subset \mathcal{W} \subset\subset \Omega$. Soit $v \in \mathrm{psh}(\Omega, [0,1])$, on a :

$$\int_{\Omega_j} T \wedge (dd^c v)^p \leq \int_{\mathcal{W}} (u_j - u) T \wedge (dd^c v)^p = -\int_{\mathcal{W}} d(u_j - u) \wedge d^c v \wedge T \wedge (dd^c v)^{p-1}.$$

D'après la proposition 2.3, l'intégrale à droite est majorée par

$$C\Big(\int_{\mathcal{W}} d(u_j - u) \wedge d^c(u_j - u) \wedge T \wedge (dd^c v)^{p-1}\Big)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

où $C = (\int_{\mathcal{W}} T \wedge dv \wedge d^c v \wedge (dd^c v)^{p-1})^{\frac{1}{2}} \leq M < \infty$ et M est une constante indépendante de v d'après l'inégalité de Chern.Levine.Nirenberg (cf.[C.L.N]). Appliquons encore une fois la formule de Stokes, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{W}} d(u_j - u) \wedge d^c(u_j - u) \wedge T \wedge (dd^c v)^{p-1} \\ = \quad & -\int_{\mathcal{W}} (u_j - u) T \wedge dd^c(u_j - u) \wedge (dd^c v)^{p-1} \\ = \quad & \int_{\mathcal{W}} (u - u_j) T \wedge (dd^c u_j - dd^c u) \wedge (dd^c v)^{p-1} \\ \leq \quad & \int_{\mathcal{W}} (u_j - u) T \wedge dd^c u \wedge (dd^c v)^{p-1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors :

$$\int_{\Omega_j} T \wedge (dd^c v)^p \leq C\Big(\int_{\mathcal{W}} (u_j - u) T \wedge dd^c u \wedge (dd^c v)^{p-1}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

La puissance de $dd^c v$ diminue de 1, on répéte ensuite le procédé $(p-1)$-fois, dans chaque étape en majorant $(u - u_j) dd^c(u_j - u)$ par $(u_j - u) dd^c u$ et en appliquant la proposition 2.3, on obtient finalement une majoration de $\displaystyle\int_{\Omega_j} T\wedge(dd^cv)^p$ par :

$$B\Big(\int_\Omega (u_j - u)T \wedge (dd^c u)^p\Big)^{\frac{1}{2^p}} ,$$

où B est une constante indépendante de j et de v.
Donc $\lim_{j\to+\infty} C_T(\Omega_j) = 0$. □

Comme conséquence du théorème 2.4, on montre qu'une fonction psh, localement bornée sur un ouvert borné Ω est continue si on retire de Ω un ouvert $\mathcal{O}$ de capacité C_T-arbitrairement petite. Plus précisement, on a

Théorème 2.5 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, $u \in \mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et T un courant positif fermé sur Ω de dimension $p \geq 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de Ω tel que $C_T(\mathcal{O}, \Omega) < \varepsilon$ et u soit continue sur $\Omega \setminus \mathcal{O}$.*

Démonstration. D'après 3) et 4) de la proposition 2.2, on peut supposer que $\Omega = \{\rho < 0\}$ est strictement pseudoconvexe et u bornée au voisinage de $\overline{\Omega}$. Soit (u_j) une suite de fonctions psh, de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui décroit vers u dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Par rétrécissement de Ω et en remplaçant u_j par $max(u_j, A\rho + B)$ et u par $max(u, A\rho + B)$, on peut supposer que $u_j = u = A\rho + B$ au voisinage de $\partial\Omega$ pour A et $B > 0$ convenablement choisis (pour plus de détails voir [Be-Ta]). D'après le théorème 2.4, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, il existe j_l tel que :

$$\mathcal{O}'_l = \{u_{j_l} > u + 1/l\} \subset \Omega \;\; ; \;\; C_T(\mathcal{O}'_l) < 2^{-l} \; .$$

Fixons un entier k tel que $2^{-k} < \varepsilon$ et posons : $G_k = \cup_{l\geq k}\mathcal{O}'_l$. La suite (u_{j_l}) est décroissante vers u uniformément sur $\Omega \setminus G_k$, donc u est continue sur $\Omega \setminus G_k$ et d'après 3) de la proposition 2.2, on obtient
$C_T(G_k, \Omega) \leq \sum_{l\geq k} C_T(\mathcal{O}'_l, \Omega) < 2^{-k} < \varepsilon$ □

Remarques.

1) Si X est un sous-ensemble analytique, alors le théorème classique de [Be-Ta] ne donne aucune information sur la régularité de la fonction u sur X (i.e u peut être discontinue sur X tout entier). En appliquant 2.5 au courant $T = [X]$, nous obtenons un résultat plus précis : u est continue sur X privé de l'ensemble $\mathcal{O} \cap X$ qui est de volume arbitrairement petit dans X.

2) Le théorème 2.5 est faux si on enlève l'hypothèse $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, et ce au vu du contre-exemple suivant :

$$\Omega = \Delta^2 \subset \mathbb{C}^2; \quad T = [z_1 = 0]; \qquad u(z_1, z_2) = \log|z_1| \; .$$

3) Si l'on suppose de plus que T est assez régulier, c'est-à-dire pour tout u psh

$$\lim_{j\to+\infty} C_T\Big(\{u < -j\}, \Omega\Big) = 0 \; ,$$

comme c'est le cas des courants à coéfficients localement bornés, alors on peut généraliser 2.5 pour u seulement psh sur Ω.

L'intérêt du théorème 2.5 est dû en partie au résultat suivant, qui constitue une généralisation d'un théorème de [Be-Ta].

Théorème 2.6 (théorème de Comparaison) *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{C}^n$*,* T *un courant positif fermé de dimension* $p \geq 1$ *sur* Ω*,* u *et* $v \in \mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$*. Supposons que :*

$$\liminf_{\xi \to \partial\Omega} (u(\xi) - v(\xi)) \geq 0$$

Alors on a :

$$\int_{\{u<v\}} T \wedge (dd^c v)^p \leq \int_{\{u<v\}} T \wedge (dd^c u)^p$$

Démonstration. On commence d'abord par l'étude du cas où u et v sont continues. Quitte à travailler sur l'ouvert $\{u < v\}$, on peut supposer que $\Omega = \{u < v\}$ et $u = v$ sur $\partial\Omega$. Soit $v_\varepsilon = \max(v - \varepsilon, u)$, $v_\varepsilon = u$ dans un voisinage de $\partial\Omega$.
D'après Stokes, on a :

$$\int_\Omega T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^p = \int_\Omega T \wedge (dd^c u)^p$$

quand $\varepsilon \searrow 0$, v_ε converge uniformement vers v, donc $T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^p$ converge faiblement vers $T \wedge (dd^c v)^p$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{D}(\Omega)$ qui croit vert la fonction caracteristique de Ω, on trouve :

$$\int_\Omega \varphi_n T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^p \leq \int_\Omega T \wedge (dd^c v_\varepsilon)^p = \int_\Omega T \wedge (dd^c u)^p$$

On finit la preuve en faisant $\varepsilon \to 0$ et $n \to +\infty$ dans cet ordre.
Nous étudions maintenant le cas général. Quitte à remplacer u par $u + 2\delta$ et faire tendre δ vers 0, on peut supposer que :

$$\liminf_{\xi \to \partial\Omega} (u(\xi) - v(\xi)) \geq 2\delta > 0$$

Dans ce cas, il existe un ouvert $\mathcal{O} \subset\subset \Omega$ tel que : $u(z) \geq v(z) + \delta$ pour tout $z \in \Omega \setminus \mathcal{O}$. Choisissons deux suites de fonctions u_k et v_j Psh, de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui décroissent respectivement vers u et v dans un voisinage de $\overline{\mathcal{O}}$ et de sorte que pour tout $j \geq k$, on a $u_k \geq v_j$ sur $\partial\mathcal{O}$. D'après ce qui précède, on a :

$$\int_{\{u_k<v_j\}} T \wedge (dd^c v_j)^p \leq \int_{\{u_k<v_j\}} T \wedge (dd^c u_k)^p \qquad (2.6.1)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et G un ouvert de Ω, tel que $C_T(G,\Omega) < \varepsilon$ et u, v sont continues sur $\Omega \setminus G$ (cf 2.5). On peut écrire $v = \varphi + \psi$ où φ est continue sur Ω et $\psi = 0$ sur

$\Omega \setminus G$.
Soit l'ouvert $U = \{u_k < \varphi\}$, on a :

$$\int_U T \wedge (dd^c v)^p \leq \lim_{j \to +\infty} \int_U T \wedge (dd^c v_j)^p \tag{2.6.2}$$

Comme $U \cup G = \{u_k < v\} \cup G$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\{u_k<v\}} T \wedge (dd^c v)^p &\leq \int_U T \wedge (dd^c v)^p + \int_G T \wedge (dd^c v)^p \\
&\leq \lim_{j \to +\infty} \int_U T \wedge (dd^c v_j)^p + \int_G T \wedge (dd^c v)^p \\
&\leq \lim_{j \to +\infty} \Big(\int_{\{u_k<v_j\}} T \wedge (dd^c v_j)^p + \int_G T \wedge (dd^c v_j)^p \Big) \\
&+ \int_G T \wedge (dd^c v)^p \\
&\leq \lim_{j \to +\infty} \int_{\{u_k<v_j\}} T \wedge (dd^c v_j)^p + 2M^p \varepsilon \\
&\leq \lim_{j \to +\infty} \int_{\{u_k<v_j\}} T \wedge (dd^c u_k)^p + 2M^p \varepsilon.
\end{aligned}$$

La $2^{ème}$ inégalité résulte de (2.6.2). Comme $U \subset \{u_k < v_j\} \cup G$, on obtient la $3^{ème}$ inégalité. La $4^{ème}$ résulte du fait que $C_T(G, \Omega) < \varepsilon$, tandis que la dernière inégalité se justifie par (2.6.1).
Comme $\{u_k < v_j\} \downarrow \{u_k \leq v\}$,$\{u_k < v\} \uparrow \{u < v\}$, on obtient :

$$\int_{\{u<v\}} T \wedge (dd^c v)^p \leq \lim_{k \to +\infty} \int_{\{u_k \leq v\}} T \wedge (dd^c u_k)^p + 2M^p \varepsilon \tag{2.6.3}$$

Les fonctions u et v sont continues sur $\Omega \setminus G$, donc $\{u \leq v\} \setminus G$ est un fermé de Ω. Il s'ensuit alors : $\displaystyle\int_{\{u \leq v\} \setminus G} T \wedge (dd^c u)^p \geq \lim_{k \to +\infty} \int_{\{u \leq v\} \setminus G} T \wedge (dd^c u_k)^p$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\{u \leq v\}} T \wedge (dd^c u)^p &\geq \int_{\{u \leq v\} \setminus G} T \wedge (dd^c u)^p \\
&\geq \lim_{k \to +\infty} \int_{\{u \leq v\} \setminus G} T \wedge (dd^c u_k)^p \\
&\geq \lim_{k \to +\infty} \Big(\int_{\{u_k<v\}} T \wedge (dd^c u_k)^p - \int_G T \wedge (dd^c u_k)^p \Big) \\
&\geq \lim_{k \to +\infty} \int_{\{u_k<v\}} T \wedge (dd^c u_k)^p - M^p \varepsilon
\end{aligned}$$

La $3^{ème}$ inégalité se justifie par l'inclusion $\{u_k < v\} \setminus G \subset \{u < v\} \setminus G$.
D'après (2.6.3), on obtient :

$$\int_{\{u<v\}} T \wedge (dd^c v)^p \leq \int_{\{u \leq v\}} T \wedge (dd^c u)^p + 3M^p \varepsilon$$

Comme ε est arbitraire, on en déduit l'inégalité

$$\int_{\{u<v\}} T \wedge (dd^c v)^p \leq \int_{\{u\leq v\}} T \wedge (dd^c u)^p$$

Pour achever la preuve, il suffit de remplaçer u par $u+\eta$ et d'utiliser le fait que $\{u+\eta<v\} \uparrow \{u<v\}$ si $\eta \downarrow 0$ et que $\{u+\eta \leq v\} \uparrow \{u<v\}$ si $\eta \downarrow 0$. $\square$

Remarque. Ce théorème reste vrai si on suppose que u et v sont dans $\mathrm{psh}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega \setminus K)$ avec $K = \{v=-\infty\} \subset \{u=-\infty\} \subset\subset \Omega$. En effet : On suppose d'abord que u et v sont continues sur $\Omega \setminus \{v=-\infty\}$. Soient $u_s = \max(u,-s)$; $v_s = \max(v,-s)$, alors pour $s \gg$, $u_s = u$, $v_s = v$ au voisinage de $\partial\Omega$. D'après 2.6, on a

$$\int_{\{u_s<v_s\}} T \wedge (dd^c v_s)^p \leq \int_{\{u_s<v_s\}} T \wedge (dd^c u_s)^p$$

Comme $\{u_s<v_s\} = \{u<v\} \setminus \{v \leq -s\} \uparrow \{u<v\} \setminus K$, on a

$$\int_{\{u<v\}\setminus K} T \wedge (dd^c v)^p \leq \lim_{s\to+\infty} \int_{\{u_s<v_s\}} T \wedge (dd^c v_s)^p$$

D'autre part, l'ensemble $\{u_s<v_s\} \subset F_s = \{u \leq v\} \setminus \{v<-s\}$ est un fermé de Ω et vu que $F_s \uparrow \{u \leq v\} \setminus K$, on obtient

$$\lim_{s\to+\infty} \int_{\{u_s<v_s\}} T \wedge (dd^c u_s)^p \leq \lim_{s\to+\infty} \int_{F_s} T \wedge (dd^c u_s)^p \leq \int_{\{u\leq v\}\setminus K} T \wedge (dd^c u)^p$$

Le résultat se déduit aisément, en remplaçant u par $u+\eta$ et en faisant tendre η vers 0. Le cas général se traite par régularisation des fonctions u et v. $\square$

Corollaire 2.7 (*principe de domination*) *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, u et $v \in \mathrm{psh}(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Supposons que :*
i) $\lim_{\xi\to\partial\Omega} \inf(u(\xi)-v(\xi)) \geq 0$ *;*
ii) $T \wedge (dd^c u)^p \leq T \wedge (dd^c v)^p$ *;*
Alors $u \geq v$ en dehors d'un ensemble $\|T\|$−négligeable.

Démonstration. Sans perte de génératité, on peut supposer que $\Omega = \{\rho < 0\}$ où ρ est une fonction C^∞, strictement psh qui définie Ω. Supposons que $\|T\|\big(\{u<v\}\big) > 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|T\|\big(\{u<v+\varepsilon\rho\}\big) > 0$. D'après 2.6, on a :

$$\int_{\{u<v+\varepsilon\rho\}} T \wedge (dd^c v+\varepsilon\rho)^p \leq \int_{\{u<v+\varepsilon\rho\}} T \wedge (dd^c u)^p \leq \int_{\{u<v+\varepsilon\rho\}} T \wedge (dd^c v)^p$$

D'où :

$$\varepsilon^p \int_{\{u<v+\varepsilon\rho\}} T \wedge (dd^c \rho)^p + \int_{\{u<v+\varepsilon\rho\}} T \wedge (dd^c v)^p \leq \int_{\{u<v+\varepsilon\rho\}} T \wedge (dd^c v)^p$$

cela se contredit avec le fait que $\|T\|\big(\{u < v + \varepsilon\rho\}\big) > 0$. $\square$

Application. Dans plusieurs problèmes on est amené a contrôler la masse d'un produit de Monge-Ampere mixte ($\int_\Omega T \wedge (dd^c u)^j \wedge (dd^c v)^{p-j}$) par celles des produits homogènes ($\int_\Omega T \wedge (dd^c u)^p$ et $\int_\Omega T \wedge (dd^c v)^p$), en appliquant le théorème de comparaison on a réussit à faire ça dans certains cas (Proposition 2.9).

Soit φ une fonction continue, psh sur Ω et semi-exhaustive sur SuppT i.e il existe un nombre réel R tel que $B(R) \cap \mathrm{SuppT} \subset\subset \Omega$, où $B(R) = \{\varphi < R\}$. Pour $r \in]-\infty, R[$, on note :

$$B(r) = \{z \in \Omega; \varphi(z) < r\},\ S(r) = \{z \in \Omega; \varphi(z) = r\},\ \varphi_r = \max(\varphi, r)$$

L'application $r \mapsto T \wedge (dd^c\varphi_r)^p$, à valeurs dans l'espace des mesures sur Ω muni de la topologie faible, est continue sur $]-\infty, R[$. Comme la mesure $T \wedge (dd^c\varphi_r)^p$ est nulle sur $B(r)$ et coïncide avec $T \wedge (dd^c\varphi)^p$ sur $\Omega \setminus \overline{B}(r)$, on peut associer à T et φ une collection de mesure positives $\mu_{T,\varphi,r}$ portées par les ensembles $S(r)$ de la façon suivante :

$$\mu_{T,\varphi,r} = T \wedge (dd^c\varphi_r)^p - 1\!\!1_{\Omega\setminus B(r)} T \wedge (dd^c\varphi)^p$$

Si φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et r une valeure régulière de φ, $\mu_{T,\varphi,r} = T \wedge (dd^c\varphi)^{p-1} \wedge d^c\varphi_{|S(r)}$. Pour $s > r$, on a : $\int_{B(s)} \Big(T \wedge (dd^c\varphi_r)^p - T \wedge (dd^c\varphi)^p\Big) = 0$. Donc la masse totale $\mu_{T,\varphi,r}(S(r)) = \mu_{T,\varphi,r}(B(s))$ coïncide avec la différence entre les masses de $T \wedge (dd^c\varphi)^p$ et $1\!\!1_{\Omega\setminus B(r)} T \wedge (dd^c\varphi)^p$ sur $B(s)$ i.e :

$$\mu_{T,\varphi,r}(S(r)) = \mu_{T,\varphi,r}(B(s)) = \int_{B(r)} T \wedge (dd^c\varphi)^p$$

On remarque que si $r \to r_0^-$ ($r_0 < R$), alors $1\!\!1_{\Omega\setminus B(r)}$ converge simplement vers $1\!\!1_{\Omega\setminus B(r_0)}$. Ceci veut dire que l'application $r \mapsto \mu_{T,\varphi,r}$ est continue faiblement à gauche.

Pour montrer la Proposition 2.9 on a besoin du lemme suivant

Lemme 2.8 *Soit ψ une fonction psh, négative et continue sur Ω, alors pour tout $s \geq 1$, $(-\psi)^s$ est $\mu_{T,\varphi,r}-$intégrable et on a :*

$$\begin{aligned}\mu_{T,\varphi,r}((-\psi)^s) &= \int_{B(r)} (-\psi)^s T \wedge (dd^c\varphi)^p \\ &+ \int_{B(r)} (r-\varphi) T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}\end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Preuve. On procède comme Demailly (cf.[De]). On suppose d'abord que φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors comme les deux membres de (2.8.1) sont continus à gauche, il suffit d'appliquer la formule de Stokes en utilisant l'égalité $\mu_{T,\varphi,r} = T \wedge (dd^c\varphi)^{p-1} \wedge d^c\varphi_{|S(r)}$ pour r une valeure régulière de φ. Si φ est continue et ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on prend $\varphi_k \downarrow \varphi$ psh, de classe C^∞. Pour φ_k, on a :

$$\mu_{T,\varphi_k,r}((-\psi)^s) - \int_{\varphi_k<r} (-\psi)^s T \wedge (dd^c\varphi_k)^p = \int_{\varphi_k<r} (r-\varphi_k) T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi_k)^{p-1}$$

On vérifie aisément que la suite $T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi_k)^{p-1}$ converge faiblement vers $T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}$, et que $1\!\!1_{B(r)}(r-\varphi)$ est une fonction continue à support compact. Il en résulte que l'intégrale $\int_{\varphi_k<r} (r-\varphi_k) T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi_k)^{p-1}$ converge vers $\int_{B(r)} (r-\varphi) T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}$. De plus, d'après la définition de $\mu_{T,\varphi_k,r}$, on a :

$$\mu_{T,\varphi_k,r}((-\psi)^s) - \int_{\varphi_k<r} (-\psi)^s T \wedge (dd^c\varphi_k)^p = \int_\Omega (-\psi)^s \Big(T \wedge (dd^c\varphi_{k,r})^p - T \wedge (dd^c\varphi_k)^p \Big)$$

où $\varphi_{k,r} = \max(\varphi_k, r)$. Comme $(T \wedge (dd^c\varphi_{k,r})^p - T \wedge (dd^c\varphi_k)^p)$ est à support dans le compact $\overline{B}(r)$, il s'ensuit que l'intégrale

$$\int_\Omega (-\psi)^s \big(T \wedge (dd^c\varphi_{k,r})^p - T \wedge (dd^c\varphi_k)^p \big)$$

converge vers

$$\int_\Omega (-\psi)^s \big(T \wedge (dd^c\varphi_r)^p - T \wedge (dd^c\varphi)^p \big) = \mu_{T,\varphi,r}((-\psi)^s) - \int_{B(r)} (-\psi)^s T \wedge (dd^c\varphi)^p.$$

Supposons maintenant que φ et ψ sont continues et choisissons $\psi_k \downarrow \psi$ psh, de classe $\mathcal{C}^\infty$, d'après ce qui précède, on a :

$$\mu_{T,\varphi,r}((-\psi_k)^s) - \int_{B(r)} (-\psi_k)^s T \wedge (dd^c\varphi)^p = \int_{B(r)} (r-\varphi) T \wedge dd^c(-\psi_k)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}$$

Le terme à gauche coïncide avec $\int_\Omega (-\psi_k)^s (T \wedge (dd^c\varphi_r)^p - T \wedge (dd^c\varphi)^p)$; cette intégrale converge vers $\int_\Omega (-\psi)^s (T \wedge (dd^c\varphi_r)^p - T \wedge (dd^c\varphi)^p)$ par application du théorème de la convergence monotone. D'autre part, puisque la fonction $1\!\!1_{B(r)}(r-\varphi)$ est continue à support compact et la suite $T \wedge dd^c(-\psi_k)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}$ converge faiblement vers $T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}$, on en déduit que l'intégrale $\int_{B(r)} (r-\varphi) T \wedge dd^c(-\psi_k)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}$ converge vers l'intégrale $\int_{B(r)} (r-\varphi) T \wedge dd^c(-\psi)^s \wedge (dd^c\varphi)^{p-1}$. $\square$

Proposition 2.9 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, T un courant positif fermé de dimension $p \geq 1$, u et $v \in \mathrm{psh}(\Omega)$, continues sur Ω. On suppose que : $\lim\limits_{z\to\partial\Omega} u(z) = \lim\limits_{z\to\partial\Omega} v(z) = 0$ et que $\int_\Omega T \wedge \big((dd^c u)^p + (dd^c v)^p\big) < \infty$;*
Alors pour tout $s \geq 1, 0 \leq j \leq p$ on a :

$$\int_\Omega (-u)^s T \wedge (dd^c u)^j \wedge (dd^c v)^{p-j} \leq D_{j,s}\Big(\int_\Omega (-u)^s T \wedge (dd^c u)^p\Big)^{\frac{s+j}{s+p}} \Big(\int_\Omega (-v)^s T \wedge (dd^c v)^p\Big)^{\frac{p-j}{s+p}}$$

Avec $D_{j,s} = s^{\frac{(s+j)(p-j)}{s-1}}$ si $s > 1$ et $D_{j,1} = exp\{(1+j)(p-j)\}$.

Démonstration. On reprend la démonstration de [Ce-Pe], on montre d'abord que : $\displaystyle\int_\Omega T \wedge (dd^c(u+v))^p < \infty$. En effet : soient $\mu = T \wedge (dd^c(u+v))^p$, avec $1 < \alpha < 2$ tels que $\mu\{u = \alpha v\} = 0$. D'après le théorème 2.6, on a :

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= \int_\Omega T \wedge (dd^c(u+v))^p \\
&= \int_{\{\frac{1+\alpha}{\alpha}u < u+v\}} T \wedge (dd^c(u+v))^p + \int_{\{(1+\alpha)v < u+v\}} T \wedge (dd^c(u+v))^p \\
&\leq (\tfrac{1+\alpha}{\alpha})^p \int_\Omega T \wedge (dd^c u)^p + (1+\alpha)^p \int_\Omega T \wedge (dd^c v)^p \\
&\leq 3^p \int_\Omega T \wedge \big((dd^c u)^p + (dd^c v)^p\big) < +\infty
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme précédent au courant $R = T \wedge (dd^c v)^j$, on a :

$$\begin{aligned}
\mu_{R,u,-\varepsilon}((-v)^p) &= \int_{B(-\varepsilon)} (-v)^s R \wedge (dd^c u)^{p-j} \\
&+ \int_{B(-\varepsilon)} (-\varepsilon - u) R \wedge (dd^c(-v)^s) \wedge (dd^c u)^{p-j-1}
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
0 \leq \mu_{R,u,-\varepsilon}((-v)^s) &\leq \sup_{\{u=-\varepsilon\}}\big\{(-v(z))^s\big\} \int_\Omega R \wedge (dd^c u)^{p-j} \\
&= \sup_{\{u=-\varepsilon\}}\big\{(-v(z))^s\big\} \int_\Omega T \wedge (dd^c u)^{p-j} \wedge (dd^c v)^j \\
&\leq \sup_{\{u=-\varepsilon\}}\big\{(-v(z))^s\big\} \int_\Omega T \wedge (dd^c(u+v))^p
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse sur u et v et le lemme, on en déduit alors,

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_{R,u,-\varepsilon}((-v)^p) &= \int_\Omega (-v)^s T \wedge (dd^c v)^j \wedge (dd^c u)^{p-j} \\
&+ \int_\Omega (-u) T \wedge (dd^c(-v)^s) \wedge (dd^c u)^{p-j-1} \wedge (dd^c v)^j
\end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (-v)^s T\wedge (dd^cv)^j\wedge (dd^cu)^{p-j}\\
= \ & \int_\Omega udd^c(-v)^s\wedge T\wedge (dd^cv)^j\wedge (dd^cu)^{p-j-1}\\
= \ & s(s-1)\int_\Omega u(-v)^{s-2}T\wedge (dd^cv)^j\wedge (dd^cu)^{p-j-1}\wedge dv\wedge d^cv\\
+ \ & s\int_\Omega (-u)(-v)^{s-1}T\wedge (dd^cv)^{j+1}\wedge (dd^cu)^{p-j-1}\\
\leq \ & s\int_\Omega (-u)(-v)^{s-1}T\wedge (dd^cv)^{j+1}\wedge (dd^cu)^{p-j-1}\\
\leq \ & \Big(s\int_\Omega (-u)^sT\wedge (dd^cv)^{j+1}\wedge (dd^cu)^{p-j-1}\Big)^{\frac{1}{s}}\\
& \Big(s\int_\Omega (-v)^sT\wedge (dd^cv)^{j+1}\wedge (dd^cu)^{p-j-1}\Big)^{\frac{s-1}{s}}
\end{aligned}$$

En prenant le logarithme, on obtient :
$x_j\leq \frac{s-1}{s}x_{j+1}+\frac{1}{s}y_{p-j-1}+\log s$; $\quad y_j\leq \frac{s-1}{s}y_{j+1}+\frac{1}{s}x_{p-j-1}+\log s$. où :

$$\begin{aligned}
x_j &= \log\int_\Omega (-u)^sT\wedge (dd^cu)^j\wedge (dd^cv)^{p-j}\\
y_j &= \log\int_\Omega (-v)^sT\wedge (dd^cv)^j\wedge (dd^cu)^{p-j}
\end{aligned}$$

Le reste de la démonstration est réduit à un problème de résolution d'un système linéaire (cf.[Ce-Pe]). □

3 Convergence par rapport à C_T et operateur de monge-ampère

Dans cette partie nous introduisons la notion de la convergence par rapport à la capacité C_T. Comme application nous généralisons des résultats de [Be-Ta] et de [Xi] sur l'opérateur de Monge-Ampère.

Définition 3.1 *Soient T un courant positif fermé de dimension $p\geq 1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ et $E\subset\Omega$. On dit que u_j converge vers u par rapport à C_T sur E si pour tout $\delta>0$, on a :*

$$\lim_{j\to+\infty} C_T\Big(\big\{z\in E;\ \ |u_j(z)-u(z)|>\delta\big\},\Omega\Big)=0$$

Théorème 3.2
Soient $(u_j)_j$ une suite de fonctions psh localement uniformément bornées et $u\in \mathrm{psh}(\Omega)\cap \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on a :
a) *Si u_j converge vers u par rapport à C_T sur chaque $E\subset\subset\Omega$, alors le courant $T\wedge(dd^cu_j)^p$ converge au sens des courants vers $T\wedge(dd^cu)^p$.*
b) *Supposons qu'il existe $E\subset\subset\Omega$ tel que $\forall j,\ u_j=u$ sur $\Omega\setminus E$ et que les suites*

$uT\wedge(dd^cu_j)^p$, $u_jT\wedge(dd^cu)^p$ et $u_jT\wedge(dd^cu_j)^p$ convergent au sens des courants vers $uT\wedge(dd^cu)^p$ alors u_j converge vers u par rapport à C_T sur E.

Remarques.

1) Si $T=1$ ou $T=dd^c|z|^2$, on retrouve un résultat de Xing (cf.[Xi]).

2) a) constitue encore une généralisation d'un résultat de [Be-Ta], dans le cas où la suite $(u_j)_j$ est décroissante vers u. En effet on montre dans ce cas (cf théorème2.4) que u_j converge vers u par rapport à la capacité C_T.

3) Dans b), si on suppose de plus que $u\geq u_j$ $\forall j$ (en particulier si $u_j\uparrow u$), on peut conclure sans utiliser la convergence faible des suites $uT\wedge(dd^cu_j)^p$ et $u_jT\wedge(dd^cu_j)^p$. Dans la démonstration de b), on peut en effet utiliser l'inégalité $dd^c(u-u_j)\leq dd^cu$ à la place de $dd^c(u_j-u)\leq dd^c(u+u_j)$.

Démonstration. On procède comme dans [Xi].
a). On raisonne par récurrence sur l'entier p. Le cas $p=1$ se déduit si on montre que u_jT converge faiblement vers uT.
Soit $\varphi\in\mathcal{D}_{p,p}(\Omega)$, supp$\varphi\subset\Omega_1\subset\subset\Omega$, alors :

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega(u_jT-uT)\wedge\varphi\Big| &\leq C\int_{\Omega_1}|u_j-u|T\wedge\beta^p\\
&= C\int_{\{|u_j-u|\leq\delta\}\cap\Omega_1}|u_j-u|T\wedge\beta^p\\
&+ C\int_{\{|u_j-u|>\delta\}\cap\Omega_1}|u_j-u|T\wedge\beta^p\\
&\leq C\delta\|T\|_{\Omega_1}+C\|u_j-u\|_\infty\int_{\{|u_j-u|>\delta\}\cap\Omega_1}T\wedge\beta^p\\
&\leq C\delta\|T\|_{\Omega_1}+MC_T\big\{z\in\Omega_1;\ \ |u_j(z)-u(z)|>\delta\big\}
\end{aligned}$$

Comme δ est arbitraire, M est indépendante de j et u_j converge vers u par rapport à la capacité C_T sur Ω_1, on a donc le résultat pour $p=1$. On suppose que $T\wedge(dd^cu_j)^s$ converge faiblement vers $T\wedge(dd^cu)^s(s<p)$, et montrons que $u_jT\wedge(dd^cu_j)^s$ converge faiblement vers $uT\wedge(dd^cu)^s$.
Pour tout $\varepsilon>0$, il existe d'après le théorème2.5 un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $C_T(\mathcal{O},\Omega)<\varepsilon$, $u=\phi+\psi$ où ϕ est continue sur Ω et $\psi=0$ sur $\Omega\setminus\mathcal{O}$.

$$\begin{aligned}
u_jT\wedge(dd^cu_j)^s-uT\wedge(dd^cu)^s &= (u_j-u)T\wedge(dd^cu_j)^s\\
&+ \psi\big(T\wedge(dd^cu_j)^s-T\wedge(dd^cu)^s\big)\\
&+ \phi\big(T\wedge(dd^cu_j)^s-T\wedge(dd^cu)^s\big)\\
&= (1)+(2)+(3)
\end{aligned}$$

(3) tend faiblement vers 0 par l'hypothèse de récurrence et le fait que ϕ est continue.

Pour (1), soit $\varphi \in \mathcal{D}_{p-s,p-s}(\Omega)$, supp$\varphi \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$, alors :

$$\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega (u_j-u)T\wedge(dd^cu_j)^s\wedge\varphi\Big| \ &\leq C\int_{\Omega_1}|u_j-u|T\wedge(dd^cu_j)^s\wedge(dd^c|z|^2)^{p-s}\\
&\leq C\int_{\Omega_1}|u_j-u|T\wedge\big(dd^c(u_j+|z|^2)\big)^p\\
&= C\int_{\{|u_j-u|>\delta\}\cap\Omega_1} u_j-u|T\wedge\big(dd^c(u_j+|z|^2)\big)^p\\
&+ C\int_{\{|u_j-u|\leq\delta\}\cap\Omega_1} u_j-u|T\wedge\big(dd^c(u_j+|z|^2)\big)^p\\
&\leq A\int_{\{|u_j-u|>\delta\}\cap\Omega_1} T\wedge\big(dd^c(u_j+|z|^2)\big)^p+\delta M\|T\|_{\Omega_1}\\
&\leq A_1C_T\big\{z\in\Omega_1; |u_j(z)-u(z)|>\delta\big\}+\delta M\|T\|_{\Omega_1}
\end{aligned}$$

Comme u_j est une suite localement uniformément bornée, A_1 et M ne dépendent pas de j, on a (1) converge faiblement vers 0.
On raisonne de même pour (2), on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1\cap\mathcal{O}}\psi T\wedge(dd^cu_j)^s\wedge\beta^{p-s} \quad &\leq \quad B\int_{\Omega_1\cap\mathcal{O}}T\wedge\big(dd^c(u_j+|z|^2)\big)^p\\
&\leq \quad B_1C_T(\mathcal{O},\Omega)\leq\varepsilon B_1
\end{aligned}$$

De même : $\displaystyle\int_{\Omega_1\cap\mathcal{O}}\psi T\wedge(dd^cu)^s\wedge\beta^{p-s}\leq B_2\varepsilon.$

b) Soient Ω' un ouvert tel que $E\subset\subset\Omega'\subset\subset\Omega$, $w\in \mathrm{psh}(\Omega,[0,1])$ et $\delta>0$. D'après Stokes et l'inégalité de Cauchy-Shawrz, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_j-u|>\delta\}}T\wedge(dd^cw)^p\\
\leq\quad &\tfrac{1}{\delta^2}\int_{\Omega'}(u_j-u)^2T\wedge(dd^cw)^p\\
=\quad &\tfrac{-1}{\delta^2}\int_{\Omega'}T\wedge d(u_j-u)^2\wedge d^cw\wedge(dd^cw)^{p-1}\\
\leq\quad &A_1\Big(\int_{\Omega'}T\wedge d(u_j-u)^2\wedge d^c(u_j-u)^2\wedge(dd^cw)^{p-1}\Big)^{\frac12}\\
\leq\quad &2A_1A_2\Big(\int_{\Omega'}T\wedge d(u_j-u)\wedge d^c(u_j-u)\wedge(dd^cw)^{p-1}\Big)^{\frac12}
\end{aligned}$$

où l'on a posé $A_1=\frac{1}{\delta^2}\int_{\Omega'}T\wedge dw\wedge d^cw\wedge(dd^cw)^{p-1}<\infty$ (cf.[C.L.N]) et $A_2=\|u_j-u\|_\infty<\infty$.
En appliquant encore $(p-1)-$fois la formule de Stokes, l'inégalité de Cauchy-

Schwarz et en utilisant l'inégalité $dd^c(u_j - u) \leq dd^c(u_j + u)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'} T \wedge d(u_j - u) \wedge d^c(u_j - u) \wedge (dd^c w)^{p-1} \\
= \quad & \int_{\Omega'} T \wedge d(u_j - u) \wedge d^c w \wedge dd^c(u_j - u) \wedge (dd^c w)^{p-2} \\
\leq \quad & B\Big(\int_{\Omega'} T \wedge d(u_j - u) \wedge d^c(u_j - u) \wedge dd^c(u_j + u) \wedge (dd^c w)^{p-2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq \quad & B_1\Big(\int_{\Omega'} T \wedge d(u_j - u) \wedge d^c(u_j - u) \wedge \big(dd^c(u_j + u)\big)^{p-1}\Big)^{\frac{1}{2^p}} \\
\leq \quad & B_2\Big(\int_{\Omega'} T \wedge d(u_j - u) \wedge d^c(u_j - u) \wedge \sum_{k=0}^{p-1} (dd^c u_j)^{p-k-1} \wedge (dd^c u)^k\Big)^{\frac{1}{2^p}} \\
= \quad & B_2\Big(\int_{\Omega'} (u_j - u) T \wedge (dd^c u_j - dd^c u) \wedge \sum_{k=0}^{p-1} (dd^c u_j)^{p-k-1} \wedge (dd^c u)^k\Big)^{\frac{1}{2^p}} \\
= \quad & B_2\Big(\int_{\Omega'} (u_j - u)\big(T \wedge (dd^c u_j)^p - T \wedge (dd^c u)^p\big)\Big)^{\frac{1}{2^p}}
\end{aligned}$$

où la constante B_2 est indépendante de j et de w. Comme $u = u_j$ sur $\Omega' \setminus E$ et $uT \wedge (dd^c u_j)^p$, $u_j T \wedge (dd^c u)^p$, $u_j T \wedge (dd^c u_j)^p$ converge vers la même limite $uT \wedge (dd^c u)^p$, on obtient : $\lim_{j \to +\infty} \int_{\Omega'} (u_j - u)(T \wedge (dd^c u_j)^p - T \wedge (dd^c u)^p) = 0$
Il en résulte que : $C_T(|u_j - u| > \delta, \Omega) = 0$ $\square$

Références

[Be-Ta] Bedford E. et Taylor B. A., A new capacity for Plurisubharmonic functions, *Acta Math*, 149 (1982), 1-40.

[Bm-El] H. Ben Messaoud et H. El Mir, Tranchage et prolongement des courants positifs fermés, *Math. Ann.* 307 (1997), 473-487.

[Ce] Cegrell. U, *Capacities in Complex Analysis*, Braunschwerg Wiesbaden Friedr. Vieweg et Sohn, 1988.

[Cee-Pe] Cegrell. U et Leif Person, An energy estimate for complex Monge-Ampère Operateur, *Annales Polimici Mathematici*, LXVII1 (1997) 95-102.

[C.L.N] Chern S.S., Levine H.I. et Nirenberg L. *Intrinsic norms on a complex manifold ; Global Analysis*, Papers in Honor of K.Kodaira, pp. 119-139, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1969.

[De] Demailly J.P., *Monge-Ampère operator, Lelong numbers and intersection theory, in complex Analysis and Geometry*, (V. Ancona and A Silva, eds.), pp.15-193. Univ. Ser. Math., Plenum Press, New York, 1993.

[Xi] Xing Y., *Continuity of the complex Monge-Ampère*, Proc. Amer.Math. Soc. 124, 457-467 , (1996).

Dabbek Khalifa
Département de Math
Faculé de sciences de Gabès
6071 Gabès Tunisie
khalifa.dabbek@fsg.rnu.tn

Elkhadhra Fredj
Département de Math
Faculé de sciences Monastir
5000 Monastir Tunisie
fredj.elkhadhra@fsm.rnu.tn