INÉGALITÉ DE MARKOV EN PLUSIEURS VARIABLES

WIESŁAW PLEŚNIAK

Reçu le 16 mai 2005 ; Révisé le 13 mars 2006 ; Accepté le 26 avril 2006

L'inégalité de Markov joue un rôle important en théorie constructive de fonctions. Dans les deux dernières décennies, on a développé sa théorie multidimensionnelle. Le but de cet article est de présenter le récent progrès de cette belle théorie.

1. Inégalité de Markov

1.1. Introduction. En 1889, Andrei Andreievitch Markov a répondu à une question posée deux ans plus tôt par Mendeleev en montrant que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[x]$, on a

$$|p'(x)| \leq (\deg p)^2 \|p\|_{[-1,1]} \quad \text{pour } x \in [-1,1], \tag{1.1}$$

où $\|p\|_I = \sup |p|(I)$. Ce résultat est optimal puisque, pour les *polynômes de Tchebyschev*

$$T_k(x) = \cos k \arccos x \quad (x \in [-1,1]),\ k = 1,2,\ldots, \tag{1.2}$$

on a $\|T_k\|_{[-1,1]} = 1$ et $|T_n'(\pm 1)| = n^2$. L'inégalité de Markov a été le point de départ d'une énorme littérature. En effet, elle a de nombreuses applications en analyse et en physique. Pour des détails on peut se reporter à l'ouvrage de Rahman et Schmeisser ([44]).

La théorie correspondante en plusieurs variables est relativement nouvelle : avant 1980, toutes les extensions connues de l'inégalité de Markov, dans la pratique, concernaient uniquement des ensembles compacts, convexes et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ (*voir*, e.g., Baouendi-Goulaouic [2]). Le principal obstacle à l'étude des cas plus généraux provenait de l'existence, dans $\mathbb{R}^n$, d'ensembles à pointes n'admettant aucune extension multidimensionnelle de l'inégalité de Markov. Cette remarque est due à Zerner ([55]).

Exemple 1.1. On pose $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq \exp(-1/x),\ 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$ et $P_k(x,y) = y(1-x)^k$ pour $k = 1,2,\ldots$. On a donc $\deg P_k = k+1$, $\|\partial P_k/\partial y\|_E = 1$, tandis

Hindawi Publishing Corporation
International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences
Volume 2006, Article ID 24549, Pages 1–12
DOI 10.1155/IJMMS/2006/24549

que $\|P_k\|_E < \exp(-\sqrt{k})$ pour $k = 1, 2, \ldots$. Par conséquent, il n'existe pas de constantes $M > 0$ et $r > 0$ telles qu'on ait, pour tout k,

$$||\partial P_k/\partial y||_E \leq M(k+1)^r ||P_k||_E. \tag{1.3}$$

Il est alors naturel de chercher les parties de $\mathbb{R}^n$ pour lequelles il est possible d'établir des majorations de l'exemple 1.1. On est ainsi ramené à la définition suivante.

Définition 1.2. On dira qu'une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ *admet (ou presérve) l'inégalité de Markov*, ou bien qu'elle est *markovienne*, s'il existe des constantes $M > 0$ et $r > 0$ telles que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, on ait

$$\|\operatorname{grad} P\|_E \leq M(\deg P)^r \|P\|_E. \tag{M}$$

Une théorie satisfaisante de l'inégalité de Markov en plusieurs variables, abordant en particulier le cas d'ensembles à pointes, a été développée dans les dernières deux décennies par Pawłucki, Pleśniak, Goetgheluck, Baran, Białas-Cież, Jonsson, Bos, Levenberg, Milman, Taylor, Goncharov, Totik et autres. Donnons ici un exemple d'un compact markovien de $\mathbb{R}^n$ à pointes, dû à Goetgheluck ([24]).

Théorème 1.3. *Soit, pour $k \geq 1$,*

$$E_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^k,\ 0 \leq x \leq 1\}. \tag{1.4}$$

Alors l'ensemble E_k est markovien, pour l'exposant $r = 2k$. De plus, la valeur $2k$ est optimale.

L'ensemble E_k, défini ci-dessus, est un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbb{R}^2$. On peut alors se demander si toute partie semi-analytique (plus général, sous-analytique) de $\mathbb{R}^n$ admet une inégalité de Markov. La réponse à cette question est fournie par la théorie de Pawłucki-Pleśniak présentée ci-dessous, dont le point de départ était l'exemple de Goetgheluck.

1.2. Ensembles semi-analytiques, sous-analytiques et à pointes polynomiales

Définition 1.4. Une partie E de $\mathbb{R}^n$ est dite *semi-analytique* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut trouver un voisinage U de x et un nombre fini de fonctions réel analytiques f_{ij} et g_{ij} définies dans U, telles que

$$E \cap U = \bigcup_i \bigcap_j \{f_{ij} > 0,\ g_{ij} = 0\}. \tag{1.5}$$

La projection d'un semi-analytique n'est pas nécessairement semi-analytique (Łojasiewicz ([34])). On appelle classe d'ensembles sous-analytiques, la famille obtenue en ajoutant à la famille des semi-analytiques, toutes les projections d'ensembles semi-analytiques. Plus précisement,

Définition 1.5. Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est dit *sous-analytique* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage U de x tel que $E \cap U$ soit la projection d'un semi-analytique borné A de $\mathbb{R}^{n+m}$, où m est un entier non négatif.

L'ensemble E_k de Goetgheluck est, de façon évidente, semi-analytique, et à fortiori sous-analytique, tandis que l'ensemble de Zerner est trop plat à l'origine pour être semi-analytique. Il se trouve que les sous-analytiques n'admettent que des pointes polynomiales.

Définition 1.6. On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est *à pointes polynomiales* (en bref, *UPC* = *uniformly polynomially cuspidal*) s'il existe des constantes positives M et m, un entier positif d et une application $h : \overline{E} \times [0,1] \to \overline{E}$, tels que, pour tout $x \in \overline{E}$, on ait $h(x,1) = x$, la fonction $h(x,\cdot)$ soit un polynôme de degré $\leq d$ et

$$\operatorname{dist}\left(h(x,t), \mathbb{R}^n \setminus E\right) \geq M(1-t)^m \quad \text{pour } (x,t) \in \overline{E} \times [0,1]. \tag{1.6}$$

En utilisant le *théorème de rectilinéarisation* de Hironaka (*voir* [17]) et la *séparation régulière* de Łojasiewicz ([34]), on prouve (Pawłucki-Pleśniak [37])

Théorème 1.7. *Tout ensemble sous-analytique borné de $\mathbb{R}^n$, à intérieur dense dans E, est UPC.*

La famille des ensembles UPC est visiblement plus large que celle des sous-analytiques. Un exemple simple d'ensemble UPC qui n'est pas sous-analytique est fourni par $[0,1] \times [-1,1] \setminus E$, où E est l'ensemble de Zerner.

Les ensembles UPC admettent une *fonction de Green pluricomplexe* continue de façon hölderienne. Soit E une partie compacte de $\mathbb{C}^n$, on pose, pour tout $z \in \mathbb{C}^n$,

$$V_E(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n),\ u|_E \leq 0\}, \tag{1.7}$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \{u \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n) : \sup_{z\in\mathbb{C}^n}[u(z) - \log(1+|z|)] < \infty\}$ est la *classe de Lelong* des fonctions plurisous-harmoniques à croissance logarithmique. D'après la théorie du pluripotentiel due à Bedford-Taylor (*voir* [31]), si E est *non pluripolaire* (c'est-à-dire, si pour toute fonction $u \in \mathrm{PSH}(\mathbb{C}^n)$, l'inclusion $E \subset \{u(z) = -\infty\}$ implique $u(z) \equiv -\infty$), alors la régularisée supérieure

$$V_E^*(z) = \limsup_{w\to z} V_E(w) \tag{1.8}$$

de V_E est un équivalent multidimensionnel de la *fonction de Green classique* pour $\mathbb{C} \setminus \widehat{E}$, où $\widehat{E}$ désigne l'enveloppe polynomiale de E.

L'importance de la classe UPC se traduit par le résultat suivant dû à Pawłucki-Pleśniak [37].

Théorème 1.8. *Soit E une partie UPC compacte de $\mathbb{R}^n$, à paramètre m. On a*

$$V_E(z) \leq M\big(\operatorname{dist}(z,E)\big)^s, \tag{HCP}$$

où $s = 1/2[m]$ et $[m] := k$ pour $k-1 < m \leq k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si V_E est continue de façon HCP (abrév. de *Hölder Continuity Property*), en appliquant la formule intégrale de Cauchy, on montre que E est markovien. Ceci entraîne (Pawłucki-Pleśniak [37])

Corollaire 1.9. *Toute partie compacte E de $\mathbb{R}^n$ de type UPC, en particulier tout sous-analytique compact $E \subset \mathbb{R}^n$, et d'intérieur dense dans E, est markovien.*

Le résultat ci-dessus reste vrai dans le cadre, beaucoup plus général, des *structures o-minimales polynomialement bornées*. En particulier, si on considère une classe de fonctions quasi-analytiques de Carleman liée à une suite strictement logarithmiquement convexe, les *ensembles définissables* dans la structure de Rolin-Speissegger-Wilkie engendrée par cette classe sont UPC (*voir* Pierzchała [39]).

1.3. Dynamique complexe. La géométrie sous-analytique n'est pas seule à fournir des exemples d'ensembles markoviens. On peut en trouver plusieurs en *dynamique complexe*.

Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application polynomiale, on définit l'*ensemble de Julia rempli*, associé à P, par

$$J_P := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left\{ P^j(z) \right\}_{j \in \mathbb{N}_0} \text{ est borné} \right\}. \tag{1.9}$$

Si l'*exposant de Łojasiewicz* de P (à l'infini)

$$ł(P) := \sup \left\{ \delta : \liminf_{|z| \to \infty} \frac{|P(z)|}{|z|^\delta} > 0 \right\} \tag{1.10}$$

est strictement plus grand que 1, alors J_P est HCP, d'où markovien (*voir* Kosek [32, 33]).

Les ensembles markoviens décrits ci-dessus sont tous de type UPC, et donc HCP. Cependant, il y a des ensembles HCP qui ne sont pas UPC. Les premiers exemples de tels ensembles (de type Cantor) ont été construits par Jonsson ([29]). Il s'est avéré difficile de déterminer si le Cantor triadique classique est markovien ou non. Une réponse affirmative à ce problème a été fournie par Białas et Volberg ([13]) qui ont montré que cet ensemble est même de type HCP. Il convient de noter qu'il existe également des ensembles de type Cantor qui ne sont pas markoviens et pour lequels la fonction classique de Green est continue (*voir* Pleśniak [40], Goetgheluck-Pleśniak [26], Totik [52]). Quant à savoir si la propriété de Markov de E entraîne la propriété HCP de E, ce problème reste toujours ouvert sauf pour des cas particuliers de $\mathbb{C}$ (*voir* Białas-Cież [14], Totik [52]). En général, on ne sait même pas si la propriété de Markov de E entraîne la continuité de la fonction de Green V_E ou la non-pluripolarité de E. Néanmoins, Białas-Cież ([15]) a montré que toute partie compacte de Markov de $\mathbb{C}$ est de capacité logarithmique positive, et par conséquent, qu'elle n'est pas polaire.

1.4. Relations avec les polynômes orthogonaux. On termine cette section par la mise en évidence des relations entre l'inégalité classique de Markov et les polynômes orthogonaux. Soit E une partie compacte de $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité, à support E, telle que, pour tout disque $\Delta(x,r)$ centré en $x \in E$ de rayon $0 < r \leq 1$, on ait

$\mu(\Delta(x,r)) \geq c_0 r^s$ avec des constantes $c_0 > 0$ et $s > 0$ ne dépendant pas de x et r. Soit $\{P_n : n = 0,1,2,\ldots\}$ une suite de polynômes orthogonaux associée à μ. On suppose que le degré de P_n est n. On sait que, pour tout n, les zéros $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ du polynôme P_n sont tous simples, réels et contenus dans le plus petit intervalle couvrant E. On a le résultat suivant dû à Jonsson (*voir* [30]).

Théorème 1.10. *Le compact E est markovien si et seulement si l'on peut trouver des constantes $\gamma \geq 1$, $L > 0$ et $\beta > 0$ telles que*

(i) *il existe d, $0 < d \leq 1$, tel que, pour tout $x_0 \in E$ et tout $r > 0$, $r \leq 1$,*

$$\{x \in \mathbb{R} : dr^\gamma \leq |x - x_0| \leq r\} \cap E \neq \emptyset; \tag{1.11}$$

(ii) *si x_i et x_{i-1} sont des zéros consécutifs de P_n, avec $n \geq 2$, alors*

$$|\, x_i - x_{i-1} \,| \geq L/n^\beta. \tag{1.12}$$

2. Applications

Nous allons présenter quelques applications importantes de l'inégalité de Markov. Nous commençons par

2.1. Approximation polynomiale de fonctions $\mathscr{C}^\infty$.

Rappelons le théorème classique de Bernstein [12].

Théorème 2.1. *Une fonction $f : I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $s > 0$, on a*

$$\lim_{k\to\infty} k^s \operatorname{dist}_I (f,\mathscr{P}_k) = 0. \tag{2.1}$$

La démonstration classique du théorème de Bernstein ne s'applique pas, en général, au cas d'un compact quelconque de $\mathbb{R}^n$. En effet, contrairement au cas d'un intervalle de $\mathbb{R}$, il existe un compact E de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans *int* E, tels que f et toutes ses dérivées partielles se prolongent continûment à E et, qu'en même temps, f n'admette aucun prolongement $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de E. En voici un exemple.

Exemple 2.2. Soit $E = E_1 \cup E_2 \subset \mathbb{R}^2$, où $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, g(x) \leq y \leq 1\}$ avec $g(x) = \exp(-1/x)$ si $0 < x \leq 1$, $g(0) = 0$, et $E_2 = [0,1] \times [-1,0]$. Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x) & \text{si } (x,y) \in E_1; \\ 0 & \text{si } (x,y) \in E_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors f n'admet aucun prolongement $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage ouvert de E.

Le problème de caractérisation de type Bernstein des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ en plusieurs variables a été résolu par Pawłucki-Pleśniak ([37]). Dans ce qui suit, on dira que E est *déterminant* pour les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ si, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f = 0$ sur E entraîne $D^\alpha f = 0$ sur E pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. On montre (Pleśniak [41]) que tout compact markovien de $\mathbb{R}^n$ est déterminant. Le résultat de Pawłucki-Pleśniak (*voir aussi* Pleśniak [41]) s'écrit comme suit.

Théorème 2.3. *Si un compact E de $\mathbb{R}^n$ est déterminant pour les fonctions $\mathscr{C}^\infty$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est markovien ;*

(ii) (théorème de type Bernstein) *pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$, si la suite $\{\mathrm{dist}_E(f, \mathscr{P}_k)\}$ est à décroissance rapide, c'est pour tout $s > 0$, $k^s \mathrm{dist}_E(f, \mathscr{P}_k) \to 0$ si $k \to \infty$, alors f s'étend en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Ici $\mathscr{P}_k$ désigne l'espace des polynômes de degré $\leq k$ et $\mathrm{dist}_E(f, \mathscr{P}_k) := \inf\{\|f - p\|_E : p \in \mathscr{P}_k\}$.

L'ensemble E de l'exemple 2.2 est markovien puisqu'il est UPC. Compte tenu du théorème 2.3, la suite $\{\mathrm{dist}_E(f, \mathscr{P}_k)\}$ n'est pas à décroissance rapide lorsque f est la fonction de cet exemple.

2.2. Applications en analyse différentielle. L'inégalité de Markov permet de construire de façon relativement simple un opérateur linéaire continu d'extension pour les jets de Whitney de classe C^∞ (*voir* Whitney [53]), définis sur un compact markovien de $\mathbb{R}^n$. Le problème d'existence d'un tel opérateur a une longue histoire. Les premiers résultats sont dûs à Mityagin [35] (cas d'un intervalle de $\mathbb{R}$) et à Seeley [48] (cas d'un demi-espace de $\mathbb{R}^n$). Stein [50] a montré qu'un tel opérateur existe si E est l'adhérence d'un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est localement de classe $Lip 1$. Bierstone [16] a étendu ce résultat au cas où le bord de E est $Lip\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 1$. Dans [16], Bierstone a également montré qu'un tel opérateur existe quand E est un sous-analytique fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\mathrm{int}\, E} \supset E$. Sa méthode a été essentiellement basée sur le célèbre *théorème de désingularisation* de Hironaka. Une autre méthode, basée sur des résultats de Vogt et Wagner concernant des suites exactes des espaces nucléaires, a été appliquée par Tidten [51] pour montrer l'existence d'un opérateur d'extension pour des fermés de $\mathbb{R}^n$ admettant certaines pointes polynomiales. Tous les ensembles mentionnés ci-dessus sont UPC, d'où de Markov. Le théorème suivant de Pawłucki-Pleśniak [38] est une généralisation essentielle des résultats précédents. De plus, il est de caractère constructif.

Théorème 2.4. *Soit E un compact markovien de $\mathbb{R}^n$. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L_k f$ désigne un polynôme d'interpolation de Lagrange de f de degré k, ayant pour nœuds des points extrémaux de Fekete-Leja, et $(u_k;\ k \in \mathbb{N})$ désigne une famille appropriée de fonctions de troncature de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors la formule*

$$Lf = u_1 L_1 f + \sum_{k=1}^{\infty} u_k (L_{k+1} f - L_k f) \tag{2.3}$$

définit un opérateur linéaire continu étendant les jets de Whitney de classe C^∞ sur E en fonctions de classe C^∞ sur l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier.

En utilisant des techniques similaires, Zeriahi [54] a montré que si E est un compact de $\mathbb{R}^n$ de Markov, alors $\mathscr{C}^\infty(E)$ (équipé de la topologie de Whitney) est isomorphe à l'espace

$\mathscr{S}$ des suites de réels positifs à décroissance rapide, ce qui est une généralisation non triviale du résultat de Mityagin [35] mentionné ci-dessus.

Le théorème de Pawłucki-Pleśniak admet un complément (*voir* Pleśniak [41]) : la propriété de Markov de E est équivalente à l'existence d'un opérateur d'extension linéaire continu par rapport à la topologie de Jackson de l'espace $\mathscr{C}^\infty(E)$. Cette équivalence n'est plus valable lorsque l'espace $\mathscr{C}^\infty(E)$ est muni de la topologie de Whitney. En effet, Goncharov [27] a construit un compact non markovien de $\mathbb{R}$ admettant l'existence d'un opérateur d'extension linéaire continu (par rapport à la topologie de Whitney). Pour d'autres résultats concernant l'opérateur d'extension de Pawłucki-Pleśniak voir Altun-Goncharov ([1]).

Notons encore que pour qu'un opérateur d'extension linéaire continu existe, il faut quelques restrictions sur les pointes de E. En effet, Tidten ([51]) a montré que si E est le compact de l'exemple 1.1, alors il n'existe aucun opérateur d'extension (linéaire continu) de $\mathscr{C}^\infty(E)$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

2.3. Exposant de Markov. Soit E un compact de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mu(E) := \inf\{r > 0 : E \text{ satisfait à (M) avec exposant } r\} \tag{2.4}$$

et on l'appelle *exposant de Markov* de E.

La connaissance de la valeur exacte de $\mu(E)$ permet en particulier de minimiser la perte de régularité dans des problèmes liés à l'extension linéaire des classes de fonctions ultradifférentiables (*voir* Pleśniak [42], Beaugendre [11]). Si E est un compact connexe de $\mathbb{C}$ contenant au moins deux points différents, alors par Pommerenke [43], $1 \leq \mu(E) \leq 2$. Si E est un compact de $\mathbb{R}^n$ quelconque, en utilisant des propriétés extrémales des polynômes de Tchebyschev, on montre que $\mu(E) \geq 2$. Si E est un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non-vide, alors $\mu(E) = 2$. Rappellons encore l'exemple de Goetgheluck de $E_k \subset \mathbb{R}^2$, où $\mu(E) = 2k$. Si E est un compact UPC de $\mathbb{R}^n$ à paramètre $m \geq 1$, alors $\mu(E) \leq 2m$ (*voir* Baran [3]). Notons finalement que si E est l'ensemble de Zerner (*voir* exemple 1.1), alors $\mu(E) = \infty$. Il se trouve que l'exposant de Markov est un invariant de « bonnes » applications analytiques. On a (*voir* Baran-Pleśniak [7])

Théorème 2.5. *Soient E un compact de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant à (M) pour l'exposant r et f une application analytique d'un voisinage U de E dans $\mathbb{R}^n$, telle que $f(E)$ soit non pluripolaire (dans $\mathbb{C}^n$) et, pour tout $x \in E$, $\det d_x f \neq 0$. Alors $f(E)$ satisfait à (M) pour le même exposant r que celui de E.*

2.4. Inégalité de Markov sur les ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n$. Dans les années récentes, l'inégalité de Markov a été intensivement étudiée sur des sous-variétés algébriques de $\mathbb{R}^n$ (travaux de Fefferman-Narasimhan, Roytwarf-Yomdin, Bos-Levenberg-Milman-Taylor, Brudnyĭ, Baran-Pleśniak, Gendre, Kosek, Comte-Yomdin, Erdélyi-Kroó, Kroó-Szabados). Notons ici un résultat important de Sadullaev [46].

Théorème 2.6. *Un ensemble analytique A de $\mathbb{C}^n$ est algébrique si et seulement si la fonction de Green pluricomplexe V_E^* est localement bornée sur A pour tout compact non-pluripolaire E de A.*

Le critère de Sadullaev est crucial pour l'étude des inégalités de type Bernstein-Walsh, Markov ou de van der Corput-Schaake sur les ensembles algébriques (*voir* Bos-Levenberg-Taylor [21], Bos et al. [19, 20], Baran-Pleśniak [8–10]). L'inégalité tangentielle de Markov avec l'exposant égal à 1 caractérise la propriété d'un compact K de $\mathbb{R}^n$ d'être morceau d'une variété algébrique. Plus précisement, on a (*voir* Baran-Pleśniak [9])

Théorème 2.7. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ admettant une paramétrisation analytique $\phi : \mathbb{B}^m \to K$, où $\mathbb{B}^m$ est la boule unitée de $\mathbb{R}^m$ $(1 \le m \le n)$. Alors la dimension de Zariski de K est égale à m si et seulement si on peut trouver une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in K$ et tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$,*

$$\left| D_{T(t,v)} P(x) \right| \le C(\deg P) \|P\|_K, \tag{2.5}$$

où $t \in \phi^{-1}(x) \cap \mathbb{B}^m$, $v \in \mathbb{S}^{m-1}$ et $T(t,v) = D_v\phi(t)$ est la dérivée de ϕ en direction v.

Si K est une sous-variété compacte lisse de $\mathbb{R}^n$ de dimension m, $1 \le m \le n$, le théorème ci-dessus a été montré auparavant par Bos et al. [19].

Soient E un compact polynomialement convexe de $\mathbb{C}^m$ de type HCP, avec s pour exposant, et f une application analytique non-dégénerée définie sur un voisinage ouvert de E, à valeurs dans un sous-ensemble algébrique $\mathbb{M}$ de $\mathbb{C}^n$ de dimension k, $1 \le k \le n$. On a alors (Baran-Pleśniak [10])

Théorème 2.8. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ et tout $t \in E$,*

$$\left| D_{T(t,v)} Q\big(f(t)\big) \right| \le C_1 d^{1/s} \|Q\|_{f(E)}. \tag{2.6}$$

Corollaire 2.9. *Soit f une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ avec*

$$f'(t) = (1-t)^{s_1}(1+t)^{s_2} Q(t), \tag{2.7}$$

où Q est une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $Q(t) \neq 0$ sur $[-1,1]$. Soit $\alpha = \max(s_1, s_2)$. Alors il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ de degré d, on ait

$$\left| D_{T_x} P(x) \right| \le A d^{2+2\alpha} \|P\|_N, \quad \textit{pour } x \in N = f\big([-1,1]\big), \tag{2.8}$$

avec $D_{T_x}P(x) = D_{(Q(t)/\|Q(t)\|)}P(x)$, où $x = f(t)$.

Exemple 2.10. Soient m et l deux entiers positifs premiers entre eux, $m > l \ge 2$. Soit $f(t) = (((1+t)/2)^l, ((1+t)/2)^m)$. On a alors

$$N = f\big([-1,1]\big) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x,\ y \le 1,\ x^m = y^l\}. \tag{2.9}$$

En effet, comme $\alpha = l - 1$, le corollaire précédent donne l'inégalité

$$|D_{T_{(x,y)}} P(x,y)| \leq A d^{2l} \|P\|_N, \tag{2.10}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x,y]$ de degré d.

(*Voir* aussi Bos et al. [20], Gendre [23].)

Dans [19], on peut trouver un exemple d'une fonction analytique $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f([0,1])$ n'admette aucune inégalité de Markov tangentielle dont l'exposant est fini. Ainsi on pourrait penser qu'une telle inégalité n'a lieu que si $f([0,1])$ est morceau d'une variété algébrique. Mais, un contre-exemple a récemment été donné par Bos et al. ([18]).

Théorème 2.11. *Soit $T \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme quelconque. Pour tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on peut trouver une constante $C > 0$ telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[x,y]$, on ait*

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \frac{d}{dx} P(x, e^{T(x)}) \right| \leq C (\deg P)^4 \max_{x \in [a,b]} \left| P\left(x, e^{T(x)}\right) \right|, \tag{2.11}$$

l'exposant 4 *étant optimal.*

2.5. Remarques finales. La théorie présentée ici témoigne de la force ainsi que de la beauté de l'inégalité classique de Markov. C'est pourquoi je l'appelle « *une vénérable dame qui n'a pas perdu de son attrait.* »

Il est difficile de traiter toutes les ramifications possibles de l'inégalité de Markov en plusieurs variables. Pour cette raison, je me suis restreint à sa forme en norme uniforme. Pour les versions L^p voir des travaux de Bos-Milman ([22]), Goetgheluck ([25]) et Baran ([4, 5]).

Notons encore que l'inégalité de Markov a été également étudiée en dimension infinie ; nous renvoyons le lecteur aux travaux de Harris ([28]), Sarantopoulos ([47]), Muñoz-Sarantopoulos ([36]), Révész-Sarantopoulos ([45]), Skalyga ([49]) et Baran ([6]).

Bibliographie

[1] M. Altun and A. Goncharov, *A local version of the Pawłucki-Pleśniak extension operator*, Journal of Approximation Theory **132** (2005), no. 1, 34–41.

[2] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Approximation of analytic functions on compact sets and Bernstein's inequality*, Transactions of the American Mathematical Society **189** (1974), 251–261.

[3] M. Baran, *Markov inequality on sets with polynomial parametrization*, Annales Polonici Mathematici **60** (1994), no. 1, 69–79.

[4] ______, *New approach to Markov inequality in L^p norms*, Approximation Theory, Monogr. Textbooks Pure and Applied Mathematics, vol. 212, Marcel Dekker, New York, 1998, pp. 75–85, (in memory of A. K. Varma).

[5] ______, *Markov's Inequality in L^p norms (I)*, Jagiellonian University, Cracow, preprint, 2003.

[6] ______, *Polynomial Inequalities in Banach Spaces (I)*, Jagiellonian University, Cracow, preprint, 2002.

[7] M. Baran and W. Pleśniak, *Markov's exponent of compact sets in $\mathbb{C}^N$*, Proceedings of the American Mathematical Society **123** (1995), no. 9, 2785–2791.

[8] ______, *Bernstein and van der Corput-Schaake type inequalities on semialgebraic curves*, Studia Mathematica **125** (1997), no. 1, 83–96.

[9] ———, *Characterization of compact subsets of algebraic varieties in terms of Bernstein type inequalities*, Studia Mathematica **141** (2000), no. 3, 221–234.

[10] ———, *Polynomial inequalities on algebraic sets*, Studia Mathematica **141** (2000), no. 3, 209–219.

[11] P. Beaugendre, *Extensions de jets dans des intersections de classes non quasi-analytiques*, Annales Polonici Mathematici **76** (2001), no. 3, 213–243.

[12] S. N. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné*, Mémoires de l'Académie Royale de Belgique **4** (1912), no. 2, 1–103.

[13] L. Białas and A. Volberg, *Markov's property of the Cantor ternary set*, Studia Mathematica **104** (1993), no. 3, 259–268.

[14] L. Białas-Cież, *Equivalence of Markov's property and Hölder continuity of the Green function for Cantor-type sets*, East Journal on Approximations **1** (1995), no. 2, 249–253.

[15] ———, *Markov sets in $\mathbb{C}$ are not polar*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics **46** (1998), no. 1, 83–89.

[16] E. Bierstone, *Extension of Whitney fields from subanalytic sets*, Inventiones Mathematicae **46** (1978), no. 3, 277–300.

[17] E. Bierstone and P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications Mathématiques **67** (1988), 5–42.

[18] L. P. Bos, A. Brudnyi, N. Levenberg, and V. Totik, *Tangential Markov inequalities on transcendental curves*, Constructive Approximation **19** (2003), no. 3, 339–354.

[19] L. P. Bos, N. Levenberg, P. D. Milman, and B. A. Taylor, *Tangential Markov inequalities characterize algebraic submanifolds of $\mathbb{R}^n$*, Indiana University Mathematics Journal **44** (1995), no. 1, 115–138.

[20] ———, *Tangential Markov inequalities on real algebraic varieties*, Indiana University Mathematics Journal **47** (1998), no. 4, 1257–1272.

[21] L. P. Bos, N. Levenberg, and B. A. Taylor, *Characterization of smooth, compact algebraic curves in $\mathbb{R}^2$*, Topics in Complex Analysis (Warsaw, 1992) (P. Jakóbczak and W. Pleśniak, eds.), Banach Center Publ., vol. 31, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1995, pp. 125–134.

[22] L. P. Bos and P. D. Milman, *Sobolev-Gagliardo-Nirenberg and Markov type inequalities on subanalytic domains*, Geometric and Functional Analysis **5** (1995), no. 6, 853–923.

[23] L. Gendre, *Inégalité de Markov tangentielle locale sur les courbes algébriques de $\mathbb{R}^n$*, Université Paul Sabatier, Toulouse, prépublication, 1998.

[24] P. Goetgheluck, *Inégalité de Markov dans les ensembles effilés*, Journal of Approximation Theory **30** (1980), no. 2, 149–154.

[25] ———, *Polynomial inequalities on general subsets of $\mathbb{R}^N$*, Colloquium Mathematicum **57** (1989), no. 1, 127–136.

[26] P. Goetgheluck and W. Pleśniak, *Counter-examples to Markov and Bernstein inequalities*, Journal of Approximation Theory **69** (1992), no. 3, 318–325.

[27] A. Goncharov, *A compact set without Markov's property but with an extension operator for $\mathscr{C}^\infty$-functions*, Studia Mathematica **119** (1996), no. 1, 27–35.

[28] L. A. Harris, *A Bernstein-Markov theorem for normed spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **208** (1997), no. 2, 476–486.

[29] A. Jonsson, *Markov's inequality on compact sets*, Orthogonal Polynomials and Their Applications (Erice, 1990) (C. Brezinski, L. Gori, and A. Ronveaux, eds.), IMACS Ann. Comput. Appl. Math., vol. 9, Baltzer, Basel, 1991, pp. 309–313.

[30] ———, *Markov's inequality and zeros of orthogonal polynomials on fractal sets*, Journal of Approximation Theory **78** (1994), no. 1, 87–97.

[31] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 6, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.

[32] M. Kosek, *Hölder continuity property of filled-in Julia sets in* $\mathbb{C}^n$, Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), no. 7, 2029–2032.

[33] ______, *Hölder continuity property of composite Julia sets*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics **46** (1998), no. 4, 391–399.

[34] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette (1964).

[35] B. S. Mityagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Mathematical Surveys **16** (1961), no. 4, 59–128.

[36] G. A. Muñoz and Y. Sarantopoulos, *Bernstein and Markov-type inequalities for polynomials on real Banach spaces*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **133** (2002), no. 3, 515–530.

[37] W. Pawłucki and W. Pleśniak, *Markov's inequality and* $\mathscr{C}^\infty$*-functions on sets with polynomial cusps*, Mathematische Annalen **275** (1986), no. 3, 467–480.

[38] ______, *Extension of* $\mathscr{C}^\infty$*-functions from sets with polynomial cusps*, Studia Mathematica **88** (1988), no. 3, 279–287.

[39] R. Pierzchała, *UPC condition in polynomially bounded o-minimal structures*, Journal of Approximation Theory **132** (2005), no. 1, 25–33.

[40] W. Pleśniak, *A Cantor regular set which does not have Markov's property*, Annales Polonici Mathematici **51** (1990), 269–274.

[41] ______, *Markov's inequality and the existence of an extension operator for* $\mathscr{C}^\infty$*-functions*, Journal of Approximation Theory **61** (1990), no. 1, 106–117.

[42] ______, *Extension and polynomial approximation of ultradifferentiable functions in* $\mathbb{R}^n$, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège **63** (1994), no. 5, 393–402.

[43] Ch. Pommerenke, *On the derivative of a polynomial*, The Michigan Mathematical Journal **6** (1959), 373–375.

[44] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 26, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[45] S. G. Révész and Y. Sarantopoulos, *On Markov constants of homogeneous polynomials over real normed spaces*, East Journal on Approximations **9** (2003), no. 3, 277–304.

[46] A. Sadullaev, *An estimate for polynomials on analytic sets*, Mathematics of the USSR - Izvestiya **20** (1983), no. 3, 493–502.

[47] Y. Sarantopoulos, *Bounds on the derivatives of polynomials on Banach spaces*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **110** (1991), no. 2, 307–312.

[48] R. T. Seeley, *Extension of* $\mathscr{C}^\infty$ *functions defined in a half space*, Proceedings of the American Mathematical Society **15** (1964), 625–626.

[49] V. I. Skalyga, *Analogues of Markov's inequality in normed spaces*, Mathematical Notes **75** (2004), no. 5-6, 739–743.

[50] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series, no. 30, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[51] M. Tidten, *Fortsetzungen von* $\mathscr{C}^\infty$*-Funktionen, welche auf einer abgeschlossenen Menge in* $\mathbb{R}^n$ *definiert sind*, Manuscripta Mathematica **27** (1979), no. 3, 291–312.

[52] V. Totik, *Markoff constants for Cantor sets*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **60** (1995), no. 3-4, 715–734.

[53] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Transactions of the American Mathematical Society **36** (1934), no. 1, 63–89.

[54] A. Zeriahi, *Inegalités de Markov et développement en série de polynômes orthogonaux des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et $\mathscr{A}^\infty$*, Several Complex Variables (Stockholm, 1987/1988) (J. F. Fornaess, ed.), Math. Notes, vol. 38, Princeton University Press, New Jersey, 1993, pp. 683–701.

[55] M. Zerner, *Développement en séries de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique **268** (1969), 218–220.

Wiesław Pleśniak : Institut de mathématiques, Université Jagellonne de Cracovie, UL. Reymonta 4, 30-059 Kraków, Pologne
Courrier électronique : wieslaw.plesniak@im.uj.edu.pl