Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 2, n°2; Décembre/December 2006

www.jehps.net

Les leçons de calcul des probabilités de Joseph Bertrand (0)[1].

« Les lois du hasard » (1)

Bernard BRU[2]

Résumé

Nous présentons ici une étude des conceptions de Joseph Bertrand sur le hasard et les probabilités telles qu'elles transparaissent à travers son célèbre traité de Calcul des Probabilités.

Abstract

We present a study of how Joseph Bertrand conceived randomness and probabilities as it appears through his famous treatise on Calculus of Probability.

1. Introduction.

Dès que l'on aborde la question de l'enseignement et de la diffusion du calcul des probabilités en France ou en Europe avant la seconde guerre mondiale, on tombe inévitablement sur le *Calcul des probabilités* de Joseph Bertrand. Notre ami Michel Armatte, responsable de ce numéro, et les rédacteurs du *Jehps* ont donc à juste raison considéré qu'il y avait lieu d'en dire un mot dans un dossier sur l'enseignement du calcul des probabilités en France. D'autant que ce livre, hautement apprécié des maîtres de l'Ecole mathématique française de la Belle époque, Darboux, Poincaré ou Borel, et sans doute l'ouvrage « didactique » le plus commenté et le plus copié entre 1888 et 1940, a subi après la guerre un double discrédit, celui très général de presque tous les traités mathématiques français, dont le style trop littéraire ne correspondait plus aux rigueurs algébriques du temps, aggravé de celui de presque tous les traités statistiques préfisheriens, peu conformes à la méthode statistique ou aux méthodes statistiques qui se sont imposées depuis la guerre. À cela s'ajoute que Bertrand n'est guère en odeur de sainteté auprès des historiens des mathématiques ou de la

[1] Les notes du texte sont renvoyées à la fin de l'article (p. 21)

[2] Université René Descartes- Paris V . bernard.bru@univ-paris5.fr

statistique, qui dénoncent généralement son ignorance des avancées analytiques les plus novatrices, celles de Laplace et ses émules européens, ses emprunts non signalés à tel ou tel,

Joseph Bertrand[3]

[3] Gravure, probablement effectuée d'après une photographie consultable à l'adresse www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Bertrand.html aimablement fournie par Stephen M.Stigler.

son minimalisme théorique, ses limitations excessives du rôle de l'analyse mathématique en statistique, qui semblent renier l'Art bernoullien revu par Laplace, Poisson et Bienaymé. Bertrand, tout puissant à l'Académie, à l'Ecole polytechnique, au Collège de France et ailleurs, dont l'œuvre mathématique serait d'un second couteau, n'aurait pas su trouver sa voie ni saisir sa chance en calcul des probabilités, là où il aurait pu triompher sans mal, personne de quelque renom, depuis la mort de Bienaymé en 1878, ne briguant d'y briller à sa place. Bertrand appartiendrait ainsi à cette espèce malheureuse des savants qui ne s'aiment pas, pour reprendre les catégories à la mode, et qui, voulant tout, gâchent tout ce qu'ils touchent. Nous ne détaillerons pas davantage ici ce point intéressant. Nous voulons simplement montrer très sommairement comment Bertrand voit et enseigne le calcul des probabilités, sa théorie, ses applications et quelle a été son influence directe sur les premiers enseignements de calcul des probabilités du XXe siècle, en France tout au moins, laissant le lecteur décider lui-même s'il faut ou non brûler Bertrand et son calcul des probabilités. (2)

Pour ne pas alourdir exagérément notre exposé, nous nous limitons volontairement à quelques points singuliers. En particulier nous ne traitons que marginalement du « paradoxe de Bertrand » abondamment commenté, et fort bien, déjà (3). Nous commencerons par aborder très brièvement la philosophie bertrandienne.

2. La traversée du Pont-Neuf. (4)

Depuis Jacques Bernoulli, il est d'usage chez les savants d'accompagner un traité de calcul des probabilités par un « essai philosophique » dans lequel l'auteur précise le sens des mots qu'il emploie, probabilité, chance, hasard, espérance, …, fixe les limites nécessaires de la discipline et dénonce les illusions dont elle est éventuellement l'objet. Il n'est pas rare que le savant se prenne au jeu et intègre ses réflexions à un ou à plusieurs systèmes philosophiques, ou même crée de toute pièce son propre système philosophique, nourri d'une analyse critique de sa discipline scientifique. Cette littérature semi philosophique ou semi scientifique comme on voudra, où le savant sort de son domaine technique, a souvent des visées pédagogiques. Il s'agit que l'élève ou l'étudiant franchisse le pas probabiliste, ce qui ne va pas de soi, on le sait.

Bertrand se devait donc de placer un essai philosophique, « les lois du hasard », en préface de son *Calcul des probabilités*. À sa manière, aussi peu philosophique que possible. Bertrand a visiblement peu de goût pour les spéculations métaphysiques (5) et le philosophe dont il se recommande le plus volontiers est Rabelais, en de longues citations littérales, sans guillemets et sans nom d'auteur, (6). Rabelais passait alors, à l'Académie française notamment, pour être le meilleur représentant de l'esprit français (face à la lourdeur et aux canons prussiens sans doute). Ce qui laisse au moins soupçonner que « les lois du hasard » dans leur ensemble, sans références explicites, s'intègrent à l'air du temps, et qu'il faut leur chercher des influences ou des réminiscences. Tentons donc notre chance. Et d'abord le début souvent recopié, qui introduit justement la locution « lois du hasard » dans le corps du texte : « Comment oser parler de lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ? » Bertrand répond non à cette seconde question, mais ne propose pas de définition du hasard autre que celle-là, négative, n'être pas l'antithèse de toute loi, être autre chose que notre ignorance. À quoi bon se lancer dans des explications fumeuses, puisque « le mot hasard est intelligible de soi » et qu'il « éveille dans l'esprit une idée parfaitement claire ». Un coup de dé est « l'œuvre du hasard ». Le hasard a ses lois et ses caprices …. Bertrand ne définit pas le hasard, mais il lui reconnaît une existence, celle d'être une « idée parfaitement claire », une idée sans doute assez mathématique pour avoir ses lois, et assez physique pour avoir ses caprices. On peut évidemment considérer que Bertrand ici raconte n'importe quoi et qu'il se laisse emporter par son goût du paradoxe. Mais il n'en est rien, il se fait l'écho, (légèrement ironique pour sauver sa réputation), d'une philosophie bien constituée, celle de Cournot. On pourrait même soutenir, le cas échéant, que Bertrand est le premier mathématicien cournotien du hasard, même s'il ne ménage pas ses critiques à son maître malgré lui (7). C'est en effet Cournot qui le premier, parmi les philosophes des sciences du XIXe siècle (8), a hissé le hasard au rang des « idées fondamentales » qui structurent la philosophie et la science éternelles, au même titre que la force ou le nombre ou l'espace, …,. Comme toutes les idées fondamentales, le hasard intervient dans tous les champs ou les ordres du savoir humain, de sorte qu'il a des composantes mathématiques, physiques, philosophiques, etc., qui chacune séparément a sa théorie, ses règles et ses lois, qui ne se confondent pas mais se correspondent, images multiples d'une même idée (fondamentale). De sorte qu'en effet il n'est guère nécessaire de définir le hasard qui fuit devant nous au fur et à mesure que nous le connaissons mieux, à l'instar des autres idées fondamentales, de tous les mystères de la raison et de la foi. Évidemment Bertrand aurait pu se fatiguer un peu plus, par exemple recopier la définition cournotienne du hasard, ou en inventer une autre, mais aucune n'a dû lui paraître assez claire, assez lumineuse, pour qu'il vaille la peine d'y insister trop. Des exemples suffisent, on jette un dé en l'air, ou bien on tire dans une urne et la foi vient en pratiquant suffisamment la chose (9). Il ne s'agit plus seulement des « jeux de hazard » dont on sait la théorie depuis des lustres, mais du « hasard » qui se met à exister tout seul et devient l'objet des réflexions des plus grands comme des plus petits et le titre de leurs articles ou de leurs livres. Il n'est pas exagéré de dire que tous ces travaux, motivés par l'irruption soudaine du hasard dans la science du temps, ont pour point de départ les « lois du hasard » de Bertrand (10). N'insistons pas, tout cela est bien connu, et passons au principe régulateur qui, pour Bertrand, lie la théorie à ses applications. Il prend des formes multiples, Bertrand ayant le génie des images pédagogiques. Nous n'en donnerons qu'une (p. IX) :

«Sur le Pont-Neuf, pendant une journée ou pendant une heure, on peut prédire résolument que les passants de taille inférieure à deux mètres (11) l'emporteront en nombre. Le pont écarte-t-il les géants ? Quand au jeu de dés, on annonce quelles combinaisons prévaudront, c'est, comme pour les passants du Pont-Neuf, une question d'arithmétique ; les combinaisons qu'on ose exclure forment, dans le nombre total, si les épreuves sont nombreuses, une proportion beaucoup moindre que, parmi les Parisiens, les hommes de six pieds de haut. »

Dans ce morceau étonnant, tout est dit sur le hasard et la probabilité selon Bertrand, bien que les mots n'y figurent pas explicitement. Où se cache le hasard ? C'est lui qui choisit les Parisiens devant traverser le Pont-neuf ce jour-là, dans l'ensemble des Parisiens de naissance ou de résidence, parmi lesquels se trouvent peut-être quelques étrangers de passage, on ne sait pas, mais on peut au moins imaginer l'ensemble des piétons potentiels ce jour-là à Paris. Peu importe d'ailleurs. Dans un vaste ensemble d'individus, le hasard choisit ceux qui vont passer d'une rive à l'autre de la Seine, par le Pont-Neuf. Et ce choix est caractéristique du hasard en ce sens qu'on peut parier résolument qu'il n'y aura pas ou très peu de géants de deux mètres. Comment le hasard évite-t-il de choisir les géants ? On pourrait gloser indéfiniment sur ce point, mais c'est inutile, puisque c'est une « certitude », en un sens à préciser, et donc une loi du hasard, ou un principe pour le hasard : dans l'urne des Parisiens, les individus de deux mètres sont « introuvables », comme une aiguille dans une botte de foin. Il ne les choisira pas, faute de réussir à les trouver. Version bertrandienne du principe de l'impossibilité physique de Cournot, sous une forme non probabilisée encore. Passons donc à la probabilité. Il faut maintenant lire la seconde partie de la citation qui concerne le jeu de dés. Il s'agit clairement d'une allusion au calcul des chances. On se représente toutes les issues possibles et le hasard choisit celle qui va se réaliser, celle qui va traverser le Pont-Neuf. Chacune des issues a la même chance d'être choisie, et de là on définit la probabilité de la façon usuelle et on l'interprète comme il est dit ici : on peut prédire que seules les issues trouvables traverseront le Pont-neuf, les configurations introuvables dans la masse des possibilités resteront sur les berges. Le théorème de Bernoulli s'interprète de cette façon et donc toutes les probabilités bien définies. Il suffit d'imaginer le nombre immense des issues possibles d'un jeu de pile ou face répété mille fois, et de laisser le hasard en choisir quelques-unes (celles qui passeront le jour dit par le Pont-Neuf). On peut prédire résolument que celles pour lesquelles le nombre de piles est inférieur à 900, par exemple, l'emporteront en nombre. Et la certitude de cette prédiction n'est pas moindre que celle relative aux Parisiens de moins de deux mètres ou bien que la certitude qu'a un bon tireur muni d'une carabine de précision de toucher une bête féroce à dix pas et, ajoute Bertrand (p. XXII), si la bête se présente et qu'il la manque, « en la voyant furieuse, se ruer et l'assaillir, doit-il rester impassible, confiant dans la certitude de l'avoir tuée ? »

À défaut d'une définition de hasard, on a maintenant une définition combinatoire de la probabilité et un principe d'application, le principe du Pont-Neuf. On aura noté qu'il s'agit là d'une façon imagée et très simplifiée de présenter la théorie de Cournot. Simplifiée dans la mesure où Bertrand s'en tient à une théorie des chances dans le cas d'un ensemble fini. L'urne de Bertrand est finie. Selon lui, dans ce cas et seulement dans ce cas, au moins officiellement, le hasard n'a aucun doute dans ses choix, chaque boule de l'urne a la même chance d'être choisie. Ce n'est plus le cas si l'urne est infinie, un segment de droite ou les cordes d'un cercle (n° 4-7), il y a alors doute : que va faire le hasard, on n'en sait rien a priori. Bertrand se rappelle sans doute les discussions qui se sont élevées à la Société philomatique, au temps de sa jeunesse, sur la façon dont le hasard peut choisir un point sur une sphère, après Lambert, Laplace, Poisson et Cournot. Et comme il y a doute, il vaut mieux s'abstenir en présence d'étudiants, et s'en tenir dans le cas continu aux seules probabilités statistiques, (on comptera les Parisiens qui ont effectivement plus de deux mètres). Ce qui permet incidemment de réduire à néant les calculs laplaciens et poissonniens fondés sur une loi a priori continue et uniforme : si le hasard lui-même ne sait comment opérer a priori comment le pourraient des analystes aux idées confuses et inutilement sophistiquées (toujours ça de pris sur l'ennemi). D'un autre côté, on peut se demander si cette limitation pédagogique et philosophique au cas d'une urne finie n'est pas l'indice que le principe du Pont-neuf n'a pas toute la clarté que Bertrand prétend y trouver. Les lecteurs et les élèves de Bertrand s'y sont-ils laissés prendre ? En tout cas ni Poincaré ni Borel n'ont été dupes (12). Bertrand est merveilleusement clair, mais cette clarté, c'est lui qui la met où il veut bien la mettre et son hasard, si humain, avec ses caprices, son amour de l'arithmétique et de la combinatoire, ce soin qu'il met à ignorer les Parisiens trop grands, lui ressemble trop pour être tout à fait honnête. Quoi qu'il en soit, on dispose d'une exposition imagée, vulgarisée, relativement cohérente, d'une doctrine de la probabilité d'un événement « isolé » soumis au hasard et, en cas de répétition du même hasard, un principe général d'application, que Borel appellera finalement la loi unique du hasard (13) et qu'on nommera parfois dans les années vingt le « principe de Cournot » (14) : un événement de faible probabilité est résolument impossible, la faible probabilité étant calculée arithmétiquement en énumérant les chances dans le meilleur des cas, et sinon comme on pourra. Ces deux éléments (probabilité d'un événement isolé et impossibilité certaine des événements de petite probabilité) sont, comme on sait, les traits caractéristiques de l'école parisienne de calcul des probabilités qui commence sans doute en 1889, avec le *Calcul des probabilités* de Bertrand, et se termine en 1939 avec les derniers fascicules du *Traité de calcul des probabilités et de ses applications,* dirigé par Borel, avant que Kolmogorov n'axiomatise ce point de vue dans un cadre ensembliste.

3. Promenades à Saint-Maurice (15).

Certes, l'idée bertrandienne du hasard peut sembler triviale à un esprit véritablement philosophique, mais il ne faut pas se fier aux apparences et si, en effet, la philosophie du hasard de Bertrand est un peu courte, sa géométrie du hasard, elle, est riche et moderne. Son influence sur le développement des mathématiques du hasard au XXe siècle ne saurait être négligée, au moins à Paris. Voyons ce point très rapidement.

Il se trouve en effet que ce hasard, capricieux et incertain, aux idées si courtes, crée des objets mathématiques d'une étrange beauté, que les développements analytiques abscons de l'Ecole laplacienne ont considérablement obscurcie. Bertrand se propose donc de débarrasser les beautés du hasard de leurs oripeaux analytiques pour leur rendre leur nudité originelle et leur charme singulier. C'est le sens de la citation de Daniel Bernoulli que Bertrand a placé en exergue de son ouvrage (16) : Eliminer les nodosités analytiques pour dévoiler les attraits du hasard. Le calcul des probabilités est essentiellement « attrayant ». Ses résultats n'ont rien à envier sur le plan esthétique aux théorèmes de la géométrie. Et cette beauté n'est pas stérile, elle est la source même de l'intuition probabiliste, qu'on trouve déjà dans les travaux des anciens, ceux de Pascal, des Bernoulli, de Montmort ou bien de Moivre, parfois même en certains endroits de Laplace ou Poisson, et qui continue d'émerveiller les bons élèves et d'éclairer les savants dans leurs travaux.

Bertrand rassemble donc dans son ouvrage un florilège des plus beaux attributs mathématiques du hasard, avec un œil d'esthète. Il serait trop long d'en faire le recensement complet (17), il suffit sans doute de traiter rapidement d'un exemple typique, rétrospectivement le plus fécond, « le jeu de pile ou face » (18).

Le 30 janvier 1882, Joseph Bertrand lit à l'Académie une note intitulée « Sur la théorie des épreuves répétées » (19) qui commence ainsi : « Le célèbre théorème de Bernoulli sur les épreuves répétées ne fait partie d'aucun programme d'études, et cela tient peut-être à la complication des démonstrations proposées :

Je crois utile de faire connaître le raisonnement suivant, présenté cette année aux élèves de l'Ecole Polytechnique : »

Commencement qui en dit long sur l'état de l'enseignement du calcul des probabilités en 1880 en France, et qui se poursuit ainsi. Soit deux événements contraires A et B de probabilités respectives p et q. Notons N le nombre de fois que A s'est présenté au cours de n épreuves. Bertrand explique qu'on calcule la loi de N et ses deux premiers moments à l'aide du développement du binôme $(p+q)^n$, d'où l'on déduit, en développant le carré et en simplifiant, $E = E\left(\frac{N}{n} - p\right)^2 = \frac{pq}{n}$, et, par conséquent, conclut Bertrand « E tend vers zéro lorsque n augmente, ce qui exige évidemment qu'il en soit de même de la probabilité pour que la différence $\frac{N}{n} - p$ surpasse une limite donnée, si petite qu'elle soit. »

Nous avons voulu respecter la lettre du raisonnement de Bertrand pour donner un exemple de la pédagogie bertrandienne et incidemment de sa façon d'écrire l'histoire.

Regardons tout d'abord la conclusion. Le lecteur pourrait s'étonner que Bertrand considère comme évident la phase finale de la démonstration. Il va de soi, selon lui, que si la moyenne d'une quantité positive est infiniment petite, il en est de même de la probabilité que cette quantité surpasse une limite donnée. Dans un cours actuel, on dirait aux élèves : cela résulte de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev (du programme) et non d'une évidence (20), avec le risque connu que l'inégalité de B-T leur semble d'une parfaite opacité algébrique, et qu'ils y perdent toute évidence, toute idée d'évidence. Pour Bertrand, cette inégalité n'est d'aucune utilité pédagogique (et d'ailleurs d'aucune utilité tout court) ; si l'espérance de gain est très petite dans un jeu où l'on ne peut perdre, la probabilité d'un gain de quelque importance ne peut être bien grande. En calcul des probabilités, comme en physique mathématique, en général, la sophistication analytique est nuisible au point de vue pédagogique et le plus souvent illusoire au plan pratique, c'est du moins la philosophie générale de Bertrand dans ces années-là. À cela s'ajoute sans doute, mais marginalement, la duplicité ordinaire de Bertrand, qui ne cite ses sources que difficilement et toujours à contre emploi, surtout s'il s'agit de Bienaymé qu'il n'apprécie guère. Il était certainement tentant de réduire l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev à une trivialité qui tombe sous le sens, au point qu'il ne soit plus nécessaire de la nommer, ni d'en donner une démonstration en forme. Ajoutons que Moivre, qui n'avait rien contre Bienaymé, ni contre Tchébychev, considère lui aussi comme allant de soi qu'une converge en moyenne implique une convergence en probabilité. Bertrand n'est pas un cas isolé.

Passons à l'idée générale de la démonstration, qui consiste à évaluer l'espérance mathématique de la différence $\left(\frac{N}{n} - p\right)$ au carré, plutôt que la probabilité que cette différence surpasse une certaine limite donnée. Cette idée revient tout entière à Bienaymé dans un célèbre mémoire de 1853 (21), et a déjà été utilisée par Tchébychev pour démontrer une généralisation du théorème de Bernoulli dans un mémoire publié en français par Liouville en 1867 (22). Bertrand aurait pu le mentionner, il ne l'a pas fait. Il ne le fera pas non plus en 1888 où il reprend la même démonstration dans un cadre plus général (23). Mais le pédagogue n'est-il pas le recréateur de ce qu'il enseigne ? D'autant que Bertrand personnalise la démarche initiale de Bienaymé et Tchébychev. Pour rendre son exposé tout à fait élémentaire, il calcule la variance de la loi binomiale en dérivant à bon escient la formule du binôme alors que Bienaymé utilise dans son cadre « l'égalité de Bienaymé », selon laquelle la variance d'une somme de variables indépendantes est égale à la somme des variances, égalité qui selon Bienaymé justifie à elle seule la méthode des moindres carrés. En se restreignant au cas de deux événements contraires, Bertrand simplifie (et se réapproprie) la méthode générale de Bienaymé et Tchébychev, dans le but (ou sous prétexte) d'apprendre aux polytechniciens de 1881-1882 le théorème de Bernoulli, que des démonstrations compliquées et généralement peu rigoureuses ont rendu illisible (24). Ce faisant, il consacre définitivement une formule, la variance d'une loi binomiale de paramètres n et p est égale à npq, et une méthode, qui vont devenir des classiques pédagogiques en France certainement et probablement aussi ailleurs, bien que nous n'ayons pas d'éléments de preuves décisifs à cet égard.

Ce n'est pas seulement pour illustrer la pédagogie de Bertrand (et ses ambiguïtés), que nous avons pris le temps de présenter cette note. C'est aussi parce que, d'une certaine façon, elle est le point de départ de la géométrie du jeu de pile ou face telle qu'elle figure dans le cours de 1888, et donc un point de départ possible pour ce paragraphe 2. On sent dans cette note une sorte de frémissement, un regard, une attirance renouvelée pour les attraits particuliers du hasard, qu'il nous faut décrire.

L'indice suivant figure dans le même volume 94 des *Comptes rendus,* où l'on trouve p. 1461-1462, une note d'Émile Barbier intitulée « Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face ». Émile Barbier est alors interné depuis quinze ans à l'asile de Charenton (voir note 17 pour des références sur ce personnage grandiose), et la note de 1882 est sa première publication scientifique depuis son internement à la demande de sa famille. On ignore tout des circonstances exactes de cette publication, mais il est assuré qu'elle n'a été possible que par l'intervention directe du secrétaire perpétuel de l'Académie, Joseph Bertrand, qui fera attribué à son auteur le premier prix Francoeur à la fin de l'année 1882 (25), prix qui lui sera renouvelé jusqu'à sa mort en 1889, lui autorisant une toute petite aisance et la sortie de l'hôpital, sa folie, jugée de nature mystique et non-violente, n'apparaissant plus comme dangereuse pour la société depuis qu'il est lauréat de l'Institut.

À première vue, les deux notes probabilistes du tome 94 des *Comptes rendus*, celle de Bertrand et celle de Barbier, n'ont pas grand chose en commun, et la note de Barbier peut déconcerter le lecteur actuel (nous conseillons d'ailleurs à ce lecteur, s'il est pressé, de sauter ce passage et d'imaginer lui-même la conversion de Bertrand au jeu de pile ou face infini après ses rencontres avec Barbier à l'asile de Charenton). Par exemple, lorsque Barbier cite le théorème de Bernoulli, c'est d'une façon peu orthodoxe et même assez énigmatique : «Imaginant une infinité d'épreuves impartiales pour les combinaisons d'égale possibilité rationnelle, Jacques Bernoulli disait : la moyenne M du nombre des coups qui amènent un coup juste sera à peu près $\sqrt{n\pi}$ » Que veut dire Barbier ? Reportons nous au début de la note. « Si l'on jette $2n$ pièces à pile ou face, la raison conçoit 2^{2n} combinaisons d'*égale possibilité*, parmi lesquelles $\frac{2n(2n-1)...(n+1)}{1.2...n}$ amènent juste autant de piles que de faces », d'où l'on déduit la probabilité P d'un coup *juste,* en faisant le quotient. Pour simplifier nos explications, adoptons les notations modernes et désignons par S_{2n}, la somme de $2n$ variables aléatoires indépendantes valant plus ou moins un avec probabilité 1/2. On a alors, après simplification, $P = P(S_{2n}=0)=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$, ou encore, d'après la « belle formule de Wallis », approximativement $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$, l'inverse de ce que « Jacques Bernoulli disait ». On peut donc penser que Barbier interprète Bernoulli de l'une et l'autre façon suivante : on imagine une infinité de fois $2n$ jets de pile ou face, qu'on peut d'ailleurs se représenter comme joués les uns à la suite des autres par paquets de $2n,$ et on compte parmi ces paquets ceux qui se terminent par un coup *juste*. Si on prend en compte les μ premiers paquets, μ étant supposé immense, il y aura environ, d'après le théorème de Bernoulli vu de loin, $\frac{\mu}{\sqrt{n\pi}}$ coups *justes,* et donc en moyenne un coup *juste* tous les $\sqrt{n\pi}$ coups. D'un autre côté, le premier coup juste, (et bien sûr les suivants), est un nombre aléatoire de loi géométrique de paramètre *P,* sa moyenne théorique est exactement $1/P$, c'est-à-dire approximativement $\sqrt{n\pi}$, et de nouveau le théorème de Bernoulli nous dit que la moyenne empirique *M,* prise sur μ paquets, est proche de sa valeur théorique approximative $\sqrt{n\pi}$. D'où, selon Barbier, : « *Les quantités* $\frac{M^2}{n}$ *et* π *ont un rapport dont la valeur tient le milieu entre* $\frac{4n}{4n-1}$ *et* $\frac{4n+1}{4n}$. »

Continuons notre lecture. Barbier introduit ensuite dans son jeu à $2n$ pièce*s,* la *différence nulle ou positive qui se présente à chaque fois entre les nombres de piles et de faces,* c'est ce que nous notons actuellement $|S_{2n}|$. De nouveau, Barbier imagine qu'on jette une « multitude de fois » les *2n* pièces et il note *D* la moyenne de ces différences. D'après lui, *D* se calcule par la formule $D = 2nP$, ou, en notations modernes et en supposant la « multitude » infinie, $D = E|S_{2n}| = 2nP(S_{2n} = 0)$, formule exacte qui se trouve chez de Moivre dès 1730 et que Todhunter a pris la peine de démontrer explicitement dans sa grande histoire du calcul des probabilités de 1865 (26). Barbier conclut alors : «*Les quantités* $\frac{4n}{D^2}$ *et* π *ont un rapport qui tient le milieu entre* $\frac{4n}{4n-1}$ *et* $\frac{4n+1}{4n}$.

« Ainsi *les coups justes* au pile ou face à *2n pièces coupent la somme des différences en parties dont la valeur moyenne est 2n, le nombre de pièces.* » (27)

Et il termine ainsi : « L'égalité rationnelle des quantités $\frac{M^2}{n}$ et $\frac{4n}{D^2}$ est rigoureuse ; ces quantités expriment l'une et l'autre une approximation de π ».

On peut évidemment considérer que la note de Barbier est vide. Elle ne contient pas de théorèmes mathématiques nouveaux et elle est rédigée de façon si étrange qu'elle n'a pas les vertus pédagogiques de la note de Bertrand. Pourtant, elle est parfaitement juste (d'ailleurs Barbier ne se trompe jamais) et surtout elle est animée d'une sorte de souffle poétique qui semble avoir déclenché ou renouvelé chez Bertrand la prise de conscience de la signification véritable du jeu de pile ou face et du théorème de Bernoulli. Comme le disaient souvent Borel et d'autres avant ou après lui, en mathématiques, ce sont les facteurs psychologiques qui sont les plus importants. Une impression, un regard, une figure mal tracée, un exemple esquissé, une lumière timide un matin dans un parc (à Saint-Maurice) valent mieux que tous les traités du monde. Barbier aurait pu être pour Bertrand cette lueur vacillante et tenace qui l'a amené à comprendre différemment le jeu de pile ou face ou le théorème de Bernoulli, et à reprendre ses cours de probabilités au Collège de France (28).

Quoi qu'il en soit, en lisant Barbier ou en discutant avec lui, Bertrand apprend qu'on peut fabriquer à partir du jeu de pile ou face prolongé longtemps des « quantités » aux propriétés mathématiques assez remarquables pour donner approximativement le nombre suprême π. Le hasard du jeu de pile ou face, c'est-à-dire le hasard le plus pur, résout le problème de la quadrature du cercle aussi sûrement que les séries infinies de l'analyse (29).

Incontestablement, bien qu'il soit difficile d'en apporter la preuve, Bertrand va reprendre à partir de 1882 l'étude complète du jeu de pile ou face. Et le chapitre VI du traité de 1888 et tous les chapitres analogues qui vont désormais s'intituler, étude (ou étude approfondie) du jeu de pile ou face, vont s'efforcer de révéler la richesse mathématique de ces suites de piles et de faces choisis par le hasard. Nous indiquons rapidement un ou deux exemples bertrandiens pris au hasard.

Réglons d'abord la question des approximations de π. Bertrand va très vite remplacer les deux approximations de Barbier par une formule universelle qui lui plaît beaucoup et qu'il répète presque dans tous ses textes et bien sûr dans le cours de 1888 en plusieurs endroits. C'est un mélange des deux notes de 1882. En effet, le numérateur *4n* de la seconde formule de Barbier, $\frac{4n}{D^2}$, est égal, d'après la formule de Bertrand de 1882, au double de la variance de S_{2n}, si bien que l'on peut écrire : $\frac{\operatorname{var}(S_{2n})}{\left(E|S_{2n}|\right)^2} \cong \frac{\pi}{2}$. Cette formule est valable même si la pièce est truquée sans qu'on le sache, la démonstration étant identique à bien peu près (30). On peut évidemment interpréter aussi la formule de Barbier-Bertrand à la façon empirique de Barbier-Bernoulli. On jette un grand nombre de fois $2n$ pièces, et on calcule, pour chacun de ces jets groupés, la valeur de la différence S_{2n} entre le nombre des piles et des faces obtenus, on forme alors la moyenne arithmétique de ces quantités puis les écarts à cette moyenne, il suffit ensuite de faire le quotient entre la moyenne des carrés des écarts et le carré de la moyenne des écarts pris positivement pour obtenir une approximation de « la moitié de la surface du cercle de rayon unité » (Préface, page XXI). Et ce procédé est universel si on répète un grand nombre de fois une épreuve numérique quelconque (ou presque) soumise au même hasard, et si on forme le quotient en question, on trouvera approximativement $\frac{\pi}{2}$. S'il n'en est rien, c'est que la série d'épreuves ne résulte pas du même hasard ou bien que, d'une façon ou d'une autre, les épreuves se sont contaminées entre elles. C'est le critère du hasard de Bertrand, repris par certains auteurs de la tradition bertrandienne, Bachelier notamment, que Du Pasquier appelle la « formule du hasard » (31). Le véritable hasard approche toujours π, sinon ce n'est qu'un hasard de pacotille.

Quittons ce thème, pour aborder ce qu'on pourrait appeler par anticipation les méthodes trajectorielles de Bertrand, bien que nulle part Bertrand ne trace de trajectoires de son jeu de pile ou face (32). Commençons par reprendre le thème de Moivre-Barbier évoqué ci-dessus, et restons, pour simplifier, dans le cas de Barbier d'un jeu équitable. De la formule de Moivre résulte ce fait, qui fut d'ailleurs l'objet de commentaires célèbres de Moivre dans sa *Doctrine of Chances* : $E\left|\frac{S_n}{n}\right| \to 0$, lorsque n tend vers l'infini, d'où résulte le théorème de Bernoulli, suivant le principe de Bertrand (si l'espérance d'une quantité est petite, la probabilité que cette quantité ne soit pas petite ne peut être très grande). Bertrand se propose alors de démontrer cette convergence (en moyenne) par une « démonstration plus simple encore » (n° 80 du traité) (33). Voyons rapidement les ingrédients de la démonstration. Notons comme Bertrand $\varphi(\mu) = E|S_\mu|$, et doublons le nombre des coups. On peut partager les 2μ coups en deux séries indépendantes de μ coups, et l'écart final $|S_{2\mu}|$ est plus petit que la somme des écarts des deux séries partielles, $|S_{2\mu}| \leq |S_\mu| + |S'_\mu|$, d'où $\varphi(2\mu) \leq 2\varphi(\mu)$. Pour des raisons de bon sens, on peut admettre que l'inégalité est stricte mais Bertrand affirme que $\varphi(2\mu) = 2G_1\varphi(\mu)$, « G_1 étant plus petit que l'unité et ne s'en approchant pas indéfiniment » (p. 99), ce qui selon Bertrand signifie que si l'on répète ce procédé on obtiendra $\varphi(2^n\mu) = 2^n G_1 G_2 ... G_n \varphi(\mu)$, où les facteurs G sont plus petits que 1 et ne tendent pas vers 1, d'où il résulte que $\dfrac{\varphi(2^n\mu)}{2^n\mu} \to 0$, et donc le théorème de Bernoulli.

Le point délicat de la démonstration est évidemment l'évaluation des facteurs G. Bertrand distingue deux cas suivants que les deux écarts partiels sont ou ne sont pas de même signe. Lorsqu'ils sont de même signe, $\varphi(2\mu) = 2\varphi(\mu)$ (ce qui est juste dans le cas équitable que nous considérons, mais peu exact si ce n'est pas le cas. Il y a là une faute que Bertrand commet souvent qui consiste à évaluer une espérance conditionnelle comme si la variable était indépendante de l'événement conditionnant). Lorsqu'ils sont de signe contraire, Bertrand utilise le moyen habituel des pédagogues en difficulté : le contraire serait « inadmissible », qu'on se le dise !

De sorte que rien ne tient véritablement, sauf l'idée directrice, regarder la succession des parties, la découper, utiliser l'indépendance des morceaux, les recoller à bon escient, etc. Bref, tout ce que tous les livres font dans ce genre de situation, depuis les années 1950.

Pour tenter de convaincre le lecteur sceptique, prenons un second exemple de chirurgie trajectorielle bertrandienne (le lecteur convaincu, s'il s'en trouve, pouvant passer directement à la fin du paragraphe). Nous le choisissons au chapitre VI sur la « ruine des joueurs ». Bertrand a été frappé par le résultat d'Ampère : dans un jeu de pile ou face équitable, si un joueur de fortune finie lutte contre un adversaire de fortune infinie, sa ruine est certaine (au sens du calcul des probabilités). Comment concilier l'équité parfaite des parties et l'injustice finale de la ruine du joueur ? Bertrand renouvelle là un thème, la « ruine des joueurs » qui sera repris brillamment par Borel dès son cours de probabilités à la Sorbonne en 1909, et bien sûr par Bachelier qui l'étend au cas continu dans sa thèse de 1900 et dans son *Calcul des probabilités* de 1912, annonçant la théorie moderne.

Examinons au préalable avec Bertrand pourquoi la ruine est certaine. Ampère l'avait montrée en sommant une série combinatoire, Laplace en résolvant et en discutant une équation aux différences, mais cela n'explique rien (34). Il faut voir les choses directement et « simplement ». Imaginons que Pierre et Paul possèdent la même fortune *m,* et qu'ils jouent l'un contre l'autre à pile ou face jusqu'à la ruine de l'un d'eux. La durée du jeu est certainement finie (n° 82). En effet, la probabilité du coup le plus probable, lorsque Pierre et

Paul gagnent le même nombre de parties, tend vers 0, lorsque le nombre de parties augmente (on l'a vu ci-dessus) donc « il en est de même, à plus forte raison de toute autre combinaison désignée et, par conséquent d'un ensemble de combinaisons quel qu'il soit, dont le nombre ne croîtrait pas indéfiniment avec le nombre de parties ». En particulier l'ensemble fini des combinaisons qui ne ruinent pas les joueurs avant une partie n donnée a une probabilité qui tend vers 0 (on dirait maintenant aux élèves, la promenade symétrique sort presque sûrement de tout tuyau horizontal donné à l'avance). Donc dans ce cas, la ruine est certaine.

Supposons maintenant que Pierre lutte contre un adversaire de fortune infinie (n° 85). On peut imaginer que Pierre, dont la fortune est m, lutte d'abord contre un adversaire de même fortune (quitte à ce que ce dernier soit de fortune infinie et laisse le reste à la banque). Tout étant égal entre les deux joueurs, Pierre a une chance sur deux de se ruiner ou de le ruiner. Si c'est ce dernier cas, il dispose d'une fortune $2m$, qu'il remet en jeu devant un adversaire (le même) de fortune $2m$. Et de nouveau il se ruine ou ruine avec même probabilité. Il a donc une chance sur quatre de disposer d'une fortune $4m$, au terme de ces deux premières manches, et trois chance sur quatre de se ruiner. Et ainsi de suite, au risque de se ruiner à chaque fois, Pierre doit affronter successivement un adversaire qui double sa fortune en même temps que lui. « On voit, nous dit Bertrand, que pour échapper à toutes les chances de ruine, Pierre devrait avoir autant de bonheur que si, jouant sans cesse à pile ou face, il ne perdait jamais une seule partie. Une telle persistance doit être évidemment considérée comme impossible et Pierre, tôt ou tard, se ruinera. » (35).

Donc la ruine est certaine. Mais le joueur a le temps de s'y préparer, (n° 87) : « la durée probable du jeu est infinie » (36). Il suffit pour cela de reprendre le raisonnement précédent. Supposons que Pierre a une fortune m et qu'il lutte contre un adversaire de même fortune, et notons $\varphi(m)$, la durée moyenne du jeu (supposée finie sinon il n'y a rien à démontrer). Imaginons maintenant que Pierre et Paul possèdent une fortune de $2m$ francs, et que le jeu se déroule en deux manches au cours desquelles les deux adversaires ne mettent au jeu que la moitié m de leur fortune. Deux cas peuvent se présenter, soient l'un des deux joueurs gagne les deux manches et ruine l'autre, soit ils gagnent chacun une manche et on revient à la situation primitive, les deux joueurs ont $2m$ francs. La durée du jeu est égale à la somme des durées de chaque manche plus dans le second cas une durée identique en tout point à la durée totale du jeu d'où l'on conclut $\varphi(2m)=2\varphi(m)+\frac{1}{2}\varphi(2m)$, c'est-à-dire $\varphi(2m)=4\varphi(m)$.

Revenons maintenant à la situation initiale, Pierre possède m francs et lutte contre un adversaire de fortune infinie. Ce dernier ne met d'abord en jeu que m francs. Pierre a une chance sur deux de le ruiner. Il met alors en jeu $2m$ francs et ainsi de suite, la durée totale du jeu s'exprime comme une somme de durées de jeux entre des adversaires de fortunes égales doublées à chaque fois que Pierre gagne et qui s'arrêtent dès que Pierre perd une partie et donc toute la fortune qu'il a accumulée. D'où la durée moyenne du jeu est égale à la somme

$\varphi(m)+\frac{1}{2}\varphi(2m)+\frac{1}{4}\varphi(4m)+\frac{1}{8}\varphi(8m)+....$, somme qui, d'après la relation trouvée précédemment, est un multiple infini de $\varphi(m)$, et ne peut, par conséquent, être qu'infinie, quelle que soit la valeur (finie ou infinie) de $\varphi(m)$.

Il est difficile de faire mieux, et si l'on trouve parfois de tels raisonnements, justes ou faux, déjà chez les classiques, Moivre en particulier (37), ceux de Bertrand ne leur sont en rien inférieurs, bien au contraire, et vont être repris, précisés et étendus par Borel et ses élèves de la Sorbonne puis de l'IHP.

On pourrait sans doute développer encore longtemps le thème trajectoriel, mais il faut savoir terminer un paragraphe. Et celui-là ne peut être clos sans qu'on ait évoqué l'un des apports les plus incontestables de Bertrand à la théorie du jeu de pile ou face et à celle corrélative du mouvement brownien, la formule du « scrutin de ballottage ». Voyons cela rapidement.

Tout part naturellement de la ruine des joueurs à un jeu équitable de pile ou face, tel que le conçoit Ampère, cet autre génie de l'invention. Ampère, en effet, évalue directement la probabilité qu'un joueur de fortune finie *m,* disons Pierre, soit ruinée face à un adversaire infiniment riche au jeu de pile ou face, précisément à la *n*ième partie, dans lequel (nécessairement) $n=m+2p$, pour un entier *p* donné. La formule obtenue par Ampère est très simple : cette probabilité est égale à $\frac{m}{p}C_{n-1}^{p-1}.\frac{1}{2^n}$. En revanche sa démonstration, d'ailleurs intéressante, laisse à désirer au plan de la simplicité et pour Bertrand, il y a là un défi à relever. Pour comprendre une formule simple, il faut lui trouver une preuve simple. Toujours est-il que Bertrand présente à l'Académie, lors de sa séance du 22 août 1887, une courte note intitulée « Solution d'un problème » (38) qui commence ainsi : « On suppose que deux candidats A et B soient soumis à un scrutin de ballottage …. A obtient *a* suffrages et est élu, B en obtient *b*. On demande la probabilité pour que pendant le dépouillement du scrutin, le nombre de voix de A ne cesse pas une seule fois de surpasser celles de son concurrent ». « La probabilité demandée est $\frac{a-b}{a+b}$ ». Suit une esquisse de démonstration à partir de l'équation aux différences partielles du problème, que l'on peut plus ou moins facilement préciser, et qui prouve surtout que Bertrand devoir savoir à l'avance la solution de son problème. Bertrand explique lui-même fort bien comment il faut s'y prendre pour passer du problème d'Ampère au problème de Bertrand (39). Revenons au problème de la ruine de Pierre à la *n*ième partie, $n=m+2p$. Modifions un peu la formule d'Ampère, en écrivant, $\frac{m}{p}C_{n-1}^{p-1}.\frac{1}{2^n}=\frac{m}{p}\frac{p}{n}C_n^p\frac{1}{2^n}=\frac{m}{n}C_n^p\frac{1}{2^n}$. Sous cette forme, les choses deviennent limpides, $C_n^p\frac{1}{2^n}$, représente, en effet, la probabilité qu'un joueur, mettons Paul, partant de 0, gagne $m+p$ parties (et en perde *p*) en *n* coups, ou bien en retournant le temps, que Pierre, le joueur d'Ampère, partant d'une fortune *m* perde $m+p$ parties (et en gagne *m*), et soit ruiné à la *n*ième partie (et peut-être aussi avant). La probabilité que Pierre celui qui possède initialement m francs) ne soit ruiné qu'à la $n$ième partie, si l'on sait qu'il est ruiné à cette partie, est égale, en regardant les choses dans l'autre sens, à la probabilité que Paul, partant d'une fortune nulle gagne m francs en n parties sans jamais se ruiner pendant la durée du jeu, sachant qu'il gagne de toute façon m francs à la $n$ième partie, ces deux probabilités étant égales au quotient $\dfrac{\frac{m}{n} C_n^p \frac{1}{2^n}}{C_n^p \frac{1}{2^n}} = \dfrac{m}{n}$. Pour retrouver le problème de Bertrand, il suffit maintenant de supposer que Paul, lors d'un scrutin de ballottage, possède $a = m + p$ bulletins et Pierre, $b = p$. La probabilité que Paul l'emporte toujours sur Pierre au cours du dépouillement est d'après ce qui précède $\dfrac{m}{n} = \dfrac{a-b}{a+b}$.

Donc Bertrand connaît a priori la solution de son problème. Ce qui lui manque c'est une démonstration directe simple qui, à rebours, lui permettrait de retrouver très simplement la formule d'Ampère et de résoudre le problème de la durée du jeu, de façon attrayante. Il conclut donc sa note par cet aphorisme typiquement bertrandien : «Il semble vraisemblable qu'un résultat aussi simple pourrait se démontrer d'une manière plus directe ».

On peut imaginer que Bertrand en ait discuté quelque fois avec Barbier (40), mais c'est Désiré André, un normalien de la promotion 1840, professeur à Sainte-Barbe, qui, dans une note publiée quinze jour après celle de Bertrand, démontre la formule de Bertrand de façon à la fois directe et simple, en établissant une correspondance, « chacun à chacun », entre les deux types de dépouillements défavorables au problème de Bertrand (ceux où B rattrape A parfois), ceux qui commencent par un bulletin A et ceux qui commencent par un bulletin B (41).

La correspondance bijective d'André est reprise par Bertrand dans son traité (n° 18) puis par Poincaré, mais, comme l'a remarqué très justement M. Renault (op. cit. note 32), ce n'est pas la bijection couramment enseignée depuis la parution du « tome I » de Feller, c'est-à-dire la bijection fondée sur le principe de réflexion. La bijection originale d'André, fort ingénieuse également, consiste à découper convenablement le début du dépouillement et à le recoller à la fin. Pourquoi diable André, et à sa suite Bertrand et Poincaré (et quelques autres), n'ont-ils pas pensé à une réflexion qui s'impose si naturellement entre les deux types de dépouillements d'André ? Personne n'en sait rien, mais un élément de réponse pourrait provenir de ce que ni Bertrand ni, encore moins, André ne tracent sur leurs cahiers de brouillon les trajectoires oscillantes d'un jeu de pile ou face comme on le fait si couramment maintenant au lycée ou à l'université, et par conséquent ne voient vraiment les objets dont ils traitent. Certes, Bertrand, en certains endroits, on l'a vu, retourne le temps, ou utilise le renouvellement à l'identique du jeu après un instant aléatoire ou non, ou même (n° 94) échange les rôles de pile et de face, ce qui est une forme combinatoire du principe de réflexion, mais il ne raisonne pas sur un dessin en dents de scie comme nous le faisons. Qui alors l'a fait dans l'Ecole bertrandienne, sinon le premier, du moins de façon assez spectaculaire pour que cela se remarque ? Parions que c'est Bachelier, ce « génie de l'invention », bertrandien dissident, qui, lui certainement, a une vision authentiquement trajectorielle, celle des cours de bourse publiés par les agents de change sous forme graphique. Il ne s'agit plus de graphiques de moyennes ou de probabilités, mais le tracé d'un cours particulier que le hasard modifie à tout instant. Regardons donc sa thèse de 1900 (42).

Un des résultats les plus remarquables de Bachelier en 1900 est, on le sait, le calcul de la« probabilité qu'un cours soit atteint dans un intervalle de temps donné » (p. 70-75), c'est-à-dire, dans le langage actuel, la loi du maximum du mouvement brownien sur un intervalle de temps fixe. Ce calcul impressionna vivement Poincaré, le rapporteur de la thèse. Wiener, qui ignorait le travail de Bachelier, tenta en vain de le mener à bien, en évaluant les intégrales très multipliées qui résolvent la question, dans son premier mémoire sur le mouvement brownien en 1923.

Bachelier procède de deux façons différentes. La première consiste à discrétiser le temps en pas Δt. Le « cours » est alors un jeu de pile ou face symétrique dont le gain à chaque partie est $\pm\Delta x$. Il s'agit de calculer la probabilité qu'avant le temps $t = n\Delta t$, le jeu (ou le cours) dépasse la valeur $c = m\Delta x$ donné. Posons, comme précédemment, $n = m + 2p$. Bachelier se propose de calculer d'abord la probabilité que le cours *c* soit atteint exactement à l'époque *t* sans jamais l'avoir été auparavant. Dans ce but, il utilise l'argument de la ruine des joueurs de Bertrand en retournant le temps : cette probabilité est égale à $\frac{m}{n} C_n^p \frac{1}{2^n}$, dans lequel Bachelier identifie la formule du scrutin $\frac{m}{n}$, qu'il attribue à André (p. 73) et qu'il a lu chez Poincaré ou chez Bertrand ou chez les deux ensemble. Il suffit ensuite de passer à la limite de telle façon qu'on obtienne « l'expression exacte » de la probabilité que le cours de Bachelier (ce qui s'appellera trente ans plus tard le mouvement brownien mathématique) atteigne la valeur *c* au temps *dt,* (c'est-à-dire en faisant en sorte que $\Delta x = 0\left(\sqrt{\Delta t}\right)$), sachant qu'avant *t* il était au dessous de *c*. Densité qu'il suffit ensuite d'intégrer de *t* à l'infini, pour obtenir la probabilité que le cours *c* ne sera pas atteint avant l'époque *t,* et par conséquent, en passant au complémentaire, la probabilité que le cours dépasse *c* avant *t.* Bachelier observe alors que cette probabilité est égale au double de la probabilité que le cours dépasse *c* au temps *t.*

Telle est la formule de Bachelier pour la loi du maximum M_t du cours *B* sur l'intervalle $[0,t]$: $$P(M_t > c) = 2P(B_t > c).$$

On peut difficilement faire plus simple, et comme aurait dit Bertrand : «Il semble vraisemblable qu'un résultat aussi simple pourrait se démontrer d'une manière plus directe ». Bachelier donc ajoute à son premier calcul (quelque peu confus et difficile à suivre) une « démonstration directe » sans passage à la limite (p. 75) : « le cours *c* ne peut être dépassé à l'époque *t* sans l'avoir été antérieurement. », donc, $P(B_t > c) = P(M_t > c)\alpha$, où α est la probabilité que le cours *c* ayant été atteint avant *t,* soit dépassé en *t.* Et cette dernière probabilité est visiblement 1/2, par raison de symétrie des trajectoires qui dépassent et ne dépassent pas c en t. Et Bachelier de conclure à son tour : « On peut remarquer que l'intégrale multiple qui exprime la probabilité ($P(M_t > c)$) et qui semble réfractaire aux procédés ordinaires de calcul se trouve déterminée par un raisonnement très simple grâce au calcul des probabilités ». On a sans doute là le premier exemple d'utilisation probabiliste du principe de réflexion. En deux temps, comme dans le cas du scrutin, un calcul compliqué donne une formule simple et un raisonnement probabiliste ou combinatoire très simple la redonne et la justifie. Toutefois Bachelier ne précise pas (encore) que sa méthode de symétrie pourrait s'appliquer aussi bien au scrutin de Bertrand.

L'année suivante, Bachelier publie un second article intitulé « Théorie mathématique du jeu » (43) dans lequel il reprend à sa façon la théorie du jeu de pile ou face de Bertrand, avec sa forme limite naturelle, la « théorie de la spéculation », c'est-à-dire la théorie du mouvement brownien. Aux paragraphes 65 et suivants, Bachelier traite le problème que nous venons d'examiner, la loi du maximum, et des deux manières indiquées à la fois, mais cette fois séparément pour le jeu de pile ou face de Bertrand, et pour le jeu de spéculation de Bachelier. Il est ainsi conduit à reprendre la formule du scrutin, qu'il démontre, « d'une façon un peu différente » de celle de M. André, nous dit-il en note (p. 174). Le principe directeur de la démonstration reste le même. On établit une bijection entre les deux types de dépouillements considérés par André-Bertrand-Poincaré, mais cette fois-ci la bijection n'est pas la bijection de Molière, par découpage et recollement, mais la bijection par « symétrie », qui consiste à échanger A et B dans la première partie du dépouillement, c'est-à-dire exactement la réflexion du jeu de pile ou face imitée du jeu de spéculation. On dispose ainsi d'une seconde bijection naturelle qui sera reprise notamment par Borel dans son cours de probabilités de l'après-guerre (44), et deviendra le classique que l'on sait. Si bien que la formule du scrutin, qui est à l'origine de la loi du maximum, se trouve en retour démontrée par réflexion, par imitation de la preuve « très simple » de ladite loi du maximum. La bouche est bouclée. Il s'agit de la même géométrie et de la même intuition.

Si le lecteur a bien voulu nous suivre jusqu'ici, peut-être est-il convaincu que la géométrie bertrandienne du jeu de pile ou face est, comme son « idée du hasard », à la source de la tradition parisienne de calcul des probabilités, de son enseignement comme de son développement théorique, du moins d'une moitié de la source, une autre moitié étant, comme on sait, analytique et laplacienne, sans compter les moitiés, innombrables et non moins indispensables, qui tiennent aux histoires individuelles des maîtres, des savants et des génies de l'invention qui se rattachent à cette Ecole singulière. Et seuls ceux qui sauront associer la géométrie bertrandienne à l'analyse laplacienne auront accès véritablement au calcul des probabilités moderne, dont la vigueur ne paraît pas faiblir.

4. Un mot d'excuse.

Il faudrait maintenant aborder la partie statistique du cours de Bertrand, la plus critiquée en général, mais qui n'est sans doute pas aussi contestable qu'il y paraît. Nous avons déjà effleuré ce thème ici ou là, par exemple à propos de la formule du hasard. Mais une étude relativement complète de ce thème chez Bertrand devrait comporter au moins quatre parties (et quelques autres). D'abord évidemment, la « combinaison des observations », c'est-à-dire, pour Bertrand, la théorie de Gauss, qu'il a traduite en français trente ans auparavant (46). Ensuite, la « probabilité du tir », une version militaire de ce qui actuellement s'appelle la statistique paramétrique, limitée dans les écoles d'artillerie, depuis les années 1850, au cas de la « loi de Gauss » à une et deux dimensions (47), (les artilleurs abordant le cas de la dimension trois seulement pendant la première guerre mondiale, pour la mise au point des procédures de tir contre aéronefs). Naturellement, la « probabilité des causes », c'est-à-dire la statistique bayésienne parisienne. Et bien sûr, la théorie classique, celle des Bernoulli, ce qu'on appelle maintenant les tests de signification que Bertrand considère, même s'il est sur ce point comme sur les autres aussi critique et contredisant que possible. Bref ce serait très long, d'autant que nous avons déjà largement abusé de la patience du lecteur le plus bienveillant au paragraphe précédent et que trop c'est trop. Nous procéderons donc par échantillonnage subjectif, et nous ne traiterons très brièvement que des deux derniers points.

5. Mourir à Saint-Malo. (48)

« Les habitants de Saint-Malo s'étaient persuadé (49), il y a un siècle, que, dans leur ville, le nombre des décès à l'heure de la marée haute était plus grand qu'à marée basse.

« Admettons le fait.

« Supposons que, sur les côtes de la Manche, on ait remarqué une plus grande proportion de naufrages par le vent du nord-ouest que par aucun autre.

« Les chiffres recueillis à l'appui des deux remarques étant supposés en même nombre et inspirant même confiance, on sera loin d'en déduire les mêmes conséquences » (n° 133).

Dans le cas des naufrages, on est tout prêt à conclure que les vents de nord-ouest sont, en Manche, plus dangereux que les autres, alors que pour les Malouins, on a du mal à croire que les marées hautes soient plus mortifères que les basses. Pourtant les données sont identiques. C'est donc qu'il manque quelque chose pour calculer, au vu de ces données, le plus ou moins de probabilité des causes évoquées, telle marée, tel vent. Cette chose manquante, selon Bertrand, est et ne peut être que la probabilité a priori desdites causes.

Pour convaincre ses auditoires et ses lecteurs, Bertrand multiplie les exemples de ce genre. Il déploie même sur ce thème une imagination considérable. Sa conclusion est à chaque fois identique : il manque une évaluation convenable de la « probabilité a priori » des causes évoquées. Ainsi dans l'exemple malouin, la probabilité a priori que la marée haute entraîne des décès plus nombreux est très faible, à moins de croire aux légendes bretonnes (ce qui n'est visiblement pas le cas de Bertrand), en revanche que les vents du nord-ouest, qui poussent les navires à la côte, entraînent des naufrages, est d'une grande vraisemblance a priori. Ce qui modifie considérablement les probabilités a posteriori des causes en question au vu des mêmes observations.

Bertrand entend ici corriger les usages abusifs qu'on fait des probabilités pour conforter une thèse ou affermir un jugement. Ces abus sont anciens. Ils remontent au moins à Daniel Bernoulli dans sa pièce sur la cause de l'inclinaison des planètes et surtout à Laplace, dans l'*Exposition du système du monde,* à propos de la formation du système solaire. À côté de ces exemples spectaculaires, il en existe beaucoup d'autres plus discrets, répétés en tous lieux et en toutes saisons (50). Chaque fois qu'on fait une observation remarquable, chaque fois qu'il semble qu'une cause naturelle est en jeu, on tend à faire croire, plus ou moins habilement, que la petitesse de la probabilité que « le hasard » produise ce qui a été observé, renforce ou conforte l'hypothèse que la cause en question est en action (51). Bertrand n'est pas le premier à dénoncer de tels abus. D'Alembert l'a fait déjà à sa façon peu orthodoxe, mais il faut attendre Cournot pour que l'erreur de Laplace et des autres soit clairement analysée, et de nouveau on peut considérer que Bertrand est ici disciple de Cournot (52), à sa façon, excessivement restrictive, qu'il nous faut préciser rapidement.

La vérification des hypothèses, à partir de données observées, ne peut se faire que dans le cadre de la théorie de la « probabilité des causes », ce qui s'appelle actuellement la théorie bayésienne. Toute l'Ecole bertrandienne sera donc bayésienne. À la Sorbonne, à l'Ecole polytechnique, et bien sûr à l'Ecole d'artillerie de Fontainebleau, on enseignera la probabilité des causes, pendant cinquante ans.

Mais, en réalité, pour Bertrand, dans l'immense majorité des cas, on ne sait rien des probabilités a priori. L'École laplacienne s'égare absolument sur ces questions, lorsqu'elle assimile l'ignorance où l'on est d'une loi a priori, avec un choix au hasard. Le hasard n'a rien à voir avec notre ignorance. De toute façon, même si on admettait le hasard, on ne pourrait probabiliser ses choix que dans le cas d'un ensemble fini, ce qui est rarement le cas, en théorie des erreurs comme dans celle du jeu de pile ou face. De sorte qu'aucune des conclusions de la première théorie analytique de Laplace, celle qui relève de la probabilité des causes, ne possède la moindre validité. Pour illustrer son propos, Bertrand (n° 124) prend l'exemple de la pièce de Buffon, traité par Poisson dans son célèbre ouvrage de 1837, qui a servi de base à son enseignement de calcul des probabilités à la Sorbonne, (53). Buffon, dans son *Arithmétique morale* (art. XVIII), a fait jouer 4040 parties de croix ou pile. Il a obtenu 2048 fois croix (Bertrand écrit face). On cherche la probabilité (a posteriori) que la pièce de Buffon favorise croix. Bertrand, suivant Poisson (qui suit Laplace), suppose toutes les valeurs de la chance de croix a priori égales. Sous cette hypothèse, il montre, à l'aide d'une approximation simplifiée, que la probabilité a posteriori d'un avantage en faveur de croix est égale à 0, 81 (n° 125), (Poisson trouvait 0, 81043).

La pièce de Buffon était-elle truquée pour autant ?

Bertrand en doute fortement.

D'abord, si le hasard pur était à l'œuvre, c'est-à-dire si la pièce était parfaite à tous égards, le résultat obtenu serait-il invraisemblable ? Il suffit pour en juger de calculer la probabilité qu'au jeu de pile ou face équitable, joué 4040 fois, le nombre de faces s'écarte de la valeur probable 2020 de plus de 28. En utilisant l'approximation normale, Bertrand obtient 0, 38 et conclut : « Si l'on recommençait 1000 fois l'expérience de Buffon, *avec des pièces parfaites,* on obtiendrait 380 fois environ un écart supérieur à 28. Si donc le hasard est la cause du résultat obtenu, il n'y a pas sujet d'étonnement. »

Ensuite, si au lieu de jeter 4040 fois la pièce, Buffon l'avait jetée une fois seulement (n° 126) et qu'il eut obtenu croix. Le calcul de Poisson avec la même loi a priori donne 1/8 pour la probabilité que la pièce soit biaisée en faveur de croix. « Une telle conséquence suffirait pour condamner le principe », conclut Bertrand.

En résumé, pour Bertrand, seule la théorie de la probabilité des causes permet d'évaluer la vraisemblance des hypothèses statistiques à partir des événements observés. Mais, on ne peut pratiquement jamais appliquer cette belle théorie, puisqu'on n'a aucun moyen d'évaluer les probabilités a priori et que le hasard ne saurait nous y aider, les causes (les valeurs des paramètres) étant beaucoup trop nombreuses pour qu'il s'y retrouve. La théorie est donc illusoire, sauf dans les cas rarissimes où la loi a priori est connue véritablement (54).

Reste le premier argument de Bertrand, si le hasard était à l'oeuvre, le résultat de Buffon n'aurait rien d'étonnant (au seuil 0, 38). Il s'agit là d'un exemple du test classique de Nicolas Bernoulli que Bertrand présente au numéro 127, après l'expérience de Buffon. Bertrand reconnaît donc à ce test une valeur réelle. Il met cependant ses lecteurs en garde : il s'agit d'un hasard parfait postulé, qui, s'il était à l'œuvre, produirait avec plus ou moins de vraisemblance le résultat observé. On ne peut appliquer le test de Bernoulli que dans ce sens-là et tout abus sera dénoncé et sévèrement réprimé.

Les « lois de la statistique » ne doivent pas être rejetées pour autant. On peut toujours avoir recours au « théorème de Bernoulli » pour calculer les probabilités avec une précision sans cesse croissante au fur et à mesure des observations. Dès lors, les procédures de validation sont inutiles (et d'ailleurs peu fiables d'après ce qui précède). On pourra recourir aux procédés graphiques le cas échéant, mais le plus souvent le coup d'œil du savant suffira. L'exemple le plus caractéristique de la puissance de la statistique est la probabilité du tir. On y admet la « loi de Gauss » (une locution lancée par Bertrand et son école), et les calculs des différents « écarts » s'enchaînent avec la plus parfaite rigueur et sont tous les jours confirmés sur les champs de tir.

Certes, Bertrand est en recul par rapport à l'École laplacienne, qui explore toutes les voies possibles, même celle des petits échantillons où le théorème de Bernoulli ne s'applique plus. Il est en recul aussi par anticipation avec la théorie fishérienne, qui va renouveler la statistique mathématique du XXe siècle. Il reste que lire les chapitres statistiques de Bertrand n'est jamais inutile ni ennuyeux, et certains bonheurs d'écriture demeurent attrayants. Faut-il brûler Bertrand ?

NOTES :

(0). Joseph Bertrand (1822-1900) a cultivé et enseigné le calcul des probabilités pendant près de cinquante ans, principalement à l'École polytechnique et au Collège de France. Son *Calcul des probabilités* est le « résumé de Leçons faites au Collège de France » à diverses reprises et notamment entre 1886 et 1888 (Préface page V). Il a été édité chez Gauthier-Villars, à Paris, en 1888. Bertrand a présenté son ouvrage à l'Académie des sciences dans sa séance du 29 octobre 1888 (*CRAS* 107 (1888), p. 671). L'impression de cette première édition semble s'être poursuivie en 1889, de sorte qu'un grand nombre d'exemplaires portent la date 1889. En 1907, après la mort de Bertrand, une « deuxième édition conforme à la première » fut publiée par le même éditeur, sans aucun changement sinon une pagination légèrement différente, mais avec la même numérotation des paragraphes. Steve Stigler nous a informé qu'il possède dans sa bibliothèque une première édition intermédiaire qui comporte les deux dates, 1889 sur la couverture et 1888 sur la page de titre intérieur. C'est d'ailleurs à Steve Stigler que nous devons l'essentiel de cette note, ainsi que le portrait mélancolique de Joseph Bertrand reproduit ici. Nous l'en remercions bien vivement.

L'édition de « 1889 » est accessible sur Gallica, l'exemplaire numérisé étant celui que Bertrand a offert à la bibliothèque de l'Ecole polytechnique. Nous ferons cependant référence à l'édition de 1907 achetée chez Gibert, il y a plus de quarante ans, pour une somme modeste à l'image du budget de l'acheteur dont il s'agit et du peu d'intérêt porté à la pédagogie bertrandienne en ces temps-là.

(1). Lois du hasard : il s'agit du titre de l'introduction « philosophique » du traité de Bertrand. Comme on le verra ce titre illustre et résume à-fort-peu-près la philosophie générale de ce savant. D'autre part, la locution « lois du hasard », lancée par Bertrand, a été reprise par presque tous les savants de la tradition française et se trouve intégrée au corpus didactique des lycées et collèges. Rappelons que le texte de l'introduction au traité de 1888 a d'abord été publié dans la *Revue des deux mondes,* du 15 avril 1884, p. 758-788, sous le même titre, «Lois du hasard ». Les deux textes ne diffèrent qu'en ce que le cours de 1888 reporte dans son chapitre final la plus grande partie de ce qui concerne la probabilité des décisions.

Notons, en passant, que Bertrand reproduit dans son *Calcul des probabilités* d'autres morceaux déjà rédigés et publiés les années précédentes, principalement dans les *Comptes rendus de l'Académie* en 1882, 1887 et surtout au premier semestre 1888 (plus de vingt notes diverses), mais aussi dans d'autres publications. Signalons particulièrement un article inséré au *Journal des savants,* en novembre 1887, p. 686-705, qui se présente comme un compte rendu de la nouvelle édition de la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace, publiée sous les auspices de l'Académie des sciences, et que l'on retrouve mot à mot disséminé ici ou là dans l'ouvrage de 1888, notamment dans la préface, aux chapitres III, V, VII, XII (paradoxe de Saint-Pétersbourg, théorème de Bernoulli, statistique des naissances) et surtout au chapitre XIII sur la probabilité des décisions. Cet article censé faire l'éloge de la *Théorie analytique* a ceci de caractéristique qu'il ignore résolument l'essentiel du grand traité de Laplace, qu'il en critique certains points mineurs, non sans talent parfois, et qu'il indique quelques idées de Bertrand lui-même, qui ne sont pas toutes dépourvues d'intérêt ni d'originalité. Il serait tentant mais sans doute exagéré de voir là un exemple typique du style de Bertrand qui se plie si naturellement aux exigences pédagogiques.

(2) brûler Bertrand : Rien n'est plus difficile que de porter un jugement sur la vie et l'œuvre de Joseph Bertrand, personnage complexe, sur lequel les témoignages du temps sont excessivement contradictoires. Pour en juger, il suffit par exemple de comparer l'éloge de Bertrand par Marcellin Berthelot, l'ami (et le complice) académique, lu à l'Académie française le 2 mai 1901 (http://www.gutenberg.org/files/14541/14541-8.txt), avec le témoignage non moins éloquent d'Eugène Catalan, dont l'œuvre scientifique et pédagogique n'est pas inférieure à celle de Bertrand, lequel, après avoir ravi quelques unes des rares places que Catalan avait réussi à conquérir de haute lutte, s'employa à le barrer à l'Académie avec une belle constance. Catalan a écrit des souvenirs édifiants, analysés et repris dans le beau livre de F. Jongmans sur Catalan (Mons, 1996), auquel on se reportera. Bertrand n'est cependant pas totalement antipathique. Il possède même une sorte de génie particulier, un charme, un goût de la séduction, un art de la conversation érudite et de la réparti incisive, rapide, volontiers contredisante, extrêmement malicieuse, voire taquine (selon Jules Lemaître), une curiosité alerte, un enthousiasme immodéré pour les « voies simples » ouvertes, hors des académies, par les génies de l'invention, trop méconnus et que Bertrand se plaît, lui, à reconnaître et à encourager, à tort ou à raison (on verra à ce sujet l'article « M. Deprez », rédigé par G. Ramunni pour le *Dictionnaire biographique des professeurs du CNAM,* INRP/CNAM, Paris, 1994, volume I, p. 405-418), un amour définitif pour les explications (attrayantes) de la géométrie et de la combinatoire, …., toutes particularités intéressantes qui peuvent parfois le rendre sympathique. On verra également les jugements contradictoires du *Journal* de Thomas Hirst, reproduits dans l'article biographique « Joseph Bertrand » du site http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies. Nous prenons le parti ici de nous en tenir à Bertrand, pédagogue du hasard, aspect limité et incontestable d'une personnalité multiple et contestable.

(3) paradoxe de Bertrand : on verra notamment un article remarquable de Jacques Harthong, « Le paradoxe de Bertrand – tirage au hasard d'une corde dans un cercle », *l'Ouvert,* 83 (1996), p. 1-15 et la superbe thèse d'Anne Robadey, *Différentes modalités de travail sur le*

général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques, Université Paris 7, 2005. Pour des études plus générales, on se reportera à l'article, toujours intéressant, de O. Sheynin, «Bertrand's work on probability », *Arch. Hist. Exact Sci.* 42 (2) (1994), p. 155-199. et au livre, plus philosophique, de J. von Plato, *Creating modern probability. Its mathematics, physics and philosophy in historical perspective,* Cambridge Univ. Press, 1994.

(4) Pont-Neuf : terminé sous Henri IV, le Pont-Neuf est le plus vieux pont de Paris. Il a résisté à quatre siècles de guerres, de révolutions et d'inondations, au point de devenir un symbole de « solidité », et c'est peut-être ce sens symbolique que Bertrand entend utiliser pour asseoir sa philosophie du hasard. Mais Bertrand a longtemps habité rue de Rivoli sur la rive droite. Il a probablement traversé souvent le Pont-Neuf pour gagner la rive gauche, rive de l'Institut, du Collège de France et de l'Ecole polytechnique.

(5) métaphysique : dans l'éloge cité supra note (2), Berthelot, qui vraisemblablement partage sur ce point les vues de son collègue, écrit : «En dehors des mathématiques, où il était égal à toutes les conceptions, il n'aimait pas à s'élever dans ces hautes régions de la pensée où l'air devient difficilement respirable, et où la nécessité de concilier les antinomies de la métaphysique ne permet pas ces raisonnements absolus et définitifs, si chers aux mathématiciens. À cet égard, J. Bertrand s'écartait des savants du dix-septième et du dix-huitième siècle. S'il poursuivait dans son ordre particulier le même genre de problèmes, il était dissemblable de ses prédécesseurs par une sorte de répulsion qu'excitaient en lui les idées générales, nécessairement vagues et flottantes sur certains points et complexes comme la nature même des choses humaines, qui ne se prêtent pas à la rigueur des démonstrations. Les énoncés généraux excitaient dans Bertrand l'esprit critique, qu'il avait fort aiguisé: il saisissait aussitôt le point faible, le défaut de la cuirasse logique, et il se plaisait à contredire les opinions, les préjugés courants. Cet esprit de subtilité s'est même développé de plus en plus avec les années: à une thèse historique reçue, il s'est plu plus d'une fois à opposer une antithèse spécieuse et intéressante, comme l'ont montré quelques-uns de ses derniers articles sur Pascal. »

(6) Rabelais : Bertrand le cite trois fois, Tiers-livre chapitre 39, Quart-livre, chapitres 27 et 52. Bertrand n'est pas avare de citations ou de références anonymes. Signalons à la sagacité du lecteur l'anecdote de l'abbé Galiani à la Basilicate, que Bertrand attribue à Diderot (chapitre VIII, exergue p. 138, et préface p. VII, VIII), mais dont nous ne connaissons toujours pas l'origine.

Joseph Bertrand a été élu en décembre 1884 à l'Académie française, au fauteuil 40, en remplacement de J.-B. Dumas. Il était membre de l'Académie des sciences depuis 1856 et secrétaire perpétuel de cette société depuis 1874.

(7) Cournot : en réalité nous ne savons ni où ni comment Bertrand a croisé la philosophie de Cournot, mais nous savons très bien quand il a rencontré le philosophe en personne, pour la première fois. C'était en 1840, alors qu'il était élève à l'Ecole polytechnique (major de la promotion 1839), et qu'il se présentait à l'agrégation des facultés des sciences, un concours éphémère, disparu l'année suivante. Le jury de ce concours unique était composé de Cournot, Libri, Poinsot et Poncelet. Trois places étaient mises au concours et devaient en principe déboucher sur des emplois d'agrégés des facultés des sciences, qui ne furent pas créés (et il fallut attendre un siècle pour qu'on songe à créer des postes d'assistants des facultés des sciences). Il y eut quatre candidats, dont le jeune Bertrand, âgé de 18 ans, déjà docteur ès sciences, soutenu par son oncle Duhamel et le clan Arago. Malgré sa réputation d'enfant prodige, Bertrand fut reçu second derrière Jules Vieille, redoutable bête à concours, normalien, docteur ès sciences en 1840, « agrégé des sciences » en 1836, et franc-comtois, qui deviendrait professeur à Louis-le Grand, inspecteur général et recteur. L'année suivante, le jeune Bertrand se présenta au concours d'agrégation de mathématiques (des lycées) présidé par Cournot, en remplacement de Poisson. Bertrand fut classé premier ex-aequo avec Briot (cet autre normalien comtois), ce qui ne dut guère lui plaire non plus. Bertrand venait alors d'entrer à l'Ecole des Mines (4ième sur 4, à cause du dessin, nous dit pudiquement Berthelot). Il suffit d'un regard et tout est dit, et celui-là était dépourvu de bienveillance. De sorte qu'on ne s'étonnera pas des commentaires souvent acides (et peu judicieux) de Bertrand sur la théorie des richesses et celle des jugements de son illustre président de jury, et sans doute aussi de la fascination secrète du jeune Bertrand pour l'intelligence universelle de son maître comtois.

(8) le premier : fait assez rare, Cournot le revendique lui-même dans ses *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes »,* 1872, OC IV p. 9-10 : «Nous croyons avoir éclairci dans d'autres ouvrages et défini, plus exactement que ne l'avaient fait nos devanciers, l'idée du *hasard* en montrant que ce n'est point, comme on l'a tant répété, un fantôme créé pour nous déguiser à nous-mêmes notre ignorance, ni une idée relative à l'état variable et toujours imparfait de nos connaissances, mais bien au contraire la notion d'un fait vrai en lui-même, et dont la vérité peut être dans certains cas établie par le raisonnement, ou plus ordinairement constatée par l'observation, comme celle de tout autre fait naturel … ». Bertrand a certainement lu ou parcouru ce livre comme il a lu tous les traités de Cournot ; on en trouvera d'autres signes plus loin.

(9) définition du hasard : cette absence de définitions a choqué les premiers commentateurs qui se sont efforcés d'y suppléer. Comme on sait, le premier d'entre eux à tenter sa chance est Poincaré, dans un texte intitulé précisément «Le hasard » et publié en 1907 (*Revue du Mois,*

3, p. 257-276, *Science et Méthode,* 1908, *Calcul des probabilités,* 2e éd., 1912). Poincaré propose (sans grande conviction) deux définitions du hasard : le hasard qui surgit soudain lorsque des causes imperceptibles entraînent des conséquences cataclysmiques, ou bien le hasard issu de causes complexes trop mélangées pour être analysables. Il ajoute qu'aucune de ces définitions ne lui paraît assez « objective» pour tenir la route. Poincaré n'a pas la foi bertrandienne ou cournotienne. Au dire de Borel, c'est un sceptique transcendantal et s'il admet la théorie du hasard, c'est dans la seule mesure de sa cohérence mathématique, un bon théorème valant mieux qu'une mauvaise définition. Borel qui suit également Bertrand (et à travers lui Cournot), dans un ouvrage intitulé lui aussi *Le hasard,* Alcan, Paris, 1914, se contente de la seconde définition de Poincaré (la complexité des causes) dont il reconnaît, à son tour, le peu d'objectivité, mais cela ne l'effraie en rien, puisque rien n'est jamais véritablement objectif, en aucune façon. Quant à Bachelier, autre disciple de Bertrand, dans son ouvrage de vulgarisation scientifique, *Le jeu, la chance et le hasard,* Flammarion, Paris, 1914, il finit par conclure qu'il n'existe pas de bonne définition du hasard pour la raison simple que le « hasard n'existe pas » (p. 10). Ce qui existe en revanche ce sont les lois mathématiques du hasard dont le jeu (et la spéculation) sont les images physiques les plus appropriées «Si la spéculation n'existait pas, il faudrait l'imaginer pour mieux concevoir les lois du hasard » (p. 178). On pourrait donner d'autres exemples, chez Lévy par exemple qui nie l'existence d'un hasard objectif mais le fait intervenir sans cesse dans sa théorie mathématique comme idée directrice sans autre définition. On peut en dire tout autant de Fréchet, qui, dans son premier livre du fascicule III du tome I du grand *Traité* de Borel, *Généralité sur les probabilités. Éléments aléatoires,* Paris, Gauthier Villars, 1936, 2e éd. revue et augmentée, ibid., 1950 (en réalité 1945), écrit, p. 4 : « Nous admettons ici le hasard comme une notion familière et nous supposons qu'on sait distinguer parmi les événements, ceux qui sont fortuits », point de vue strictement bertrandien, bien que Fréchet, le plus « objectiviste » de tous, préfère se recommander directement de Cournot qu'il cite.

Bref la définition importe peu dans la tradition française, disons bertrandienne pour simplifier, ce qui importe c'est la reconnaissance du hasard comme idée claire, comme intuition fondamentale, qui irrigue toute la théorie mathématique des probabilités.

(10) lois du hasard : L'expression n'est bien sûr pas de Bertrand lui-même, elle est déjà présente dans la littérature spécialisée de la seconde moitié du XIXe siècle, par exemple chez Alfred de Courcy, un actuaire important, qui publie en 1862 un *Essai sur les lois du hasard, suivi d'études sur les assurances,* Paris, Guillaumin. Tout semble partir de la fameuse « loi des grands nombres » locution créée par Poisson en 1835. Ce n'est pas encore vraiment une loi du hasard mais c'est déjà une loi. On trouve naturellement l'expression « lois du hasard » chez Cournot, dès 1843, mais Cournot met alors en garde contre les dangers et les illusions qu'il y aurait à doter le hasard d'une énergie propre, comme ce serait le cas s'il s'agissait d'une cause (substantielle), (*Exposition de la théorie des chances,* 1843, OC I, p. 77-78), les

« lois du hasard » sont des théorèmes mathématiques de la théorie mathématique des probabilités ou des chances. Cournot se laisse aller à parler véritablement et sans vergogne de « lois du hasard » seulement dans ses derniers traités philosophiques (1872 et 1875). La difficulté évidente de cette locution vient de ce que le hasard est une idée et qu'on ne peut guère parler de lois d'une idée, à moins que celle-ci ne s'incarne dans une théorie physique ou mathématique, ce qui oblige à des explications peu compatibles avec les buts pédagogiques poursuivis par Bertrand, de sorte qu'il est peut-être préférable de procéder par aphorisme : « Le hasard a des caprices, jamais on ne lui vit d'habitudes », « Le hasard, à tout jeu, corrige ses caprices, les irrégularités mêmes ont leur loi. », etc. L'expérience prouve en tout cas qu'il a réussi d'une certaine façon, là où Cournot et ses explications profondes et exigeantes ont échoué.

(11) deux mètres : Bertrand mesurait un mètre soixante-quatre, une taille fréquente chez les adultes, de sexe masculin, nés en mars 1822.

(12) Poincaré, le premier, fait observer que dans le cas continu l'attribution au hasard de telle ou telle loi résulte d'une convention, ce qui évidemment supprime les paradoxes de Bertrand. Mais, cohérent avec lui-même, Poincaré étend cette remarque au cas d'une population finie et considère que là aussi la définition de la probabilité par énumération résulte d'une convention, celle consistant à tenir pour équiprobable chacune desdites chances, de sorte que la définition classique de la probabilité n'est en rien fondée a priori. Heureusement elle prend un sens mathématique puisque la loi uniforme se retrouve à la limite de presque tous procédés répétés de choix ou de tirages effectués arbitrairement. Borel, qui a le sens pratique, renvoie dos-à-dos Bertrand le dogmatique et Poincaré le sceptique, tout en se tenant plus près de Bertrand que de Poincaré. Certes la définition classique bertrandienne est relativement peu objective, mais cette soi-disant convention qui la rend douteuse est fondée en raison et en pratique et en mathématique, et la raison et la pratique et les mathématiques permettent très bien de lever les paradoxes de Bertrand. Et Borel ajoute que Bertrand le savait, mais qu'il n'en a rien dit. Rappelons que Borel (comme Poincaré) connaissait Bertrand personnellement. Il a fréquenté à partir de 1898 la famille Appell à Saint-Germain-en-Laye, où il a rencontré parfois Joseph Bertrand qui était l'oncle de madame Paul Appell, celle-ci, étant la fille d'Alexandre Bertrand le frère aîné de Joseph, conservateur du Château de Saint-Germain et membre de l'Académie des inscriptions et belles-lettres. Émile Borel a épousé Marguerite, la fille aînée de Paul Appell en octobre 1901. On verra les souvenirs de Marguerite Borel pour des révélations intéressantes sur la famille Bertrand (C. Marbo, *Souvenirs et rencontres à travers deux siècles,* Paris, Grasset, 1968. On verra aussi P. Guiraldenq, *Emile Borel 1871-*

1956. L'espace et le temps d'une vie sur deux siècles, Saint-Affrique, Imprimerie du Progrès, 1999).

On pourrait s'étonner que nous rassemblions ici des auteurs (parisiens) qui semblent ne s'accorder sur rien. Pour certains le hasard existe objectivement, pour d'autres il n'est pas tellement objectif et peut-être même pas du tout. La probabilité des actions de ce hasard est bien définie, elle ne l'est pas tant que cela, elle est objective, subjective, arbitraire, conventionnelle, fictive, etc., mais ces oppositions apparemment irréductibles ne le sont pas réellement. Tous ces auteurs parlent la même langue, ou peu s'en faut. Ils « admettent le hasard » et ils font sensiblement la même théorie et les mêmes applications avec plus ou moins d'enthousiasme et de scepticisme. On comprend que l'Ecole de Paris ait été réticente aux théories empiriques de la probabilité fondées sur l'axiomatisation des suites au hasard, et notamment la théorie des collectifs de von Mises. Le hasard n'a pas vraiment de définition philosophique, il ne saurait avoir de définition mathématique. C'est une illusion de croire qu'on peut « imiter le hasard » à l'aide d'un « mécanisme rationnel quelconque ». On verra à ce sujet les critiques de Borel développées par exemple dans le dernier volume de son *Traité, Valeur pratique et philosophie des probabilités,* Paris, Gauthier Villars, 1939, p. 82-84.

(13). Borel, *Les probabilités et la vie,* Paris, PUF (Que sais-je ?), 1943. Dans un ouvrage antérieur, *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes,* Paris, Gallimard (NRF), 1941, Borel parle aussi de la *loi fondamentale du hasard* (p. 98) : « les phénomènes extrêmement improbables ne se produisent jamais », énoncé typiquement bertrandien (ou faiblement cournotien) qui supposent que les phénomènes en question ont une probabilité bien définie (ou plus ou moins bien définie).

(14) principe de Cournot : l'histoire de cette locution, qu'on trouve assez souvent entre les deux guerres, a été étudiée par Glenn Shafer dans les travaux suivants auxquels on se reportera avec grand profit : *Probability and Finance: It's Only a Game!* (with Vladimir Vovk) New York, Wiley, 2001. (Japanese translation to be published by Iwanami Shoten in July 2006). « The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe » (with Vladimir Vovk). *Statistical Science* Vol. 21, No. 1, pp. 70-98, 2006. « From Cournot's Principle to Market Efficiency », to appear in *Augustin Cournot, Economic Models and Rationality*, edited by Jean-Philippe Touffut and published by Edward Elgar. (et une édition française du même volume, *Augustin Cournot et les modèles de l'économie*, Paris, Albin Michel, à paraître.) Des

versions étendues des deux dernières études se trouvent sur le site www.probabilityandfinance.com.

(15) Saint-Maurice : commune du Val-de-Marne qui accueille depuis le XVIIe siècle un très célèbre hospice, longtemps appelé asile de Charenton, où fut interné Emile Barbier. Il est établi que Joseph Bertrand vint l'y visiter au début des années 1880, lui fit accepter une chambre individuelle et l'en fit sortir à une date que nous ignorons, postérieure à l'année 1883.

Il existe un autre cas célèbre de mathématicien créatif, André Bloch (1893- 1948). enfermé à Charenton après avoir assassiné en 1917 son frère Georges, son oncle et sa tante. Sur lui, on verra, H. Cartan, J. Ferrand, « Le cas André Bloch », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques,* P. Dugac ed., 8 (1988), p. 211-219. André Bloch souffrait d'une pathologie dangereuse, le rationalisme morbide, dont fort heureusement Émile Barbier était dépourvu, lui qui, selon Darboux, se contentait d'être « religieux à l'excès » (lettre à Houêl du 20 avril 1883). Deux formes d'excès, excès de raison, excès de foi, contre lesquels le mathématicien doit sans cesse se prémunir.

(16) «Facile videbis hunc calculum esse saepe non minus nodosum quam jucundum ». J. Bertrand précise dans le *Journal des savants,* novembre 1887, p. 686, que cette phrase se trouve « dans une lettre adressée en 1734 à l'un des Bernoulli », que nous n'avons pu consulter.

(17) Signalons cependant au chapitre III, n° 39 et suivants, des exemples d'utilisation de la méthode des espérances pour calculer une probabilité plus simplement, en particulier la méthode de Barbier pour le problème de l'aiguille molle. Émile Barbier est un des « génies de l'invention » découverts par Bertrand, qui nous intéresse ici au premier chef. Sur lui, on lira la notice de J. Bertrand paru dans l'annuaire 1890 de l'*Association des anciens élèves de l'Ecole normale,* les notices du DBF ou du DSB, la très belle thèse d'Anne-Marie Décaillot, *Edouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXe siécle,* Univ. Paris V, 1999, et l'article de E. Seneta, K. H. Parshall, F. Jongmans, « Nineteenth-century Developments in Geometric Probability : J. J. Sylvester, M. W. Crofton, J.-E. Barbier and J. Bertrand », *Arch. Hist. Exact sci.,* 55 (2001), p. 501-524. Toutefois le personnage reste une énigme, ce qui n'est pas sans avantage.

(18) jeu de pile ou face : il s'agit d'un exemple historique traité par tous les auteurs depuis l'origine de la théorie, sous le nom de jeu de « croix ou pile ». La locution « pile ou face » est peu usuelle encore en1870. Cournot, lexicographe assidu, ne l'emploie jamais, même dans ses derniers textes. Littré signale l'expression à l'article pile, comme « synonyme » de croix ou pile, visiblement encore d'usage plus fréquent. Bertrand peut être considéré comme le premier mathématicien à introduire l'expression dans un traité de calcul des probabilités. De la même façon, la locution « ruine des joueurs » qui figure en titre au chapitre VI est, d'une certaine façon, une création bertrandienne, qui sera reprise par tous les auteurs suivants, et deviendra l'un des grands thèmes probabilistes du XXe siècle. Les savants précédents de Moivre à Laplace utilisent plutôt « durée du jeu » pour désigner l'ensemble des problèmes de ruine. Si l'on mesure l'importance d'un traité d'enseignement au nombre d'expressions dont il impose l'usage, il faut placer le traité de Bertrand dans le peloton de tête des ouvrages de même nature, non loin de l'*Exposition* de Cournot, ou peut-être même devant elle.

Sur l'historique du problème de la « durée du jeu », on verra A. Hald, *A History of Probability and Statistics before 1750,* New York, Wiley, 1990.

(19) *Comptes rendus de l'Académie des sciences,* 94 (1882), p. 185-186.

Sur cette note on verra aussi les commentaires de O. Sheynin, op. cit. supra note 3, p. 164-165.

(20) Le premier ouvrage pédagogique français, qui utilise explicitement le « lemme de Bienaymé » pour démontrer le théorème de Bernoulli et ses généralisations naturelles, paraît être le célèbre petit livre de M. Fréchet et M. Halbwachs, *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, Paris, Dunod, 1924, p. 175. Puisque nous en avons l'occasion, rappelons ici très brièvement le contexte de ce cours très extraordinaire, qui se rattache à la tradition bertrandienne et s'en écarte en même temps.

Maurice Fréchet a été nommé à la nouvelle Université de Strasbourg en 1919 et ses travaux qui jusqu'alors étaient exclusivement théoriques vont s'infléchir vers les applications. De 1919 à 1928, Fréchet est directeur de l'Institut de mathématiques de Strasbourg et titulaire de la chaire d'Analyse Supérieure à la Faculté des sciences, ce qui correspond à ses goûts scientifiques et à l'essentiel de son oeuvre commencée quinze ans plus tôt. Ses cours d'Analyse supérieure sont chaque année ou presque différents, toujours originaux et source de publications ultérieures. Toutefois l'activité de Fréchet s'élargit dès 1919. En effet pour assurer une transition nécessaire les programmes de la Faculté des sciences de Strasbourg sont pendant un temps aménagés de sorte que les étudiants engagés dans un cycle d'études allemand puissent terminer leurs cursus. L'Université de Strasbourg dont le rôle national et international a souvent été souligné doit devenir également un pôle de développement régional qui permettra à l'Alsace libérée de retrouver sa place naturelle dans l'Économie de la Nation dont la barbarie allemande l'a outrageusement éloignée. Ses maîtres ont pour mission de diffuser la culture française et démontrer qu'elle est infiniment plus riche et plus féconde que la culture allemande, non seulement pour la science fondamentale mais aussi pour tout ce qui touche à l'activité quotidienne des entreprises et des hommes. Fréchet a l'âme d'un missionnaire. Son engagement est total et d'une sincérité absolue (quoique résolument au service du génie français). Il multiplie les interventions internationales, mais à Strasbourg même une part importante de ses enseignements est consacrée aux mathématiques appliquées françaises, la nomographie ou théorie des abaques (une spécialité bien française codifiée par Maurice d'Ocagne et les ingénieurs français), cours qui sera publié en 1928, ou la "Recherche des lois empiriques par des formules mathématiques" à l'usage des chimistes, physiciens et ingénieurs, publié en 1930. La Faculté des sciences de l'Université de Strasbourg veut en effet former des chimistes, des physiciens, des ingénieurs comme l'Université allemande et non pas seulement déplorer la fuite de ses étudiants vers les grandes écoles parisiennes et enseigner devant des bancs vides, suivant l'expérience constante des universités provinciales depuis le début du XIXe siècle. Cette politique volontariste de développement des sciences appliquées n'a sans doute pas porté tous les fruits escomptés, mais elle est originale en France à bien des égards. Il faut d'ailleurs signaler que l'héritage allemand n’a pas été éradiqué partout. On peut au reste s'en féliciter. L’école de chimie de Mulhouse, par exemple, a longtemps continué de fonctionner sur le mode allemand. Les travaux pratiques en laboratoire n'étaient pas seulement réduits à la répétition des expériences décrites dans le polycopié, mais laissaient toute initiative aux étudiants à qui était confié un sujet à traiter, à charge pour eux de rassembler les éléments bibliographiques et d'organiser leur travail comme ils l'entendaient, les laboratoires restant ouvert de 8 heures du matin à 8 heures du soir.

Pour ce qui nous concerne, il suffit de mentionner les activités de Fréchet au sein du tout nouvel Institut d'Enseignement Commercial Supérieur de Strasbourg. L'IECS a été créé le 11 décembre 1919 par une décision de la Chambre de Commerce et d'Industrie de Strasbourg, grâce à des subventions émanant de la Chambre de Commerce, de la Ville, du Conseil Général et de donateurs privés. Il s'agit pour ses fondateurs de développer un enseignement commercial français, nécessaire depuis que l'Alsace est redevenue française avec une nouvelle langue officielle et de nouvelles lois. Les cadres formés à l'IECS sont indispensables pour le développement de l'économie régionale alors très largement dépendante de l'Allemagne.

L'IECS est rattaché à l'Université qui met à sa disposition ses professeurs et (au moins dans un premier temps) ses locaux. L'Université française doit démontrer qu'elle est capable de rivaliser et même de l'emporter sur les formations commerciales allemandes, les Handelshochschule, dont l'enseignement est jugé par les fondateurs de l'IECS comme trop disparate avec des cours excessivement spécialisés (toujours l'universalité du génie français face à l'éparpillement des techniques étroitement spécialisées allemandes). On comprend volontiers que Fréchet, directeur de l'Institut de mathématiques, ait tenu à assurer lui-même le cours de mathématiques appliquées prévu en seconde année. L'IECS s'inspire de l'exemple de HEC à Paris mais aussi de l'École de Commerce Solvay à Bruxelles et surtout du "business spirit" américain. Les étudiants sont recrutés après le baccalauréat, en fait après l'Abitur allemand dont ils sont tous titulaires. Ils peuvent aussi être admis sur concours, lorsqu'ils ne sont titulaires d'aucun diplôme. Leur formation dure deux ans, elle est sanctionnée par un mémoire de fin d'études. L'enseignement des langues vivantes est très poussé, on peut y apprendre non seulement le français et l'allemand mais aussi l'anglais, l'espagnol, l'italien, l'arabe parlé (pour les colonies françaises) et trois langues slaves afin de développer le commerce vers l'Est, le russe, le polonais et bien sûr le tchèque, l'Alsace-Lorraine étant jumelée avec la Tchécoslovaquie. La première promotion forte d'une quarantaine d'élèves date de 1920. Ce sont surtout des fils et filles de notables alsaciens et quelques étrangers venus de l'Est. L'IECS existe toujours ; il est rattaché à l'Université Robert Schuman-Strasbourg 3.

C'est Fréchet donc qui prend en charge l'organisation du cours de mathématiques appliquées de l'IECS, un cours qui lui donne l'occasion de s'intéresser pour la première fois au calcul des probabilités et à la statistique, et qu'il va enseigner aux premières promotions de l'Institut jusqu'en 1928, date de son départ pour Paris et l'IHP. Fréchet a toujours préparé ses enseignements avec le plus grand soin, ses archives en témoignent, chaque leçon est généralement totalement rédigée et Fréchet ne ménage pas ses efforts. Pour l'Institut de Commerce de Strasbourg, Fréchet a la chance de bénéficier de la collaboration de son collègue de la Faculté des Lettres et ancien condisciple de l'ENS, le sociologue Maurice Halbwachs qui l'initie à la statistique et l'oriente vers les Sciences sociales. Ainsi Fréchet, contrairement à Borel et la quasi totalité des futurs grands théoriciens des probabilités de l'après-guerre, n'est pas venu au calcul des probabilités par la physique ou les mathématiques ensemblistes ou l'actuariat théorique mais par les applications de la statistique aux sciences économiques et sociales, en cela il suit une tradition allemande bien représentée à Strassburg par G. F. Knapp (1842-1926), qui y professa la statistique et l'économie de 1874 à 1918. Fréchet en restera marqué tout au long de sa seconde vie scientifique d'après Strasbourg. Son cours de calcul des probabilités à l'IECS, écrit avec Halbwachs dont on reconnaît aisément les interventions, est publié en 1924, chez Dunod. Les deux auteurs se proposent de présenter le calcul des probabilités sans utiliser le langage de l'analyse avec des applications aux assurances et à la statistique. "Dans le détail comme dans l'ensemble, écrivent-ils en introduction, nous ne nous sommes pas tenus à suivre les traces de nos devanciers". Un certain nombre des thèmes originaux que Fréchet développera dans les quarante années qui vont suivre, notamment dans son premier fascicule du *Traité* de Borel, s'y trouvent déjà rassemblés. Fréchet gardera toute sa vie le goût de l'enseignement des mathématiques appliquées aux Sciences humaines pour des auditeurs dont le bagage scientifique est réduit au minimum prévu par les textes ; il reviendra plusieurs fois sur ces sujets dans d'innombrables publications rassemblées dans un livre intitulé *Les mathématiques et le concret*, Paris, PUF, 1955.

Fréchet ne se contente pas de faire oeuvre de pédagogue et de missionnaire. En découvrant (avec ses jeunes élèves) le calcul des probabilités en 1921, il se prend au jeu et entreprend une série de travaux qui se poursuivront pendant un demi siècle. Ses premières publications sont pour la plupart très appliquées et servent sans doute d'illustrations à ses cours. Elles lui vaudront le prix Montyon de Statistique de l'Académie des sciences, le premier prix académique qui lui ait été décerné, et surtout l'attention et la considération de Borel qui ne l'oubliera plus. Mais bientôt Fréchet se rend compte que les notions probabilistes semi formalisées en usage, ressemblent à s'y méprendre aux concepts de l'analyse générale dont il a commencé l'étude dans sa thèse et qui forme le fond de son oeuvre scientifique. En particulier cette convergence si particulière que l'on rencontre dans le théorème de Bernoulli dont Laplace avait observé qu'elle procédait d'une double approximation, la fréquence (ou l'erreur moyenne) est très probablement très proche de la probabilité (ou de la vraie valeur), correspond tout à fait à la "convergence en mesure" de la théorie des fonctions ; ainsi les quantités aléatoires sont susceptibles de "divers modes de convergence" à l'image des fonctions d'une variable réelle (73) et ces modes ne sont pas équivalents, de sorte qu'il y a plusieurs ordres de lois des grands nombres qu'il faut démêler. On comprend que Fréchet en ait été frappé, comme d'ailleurs le furent à la même époque les mathématiciens de l'école polonaise. Il en fera l'objet de son premier cours de probabilités à l'IHP en 1928-1929 publié en 1930 dans un bel article qui est à l'origine, plus encore que les travaux polonais et russes, de l'axiomatique ensembliste abstraite de Kolmogorov, venu visiter Fréchet pendant l'été 1930 sur la Côte d'Azur. Nous rappelons ce point bien qu'il soit un peu à l'écart de notre histoire parce qu'il éclaire la personnalité de Fréchet (et de Kolmogorov) de façon intéressante. Au second semestre de l'année 1928-1929, en effet, Fréchet expose à Paris la théorie des variables aléatoires de façon très proche de celle de son cours de l'IECS de Strasbourg (1924, chapitre V) : "on appelle variable aléatoire un nombre X(E) dont la valeur est fixée par le résultat aléatoire E d'une épreuve appartenant à une certaine catégorie C.... On voit que X(E) est une fonctionnelle dont la valeur X(E) est numérique, dont la variable E est le résultat d'une épreuve et dont le champ de définition est C. Dans ce qui suit, toutes les fois que nous considérons simultanément plusieurs variables aléatoires X(E), Y(E), ..., nous les supposerons toujours définies sur la même catégorie C d'épreuves, de sorte que nous pourrons généralement nous dispenser d'affecter une lettre à cette catégorie". Fréchet observe alors que "en faisant jouer à la probabilité le rôle de la mesure linéaire" on peut étendre aux suites de variables aléatoires les modes de convergence des fonctions numériques d'une variable réelle, convergence presque partout, convergence en mesure, convergence en moyenne d'ordre r et qu'on peut alors énoncer pour le cas de variables aléatoires les propriétés habituelles aux fonctions numériques, notamment les implications naturelles qui lient les différents modes de convergence, leurs éventuelles possibilités d'être distanciés, les questions de compacité (au sens de Fréchet), etc. C'est d'ailleurs Fréchet qui a introduit la locution "convergence en probabilité", par analogie avec la "convergence en mesure" des analystes et bien d'autres choses encore.

Bien que "C" soit visiblement un ensemble abstrait, la dénomination fonctionnelle l'indiquant d'ailleurs assez clairement (une fonctionnelle dans le langage de Fréchet est une fonction définie sur un ensemble abstrait), il serait exagéré d'en déduire que Fréchet présente devant ses élèves de l'IECS et du certificat de Borel à l'IHP une axiomatique ensembliste explicite du calcul des probabilités (qui ne serait d'ailleurs ni la seule ni la première, d'autres ayant vu le jour simultanément un peu partout). En réalité Fréchet suit de très près le traité de Cournot (1843, OC I, chapitre 6) qu'il interprète à sa manière, l'analyse générale dont il est familier depuis vingt ans lui permettant de développer quelque peu la pensée de Cournot. Cependant pour Fréchet comme pour Bertrand et Borel, la probabilité définie dans une catégorie d'épreuves est une "probabilité", une réalité physique ou psychologique, qui existe sur notre terre quoi qu'il arrive, alors que la mesure linéaire de Borel, "la mesure", est un concept mathématique du plus haut niveau situé quelque part au delà du septième ciel. Qu'aussi bien l'une que l'autre puissent relever de la définition générale (d'ailleurs due à Fréchet) d'une "fonction additive d'ensembles abstraits", Fréchet ne paraît pas avoir trouvé utile de l'affirmer nettement dans ses livres ou dans ses cours. La Noblesse et le Tiers-État sont libres et égaux en droit mais leurs valeurs pratiques et morales n'étant pas les mêmes, on les traitera différemment. Le calcul des probabilités et la théorie de la mesure linéaire ne sont pas de la même caste, ce qui ne les empêche nullement d'être susceptible d'abstractions interchangeables et d'y trouver une part de leur richesse d'applications. Kolmogorov appartient à une autre génération et les frontières entre analyse et probabilités doivent lui apparaître comme étrangement byzantines, il n'empêche qu'il considérera toujours Fréchet comme un maître. Sur tout cela on lira avec profit l'article de J. L. Doob, « The Development of Rigor in Mathematical Probability, (1900-1950), » *Development of Mathematics 1900-1950,* ed. J.P. Pier, Basel : Birkhäuser, 1994, p. 157-169, qui décrit de l'intérieur la lente mais inexorable intrusion de la "rigueur mathématique" (en l'occurrence la théorie de la mesure) dans le calcul des probabilités et son enseignement de 1900 à 1950.

Sur Fréchet et les statistiques, on verra l'article très complet de M. Armatte, «Maurice Fréchet statisticien, enquêteur et agitateur public », *Revue d'Histoire des Mathématiques,* 7, 1 (2001), p. 7-65. Pour des développements sur Fréchet à Strasbourg, on se reportera à R. Siegmund-Schultze, « Maurice Fréchet à Strasbourg : les mathématiques entre nationalisme et internationalisme »», in E. Crawford, J. Olff-Nathan ed. , *La science sous influence : l'université de Strasbourg enjeu des conflits franco-allemands,* Strasbourg, La Nuée Bleue, 2005, p. 185-196. Sur Halbwachs, on verra le numéro spécial, « Maurice Halbwachs et les sciences humaines de son temps », *Revue d'histoire des sciences humaines,* 1 (1999).

(21) I. J. Bienaymé, «Considérations à l'appui de la méthode de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés », *C. R. Acad. Sci.,* 37 (1853), p. 309-324. Ce mémoire a été reproduit à l'identique dans le *Journal de Liouville,* S2 12 (1867), p. 158-175. Il prend la défense de Laplace contre Cauchy et Le Verrier et aussi contre Gauss, et a, sans doute été lu (plus ou moins mal) par le jeune Bertrand, qui estimera utile de publier quelques mois plus tard une défense de Gauss (contre Bienaymé) sous la forme d'une traduction des grands mémoires gaussiens sur la méthode des moindres carrés, Paris, Mallet-Bachelier, 1855 (Gallica 1995). Ce qui prouve au moins que Bertrand était au courant du mémoire de Bienaymé de 1853, même s'il n'en a pas compris tout de suite l'intérêt.

Sur Bienaymé on verra le livre désormais classique de C. C. Heyde et E. Seneta, *I. J. Bienaymé. Statistical Theory Anticipated,* New York, Springer, 1977, qui analyse notamment ce mémoire.

(22) P.-L. Tchébychev, « Des valeurs moyennes », *Journal de Liouville,* S2 12 (1867), p. 177-184. Sur le contexte de cet article, on verra la belle thèse à paraître de Norbert Verdier. La méthode de Tchébychev est identique à celle de Bienaymé qu'il ne cite pas. Seules les applications en diffèrent quelque peu. Liouville dut s'en apercevoir, puisqu'il reproduisit l'article de Bienaymé de 1853, comme on l'a dit supra note 21, juste avant l'article de Tchébychev accompagné de cette note d'une diplomatie parfaite : « Depuis longtemps nous nous proposions de reproduire dans le *Journal de mathématiques* l'important travail de M. Bienaymé. Quatorze années se sont écoulées, nous croyons pourtant que nos lecteurs l'accueilleront encore aujourd'hui avec un vif intérêt ». Liouville connaissait très bien les travaux de Bienaymé qu'il avait présentés au Bureau des longitudes et sans doute aussi dans ses cours du Collège de France consacrés au calcul des probabilités en 1854, 1863 et 1873. On verra à ce sujet, J. Lützen, *Joseph Liouville 1809-1882 : Master of Pure en Applied Mathematics,* New York, Springer-Verlag, 1990, p. 179-180.

Il est d'ailleurs tout à fait possible que Tchébychev ait retrouvé la méthode de Bienaymé indépendamment, tant elle est naturellement probabiliste : évaluer une espérance plutôt qu'une probabilité. Cela n'a guère d'importance en regard du fait indéniable que cet article a joué un rôle important dans le développement de l'Ecole de Saint-Pétersbourg de théorie des probabilités. Sur l'ensemble de cette affaire, on verra l'ouvrage cité note précédente et surtout le bel article de E. Seneta, «Early influences on Probability and Statistics in the Russian Empire », *Arch. Hist. Exact Sci.,* 1998, p. 201-213.

(23) Bertrand 1889, chapitre V, n° 76.

Nous ne connaissons pas de réactions de Tchébychev à la note de 1882 et au chapitre V du *Calcul des probabilités* de Bertrand, pas plus que nous n'avons retrouvé de traces d'une réaction de Bienaymé à l'article de Tchébychev. Les hommes se connaissaient et s'appréciaient. Tchébychev a été élu associé étranger de l'Académie des sciences de Paris en 1874, Bertrand étant secrétaire perpétuel de l'Académie, Liouville et Bienaymé y siégeant. La même année, au Congrès de l'AFAS de Lyon, Tchébychev reconnaîtra l'antériorité de Bienaymé et précisera même dans le texte de sa conférence inséré au *Journal de Liouville,* S2 19 (1874) p. 157-158 : « La démonstration simple et rigoureuse de la loi de Bernoulli, que l'on trouve dans ma Note, sous le titre : *Des valeurs moyennes,* n'est qu'un des résultats que l'on tire aisément de la méthode de M. Bienaymé, et d'après laquelle il est parvenu lui-même à démontrer une proposition sur els probabilités, d'où la loi de Bernoulli découle directement ». On ne saurait mieux dire.

(24) On connaît alors au moins trois types de démonstrations différentes de ce que Bertrand appelle le théorème de Bernoulli (qui est un mélange de la loi faible des grands nombres et du théorème central limite pour des variables de Bernoulli) : la démonstration initialement donnée dans *l'Ars conjectandi,* très ingénieuse, mais qui ne donne pas l'approximation normale, celle de Moivre basée sur la formule de Stirling qui la donne, et celle de Laplace, absolument générale mais difficile à suivre, par les « fonctions génératrices » au sens de Laplace, c'est à dire ce que Poincaré appelle les « fonctions caractéristiques », ou les transformées de Fourier. Bertrand ne signale nulle part la méthode de Laplace, que Poincaré n'exposera très rapidement (sans la nommer) que dans la seconde édition de son cours de probabilités, en 1912, peut-être après l'avoir lue chez Liapunov. Un successeur de Bertrand et de Poincaré, rue Descartes, Paul Lévy, reprendra et développera la méthode des fonctions caractéristiques de Poincaré-Laplace (en citant Poincaré et non Laplace) dans son premier cours de probabilités à l'Ecole polytechnique en 1919 (p. 506-512 des feuilles polycopiées). Et dès l'année suivante 1920-1921, il exposera devant les polytechniciens (sans doute surpris) une théorie générale des fonctions caractéristiques et de la convergence en loi qu'il publiera bientôt sous forme de notes aux *Comptes rendus*, avant de les intégrer à son livre de 1925. Comme il est naturel, sous l'emprise d'une sorte d'euphorie pédagogique et scientifique, Lévy en fera parfois un peu trop dans son cours de 1920. Il énonce par exemple (p. XXVIII des feuilles) qu'on peut démontrer que « la loi de Gauss est la seule jouissant de la propriété qu'en composant deux erreurs de même forme on obtienne une erreur de même forme ». Ce qu'il corrigera bientôt en construisant la théorie des lois stables (et ce qui contredit un peu

l'anecdote qu'il relate p. 77 de ses souvenirs, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien,* Paris, Blanchard, 1970.)

Tout cela pour relativiser les certitudes bertrandiennes. La complexité analytique est certes assez peu pédagogique, mais elle engendre parfois, quoi qu'on en pense, des objets inattendus qui eux peuvent avoir des retombées géométriques, physiques ou pédagogiques, après les traductions et les simplifications d'usage. La beauté peut naître aussi bien de la complexité que de la simplicité.

Pour un historique complet et très bien fait du « théorème de Bernoulli », on verra le livre de A. Hald, *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930,* New York, Wiley, 1998. Pour d'autres références et une analyse des travaux de Mises et Polya, contemporains et indépendants de ceux de Lévy, on verra un article récent de R. Siegmund-Schultze, « Probability in 1919/20 : the von Mises-Polya-Controversy, *Arch. Hist. Exact Sci.,* 60 (2006) p. 431-515.

(25) D'après P. Gauja, *Les fondations de l'Académie des sciences (1881-1915),* Hendaye, Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia, 1917, p. 348-349, le prix Francoeur résulte d'une donation de rentes à 3%, faite en date du 24 octobre 1882, par madame veuve Isidore Francoeur. L'acte de donation précise que « le lauréat sera choisi de préférence parmi les jeunes savants dont la situation n'est pas encore assurée, ou parmi les géomètres dont la vie consacrée à la science, n'aurait pas suffisamment assuré le repos et l'aisance de leur existence ». Barbier appartient sans doute à la seconde catégorie, bien qu'on ne sache pas exactement à quoi sa vie a été consacrée. Isidore Francoeur était le fils de Louis-Benjamin Francoeur, polytechnicien de la promotion 1794, professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique et à la Faculté des sciences de Paris. Isidore était lui-même professeur de mathématiques au Collège Chaptal et à l'Ecole des Beaux-Arts à laquelle il a légué sa bibliothèque et celle de son père. Signalons parmi les lauréats suivants du prix Francoeur, Emile Lemoine, qui reçut les mille francs du prix, de 1902 jusqu'à sa mort en 1912 (1905 excepté). Lemoine est né le 22 novembre 1840 à Quimper et Barbier le 19 mars 1839 à Saint-Hilaire-Cottes dans le Pas-de-Calais, deux savants de la « période creuse », qui en valent bien d'autres. Le prix Francoeur n'a pas survécu à la chute du franc après la Première Guerre mondiale.

(26) On verra à ce sujet un article remarquablement intéressant de P. Diaconis et S. Zabell, « Closed Form Summation for Classical Distributions : Variations on a Theme of de Moivre », *Statistical Science*, 6 (1991), p. 284-302. On lira en particulier le paragraphe 8 de cet article qui éclaire merveilleusement le thème des promenades de Charenton.

Il est parfaitement évident que Barbier ignore que sa formule est déjà connue. Celle-ci a d'ailleurs été redécouverte à de nombreuses reprises. Comme l'écrivent fort justement Diaconis et Zabell : « De Moivre's formula is at once easy enough to derive that many people have subsequently rediscovered it, but also hard enough to have often been considererd worth publishing, varying and generalizing. »

(27) Ce dernier paragraphe doit s'interpréter ainsi, on jette une multitude de fois les *2n* pièces et on s'arrête à chaque fois qu'on a obtenu un coup juste, c'est à dire en moyenne après $\sqrt{n\pi}$ parties, le théorème de Bernoulli nous dit alors que la somme des différences entre deux coups justes vaut sensiblement $M.2nP(S_{2n}=0) \cong \sqrt{n\pi}.2n\frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 2n$.

(28) On peut naturellement considérer que tout cela n'est qu'invention et délire. Toutefois, les deux thèmes principaux des travaux de Barbier dans sa seconde période scientifique sont le jeu de pile ou face et la classification des polyèdres, deux thèmes bertrandiens par excellence. Bertrand, en effet, a toujours été fasciné par les polyèdres. Il aurait rêvé de découvrir un objet aussi merveilleux que le grand icosaèdre de Poinsot, et peut-être comptait-il sur Barbier, ce fou de Dieu, qui visiblement avait un accès direct au grand livre des belles mathématiques, pour le découvrir à sa place. Sur ce point, on verra F. Jongmans, *Eugène Catalan,* Mons, SBPM, 1996, p. 67.

(29) On verra par exemple P. Eymard et J.-P. Lafon, *Autour du nombre* π*,* Paris, Hermann (ASI 1441), 1999. Évidemment l'aiguille de Buffon permet aussi au hasard d'approcher π, mais il s'agit d'un cas où l'infini géométrique intervient et ça ne compte pas.

(30) Bertrand démontre dans son cours la formule générale de Moivre, dans le cas d'une pièce biaisée, au n° 64 et Poincaré reprend son calcul. On verra sur ce point l'article cité supra note 26 qui donne tous les détails.

(31) Bertrand semble avoir énoncé pour la première fois sa formule de la quadrature du cercle dans l'article déjà cité supra note 1, du *Journal des savants,* 1887, p. 689. Elle est reprise par L. Bachelier dans, *Le jeu, la chance et le hasard,* Paris, Flammarion, 1914, p. 174-175, qui souligne toutefois que la formule est sans valeur pratique. Pour obtenir π au jeu de pile ou face avec ne serait ce que quatre décimales exactes, il faudrait jouer des milliards de parties.

Dans *Le calcul des probabilités, son évolution mathématique et philosophique,* Paris, Hermann, 1926, p. 134-136, L.-G. Du Pasquier lui consacre un paragraphe et la nomme la « formule du hasard », locution dont nous n'avons pas retrouvé d'autres occurrences.

Pour transformer le critère de Bertrand en un test statistique, il faut évaluer la loi asymptotique de la différence, $\dfrac{\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\mu}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\left(\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\mu}\left|X_i-\overline{X}\right|\right)^2}-\dfrac{\pi}{2}$, multipliée par une suite a_n convenable. Nous ignorons la postérité de ce problème que Bertrand n'aborde pas. D'ailleurs Bertrand considère comme inutile ce genre de calculs, le « théorème de Bernoulli » et l'intelligence du savant suffisant à tous les usages statistiques.

(32) trajectoires : pour ce qui concerne la tradition parisienne, les premières trajectoires du jeu de pile ou face sur les diagonales d'un quadrillage carré de côté unité apparaissent explicitement pour la première fois dans les écrits polémiques de Félix Le Dantec en 1910, et à sa suite dans *Le Hasard* de Borel en 1914 (n° 19, p. 43). C'est du moins ce qu'affirment les auteurs d'un article paru dans la *Revue d'Histoire des Mathématiques,* 5 (1999), p. 181-247. Il est d'ailleurs très vraisemblable qu'ils se trompent. Il faudrait dépasser les frontières de l'hexagone et chercher par exemple dans la tradition physique et statistique anglo-saxonne notamment chez Rayleigh ou Karl Pearson, l'inventeur de la locution « random walk », les promenades à Charenton.

Quoi qu'il en soit, le mode de représentation du jeu de pile ou face sur un quadrillage convenable devient un classique après 1920, où on le trouve un peu partout, notamment chez Polya, sans qu'on sache exactement d'où il vient. On verra également le bel article de Marc Renault, « A Reflection on André's Method and its Application to the Generalized Ballot Problem, July 20, 2006, sur le site http://www.ship.edu/~msrena/. Renault a retrouvé et reproduit sur son site deux articles parus en 1923 dans *l'Enseignement mathématique,* dus à J. Aebly et D. Mirimanoff, qui utilisent la représentation géométrique du problème du scrutin, une variante de la représentation géométrique du jeu de pile ou face. Jakob Aebly (1885-1934) est un médecin homéopathe zurichois, philosophe, disciple de Kant, Schopenhauer et Nietzsche, et mathématicien, disciple de Mach et Poincaré, que l'on peut considérer comme marginalement bertrandien. Quant à Dimitry Mirimanoff (1861-1945), originaire de Russie, il a fait ses études en Italie puis en France et s'est fixé à Genève où il a enseigné le calcul des probabilités pendant 35 ans. C'est un des correspondants de Fréchet et un disciple de Cournot. Il est donc bertrandien d'honneur.

(33) Cette démonstration « simplifiée » par doublements successifs est donnée pour la première dans le *Journal des savants,* 1887, p. 690-691. Elle est reprise sous des formes

légèrement différentes dans le traité de 1888, au numéro 80 que nous suivons, au n° 87, pour démontrer que la durée moyenne d'un jeu équitable est infinie, dans le cas d'un joueur luttant contre un adversaire de fortune infinie (que nous traitons infra), et au n° 108, pour le même problème dans le cas de deux joueurs de fortunes égales. Il s'agit donc d'un procédé véritablement bertrandien.

(34) La démonstration d'Ampère figure dans son premier ouvrage scientifique, *Considérations sur la théorie mathématique du jeu ,* Lyon, frères Périsse, An II-1802. Il existe deux versions différentes de ce mémoire. La première, communiquée à l'Académie et soumise au jugement de Laplace, comporte une erreur célèbre. Ampère, alors professeur de physique à l'Ecole centrale de Bourg-en-Bresse, y démontre que la ruine est certaine au jeu de pile ou face, dans tous les cas, même lorsque le joueur est avantagé par le biais de la pièce, dès lors qu'il lutte contre un adversaire de fortune infinie, ou tout adversaire qui se présente à lui. Pour cela, Ampère calcule sans erreur par un raisonnement combinatoire direct, la probabilité que le jeu se termine en n coups (par la ruine dudit joueur) et fait la somme de la série ainsi obtenue, qu'il trouve égale à 1 quelle que soit la probabilité de pile, (p. 18-19 du premier mémoire). Laplace n'eut aucune peine à déceler l'erreur (Ampère utilise le développement en série de $(1+q)^{\alpha}$ pour toutes les valeurs positives de q, alors qu'il ne converge que pour q inférieur à 1) et la signala au jeune Ampère, qui espérait de ce mémoire une reconnaissance parisienne et surtout sa nomination au nouveau Lycée de Lyon où vivait son épouse Julie. Ampère affolé modifia les pages 18 à 20 de son mémoire et les fit intercaler dans son ouvrage grâce aux soins de son beau-frère imprimeur, Marsil Périsse. On trouve à la BNF un exemplaire où la faute apparaît. Nous ne connaissons pas d'autres exemplaires non corrigés. Ampère fut cependant nommé à Lyon où il ne resta pas après le décès de son épouse. Cette histoire est bien connue depuis que Sainte-Beuve l'a racontée en 1837 dans la *Revue des deux mondes,* à partir de la correspondance d'Ampère avec sa femme, qu'on peut lire maintenant sur le site http://www.ampere.cnrs.fr/correspondance/.

Bertrand cite l'ouvrage d'Ampère explicitement en exergue de son chapitre VI (p. 101), et visiblement il l'a lu et apprécié. Il en a notamment tiré la locution bertrandienne « ruine des joueurs ». Il semble bien en effet qu'Ampère ait été le premier à attirer l'attention des savants sur ce fait paradoxal qu'un jeu équitable ruine certainement un joueur qui joue contre un adversaire infiniment riche. Bien entendu Montmort, Nicolas Bernoulli, Moivre ou Lagrange ont évalué la probabilité qu'un joueur se ruine avant un temps donné dans le cas équitable, mais sans autre commentaire, du moins à notre connaissance. On verra à ce sujet le livre de A. Hald cité supra note 18.

La démonstration de Laplace de la ruine des joueurs est tardive dans son œuvre (en tout cas après 1802), mais remarquablement rapide. Elle se trouve noyée dans un célèbre mémoire de 1811, « sur les intégrales définies et leur application aux probabilités et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations », OC XII (voir les p. 370-371). Rappelons que c'est dans ce mémoire que Laplace applique son théorème établi l'année précédente (OC XII, p. 322-325) à la méthode des moindres carrés.

(35) On peut imaginer que ce passage (p. 106-107) a inspiré directement le cours de Borel et sans doute aussi, par imitation, le célébrissime lemme de Borel de 1909. Bertrand innove là sans doute. En tout cas, il est superbe. Pourquoi ne serait-ce pas à Charenton qu'il en a eu l'idée ?

(36) Bertrand, p. 108. Notons que Bertrand ne parle pas de « l'espérance » de la durée du jeu mais de sa « valeur probable ». Dans la tradition française, depuis Laplace au moins, seuls les hommes (ou plutôt les joueurs) ont une espérance, les choses, elles, n'ont qu'une valeur probable ou une valeur moyenne. Cette tradition prend fin seulement après la Seconde Guerre mondiale avec les normes AFNOR de 1948. On verra à ce sujet la traduction commentée à paraître de la thèse de Ville par Glenn Shafer, qui a attiré notre attention sur cette particularité française, qu'on ne trouve pas dans l'Ecole russe notamment.

(37) Bertrand est un lecteur assidu de la *Doctrine of chances* de Moivre, qu'il cite en plusieurs endroits et imite en d'autres. En particulier, Bertrand signale à l'attention de ses lecteurs un « ingénieux artifice» de Moivre pour calculer la probabilité de ruine d'un joueur jouant contre un adversaire de fortune finie à un jeu inéquitable. (n° 92). Cet artifice est de fait un argument de martingale. On verra E. Seneta, « Modern probabilistic concepts in the work of E. Abbe and A. de Moivre », *Math. Scientist,* 8 (1983), p. 75-80.

Notons à ce propos que Bertrand utilise marginalement une méthode classique mais erronée, reprise de Nicolas Bernoulli et Moivre, consistant à considérer que, si on arrête un jeu équitable en un temps aléatoire, il reste équitable, $E(S_\tau)=0$, (par exemple au n° 91), ou plus généralement, s'il ne l'est pas, avec des notations évidentes, $E(S_\tau)=E(\tau)E(X)$. Mais au n° 106, Bertrand met en garde contre de tels arguments qu'il convient de conforter par une démonstration directe et sûre. On sait en effet que ces formules étendues aux temps aléatoires conduisent aux paradoxes des martingales toujours avantageuses pour le joueur d'un jeu équitable. Ces paradoxes n'ont été élucidés que tardivement après la seconde guerre mondiale, notamment par Borel et Doob, dans des cadres très différents (l'Ecole de Bertrand-Borel pour le premier, celle de Kolmogorov-Doob pour le second). On peut voir à ce sujet l'article cité supra note 32.

(38) *CRAS* 105 (1887), p. 369. le problème est repris dans les mêmes termes au n° 18 du traité de 1888, avec la solution de D. André.

(39) L'interprétation dans le cadre de la ruine des joueurs est donnée par Bertrand dans le même volume des *CRAS,* p. 437-439, et au n° 98 du traité de 1888, que nous suivons pour l'essentiel.

(40) Le seul élément de preuve qu'on ait de ces éventuelles discussions est une note de Barbier, « Généralisation d'un problème résolu par M. J. Bertrand », *CRAS* 105 (1887), p. 407 qui énonce sans démonstration la formule du scrutin généralisé : si $a > kb,$ la probabilité qu'au cours du dépouillement A l'emporte constamment sur B de plus de k fois est égale à $\frac{a-kb}{a+b}$. Cette formule paraît avoir été longtemps négligé, mais elle a trouvé depuis quelque temps déjà la place naturelle qui lui revient de droit. D'autant que dans le cas où k est entier, on dispose maintenant de preuves aussi courtes qu'élégantes. On verra, à ce sujet, M. Renault, «An Investigation into Three Combinatorial Proofs of the Ballot Theorem », que l'on peut lire sur le site de l'auteur http://www.ship.edu/~msrena/.

En reprenant l'interprétation de Bertrand du problème du scrutin, on voit que la formule de Barbier permet de résoudre simplement et directement le problème de l'absorption d'une promenade symétrique par une ligne droite de pente quelconque, un problème fondamental qui a d'abord été traité pour le mouvement brownien (le jeu de pile ou face naturel continu) par l'Ecole de Moscou dans les années trente et un peu plus tard par les élèves de Fréchet à l'IHP dans le cas d'une diffusion générale. Et l'on sait les liens de ces questions avec la théorie des équations paraboliques. On verra par exemple le volume des *CRAS* consacré au pli cacheté de W. Doeblin, 331 (2000). Mais l'étude du jeu de pile ou face, par des méthodes combinatoires, est plus récente. Pour un survol des théorèmes du scrutin et de leurs applications, avec de nombreuses références, on verra l'article récent de L. Addario-Berry et B. A. Reed, « Ballot theorems, old and new », November 10, 2006, disponible sur le site http://www.cs.mcgill.ca/~laddar/papers/btsurvey.pdf. Les auteurs de cet article donne, en particulier, une version plausible et rétrospective de la démonstration originale de Bertrand.

Tout cela pour dire que la géométrie bertrandienne du hasard, même réduite à la formule du scrutin, ne manque pas de souffle.

(41) *CRAS* 105 (1887), p. 436-437. Cette note est intitulée « Solution directe du problème résolu par M. Bertrand ».

Désiré André est un normalien de la promotion 1860, né en 1840, agrégé de mathématiques en 1863, docteur ès sciences en 1877, qui fut professeur à Dijon, puis à Sainte-Barbe, où il eut probablement l'occasion de croiser le jeune Borel qui y fut pensionnaire de 1887 à 1889. André a joué un certain rôle dans la communauté mathématique française de son temps, notamment à la SMF, qu'il a présidée en 1890. il est mort en 1917. Nous devons ces informations à Norbert Verdier que nous remercions vivement.

Désiré André et Emile Barbier se connaissaient-ils personnellement ? Barbier était de la promotion 1857 de l'ENS, agrégé en 1862, mais nous ne savons rien à ce sujet.

(42) L. Bachelier, *Théorie de la spéculation, Annales scientifique de l'ENS,* S3 17 (1900), p. 21-86, reprod. Paris, J. Gabay, 1995.

(43) *Annales scientifique de l'ENS,* S3 18 (1901), p. 143-210, reprod. Paris, J. Gabay, 1995.

(44) La bijection de Bachelier est reprise dans son *Calcul des probabilités,* Paris, Gauthier-Villars, 1912, p. 58. Elle figure dans le cours de Borel reproduit comme premier fascicule du tome I de son *Traité* : *Principes et formules classiques du calcul des probabilités*, rédigé par R. Lagrange, Paris, Gauthier Villars, 1924, p. 10.

(46) Les chapitres traitant de ce thème ont été analysés en détails dans le bel article de O. Sheynin cité supra plusieurs fois déjà : « Bertrand's Work on Probability », *AHES,* 48 (1994), p. 155-199. On s'y reportera. Pour un éclairage lumineux et toujours actuel de la théorie de Gauss et de son contexte, on verra bien sûr le livre merveilleux de S. M. Stigler, *The History of Statistics,* Harvard, 1986.

(47) Sur les débuts de la statistique militaire gaussienne à l'Ecole de Metz , on peut voir un article paru dans *Mathématiques et Sciences humaines,* 136 (1996), p. 29-42. Toutefois, Bertrand n'intègre pas seulement dans ses chapitres sur le sujet les cours de Metz, mais aussi ceux de Fontainebleau et de Gavre, et les travaux techniques associés, généralement publiés dans les revues françaises d'artillerie, et encore les cours analogues des écoles d'artillerie européennes. Par exemple, Bertrand utilise le cours du capitaine Wuich à l'Ecole d'artillerie de Vienne, publié sous le titre *Die Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendungen im Gebiete des Schiesswesens gemeinfasslich behandelt,* Wien, L. W. Seidel und Sohn, 1877, cours fort intéressant dont il n'existe que très peu d'exemplaires (un à la BNF et un autre dans la bibliothèque de Steve Stigler, qui nous en a communiqué des extraits remarquables). Ce traité n'a jamais été étudié séparément à notre connaissance, en dépit de son intérêt évident. Nikolaus Wuich (1846-1910) a terminé sa carrière comme général d'artillerie. Bertrand cite également des travaux non publiés ou publiés de façon si discrète qu'on n'en trouve guère de traces, par exemple ceux du capitaine Delauney, artilleur de marine, alors inspecteur des études à l'Ecole polytechnique, qui appartient à la grande famille polytechnicienne des Mondésir, et d'autres encore. Une étude même sommaire du contexte national et international de l'artillerie savante entre 1870 et 1914 demanderait des pages et des pages de développements érudits, sans compter les digressions nécessaires, obligatoirement labyrinthiques. Nous reporterons donc cette étude à une date ultérieure. Pour donner une idée de la richesse des travaux probabilistes des artilleurs, nous invitons le lecteur à se reporter aux

travaux de Pierre Crépel sur Henry (*Matapli,* 36 (1993)) et à ceux de Nacera Seddik-Ameur sur Lhoste (*Mathématiques et Sciences humaines,* 162 (2003)).

(48) Les familles paternelle et maternelle de Joseph Bertrand sont rennaises et son oncle, Jean-Marie Duhamel, qui l'a élevé après la mort de son père en 1831, est né à Saint-Malo, ce qui peut expliquer les exemples bretons du cours de probabilités de 1888.

(49) persuadé : Bertrand ne fait pas l'accord. S' est complément d'objet indirect : les Malouins ont persuadé quelque chose aux Malouins. Cela se disait, paraît-il, en 1888. Le Robert déclare l'accord facultatif.

(50) Périodiquement, les statisticiens contemporains dénoncent ce genre d'abus. On verra l'article récent de D. Denis et sa discussion dans le *Journal de la Société française de statistique,* 145 (2004), p. 5-68.

(51) Par exemple, dans l'*Exposition du système du monde*, la cause est l'hypothèse cosmogonique de Laplace, et l'observation, le sens de rotation des planètes du système solaire, et leurs inclinaisons.

(52) L'exemple maritime de Bertrand est bâti exactement sur le modèle du caillou de Cournot (*Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire,* Paris, Hachette, 1861, rééd. Paris, J. Vrin, 1982, p. 62-63).

(53) S.-D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière civile et en matière criminelle, précédées des règles générales du calcul des probabilités,* Paris, Bachelier, 1837. Poisson traite deux fois des expériences de Buffon, une fois au chapitre II, n° 50, où il compare diverses façons d'estimer « la chance de *croix* « au jeu de croix ou pile, et une autre fois au chapitre III, n° 89, p. 228-231, en application de formules asymptotiques bayésiennes (en fait laplaciennes) dans le cas d'épreuves répétées à deux issues contraires (ou du jeu de pile ou face joué un grand nombre de fois avec une pièce de biais inconnu). C'est ce paragraphe qui inspire Bertrand.

(54) Les continuateurs de Bertrand n'ont pas suivi en général les recommandations du maître, pour des raisons pratiques : la statistique ne saurait attendre. Poincaré semble être l'un des seuls à avoir voulu regarder plus loin. D'autant que le constat pessimiste de Bertrand - en probabilité des causes, on ne connaît pas souvent la loi a priori - ne saurait surprendre Poincaré, puisque, selon lui, on ne connaît jamais a priori une loi de probabilité, en aucun cas. C'est toujours un choix du savant non dénué d'arbitraire, tout au plus une convention commode. Que les lois a priori de la statistique bayésienne soient indéterminées ou arbitraires

n'a donc rien pour surprendre. Au reste, nous dit Poincaré, retrouvant ainsi un théorème de Laplace, l'arbitraire de la loi a priori disparaît parfois avec la répétition des expériences. Sa forme analytique particulière s'estompe au fil du temps. C'est ce qu'on appelle parfois le théorème de Laplace-Bienaymé qui a été retrouvé plusieurs fois entre les deux guerres mondiales (von Mises, Bernstein, etc). Si Buffon ne jette qu'une fois sa pièce, la théorie est sans valeur, mais s'il la jette 4040, quelle que soit la forme de la loi a priori, la probabilité a posteriori n'en dépendra plus, et ce 0, 81 prend une valeur mathématique certaine. Jamais Bertrand ne fait allusion au théorème de Laplace-Bienaymé, trop analytique pour être honnête ou attrayant.