Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 3, n°1; Juin/June 2007

www.jehps.net

LE PROBLÈME DES PARTIS BOUGE...

DE PLUS EN PLUS

Norbert Meusnier

Université de Paris VIII

Ce texte reprend l'exposé du Séminaire B.B.C[1] du 5 décembre 2003; il correspond à une version modifiée, et je l'espère améliorée, de celui qui doit paraître dans les actes du Congreso Internacional de Historia de la Estadistica y de la Probabilidad qui s'est déroulé à Tolède les 3 et 4 juillet 2003. Son titre fait allusion à celui de l'exposé que j'avais fait devant ce même séminaire le 21 janvier 1994 : "Le problème des partis bouge encore: sur un surprenant texte anonyme du XIV^{e} siècle". Il s'agissait alors de faire le point sur cette question de l'"origine" du "problème des partis", après la mise au point de Ernest Coumet en 1965[2], à la suite de la publication par Laura Toti Rigatelli[3] d'un manuscrit extraordinaire et proprement "déroutant" du XIV^{e} ou XV^{e} siècle. Bernard Bru m'avait judicieusement conseillé à l'époque, étant donné l'originalité de ce texte profondément mésinterprété par son "inventrice", d'en faire un article pour la Revue d'histoire des mathématiques; je me suis empressé avec beaucoup de lenteur(s) de ne pas conduire ce projet à son terme après avoir "découvert" - bien tardivement - que Yvo Schneider[4] avait publié à ce propos, en 1988, un très bon article. Je n'avais - alors - plus rien de significatif à ajouter puisque nous étions parfaitement d'accord sur l'interprétation "technique" qu'il convenait de donner à cette solution qui demeurait par ailleurs très énigmatique sur le plan "historique".

---

[1] Comme: "Barbut/Bru/Coumet".
[2] Voir [Cou65].
[3] [Tot92].
[4] [Sch88]

Ainsi, je présente ici un renouvellement de notre compréhension de la problématique du problème des partis éclairée par la relecture récente de deux manuscrits d'arithmétiques commerciales du XV^{e} siècle, écrites en italien et traitant de ce problème. Les solutions qui y sont proposées et plus largement les traces archéologiques que nous procurent ces documents permettent d'affiner la perspective de l'émergence d'une mathématisation de l'incertain et des prises de décision entre le XIV^{e} et le XVIII^{e}siècle.

Le problème des partis

Le problème des partis[5] est ce problème discuté entre Pascal et Fermat dans leur correspondance de l'été 1654 que l'histoire des sciences "ordinaire" retient comme l'événement symbolique de la naissance du Calcul des probabilités.

La problématique technique

Dans sa lettre à Fermat du 29 juillet 1654[6] Pascal présente le problème ainsi: deux joueurs misent chacun la même somme d'argent pour avoir le droit de jouer à un jeu de pur hasard qui se déroule en trois manches gagnantes[7] (ou plus) mais le jeu est interrompu avant que l'un des deux ait gagné trois manches. Les deux joueurs sont alors d'accord pour partager la mise. Le problème consiste alors à savoir quel est le partage[8] juste ou équitable et en cela quelle est la bonne décision à prendre. Il relève donc bien plus d'une problématique décisionnelle que probabiliste.

Supposons que la question se pose lorsque les joueurs sont à 1/0. La solution de Pascal consiste à envisager ce qui aurait pu arriver, si le jeu n'avait pas été interrompu, ce que **je**[9] représente par le schéma suivant:

```
         1/0
         /  \               ||
        /    \              ||
      2/0    1/1            ||
     /  \                   ||
    /    \                  ||
  3/0    2/1                ||
         /  \               ||
        /    \              ||
      3/1   2/2           <<<<
```

[5] "Points problem" en anglais et "Problema de los puntos" en espagnol; le lecteur va comprendre par la suite pourquoi la dénomination "Problème des partis" est beaucoup plus judicieuse.

[6] Pour la correspondance entre Pascal et Fermat voir [Pas70] ou [Pas98].

[7] Ce sont les conditions, par exemple, des matchs des tournois de tennis du "Grand chelem" (en ce qui concerne les "manches") et de ceux de la Coupe Davis (en ce qui concerne les manches de chaque match et aussi les matchs de chaque rencontre entre deux nations).

[8] C'est pourquoi on parle du problème des **partis** et non pas du problème des **parties**.

[9] Les graphes "en arbres" que j'utilise ne se trouvent pas chez Pascal qui s'exprime sous forme rhétorique.

Considérons alors la situation 2/1, qui est la plus proche de la fin du jeu[10] sans qu'on puisse donner une réponse immédiate à la question du partage:

```
       2/1
      /   \
     /     \
   3/1     2/2
```

Le premier joueur, celui qui a déjà gagné deux manches, peut aussi bien gagner toute la mise (s'il gagne la partie suivante et se retrouve à 3/1) ou, équitablement, reprendre la moitié de la mise (s'il perd la partie suivante). Si chaque joueur a misé *m*, ce joueur peut donc considérer qu'il est certain d'avoir *m (*au minimum); quant à l'autre partie de la mise, pouvant l'avoir comme ne pas l'avoir, elle "vaut" *m/2*. Ainsi les deux joueurs peuvent-ils se mettre d'accord à 2/1 pour que le premier prenne *3m/2* et le deuxième *m/2*. On peut ainsi remonter de situation en situation jusqu'à 1/0 (et même 0/0); on obtient alors des partages que je représente par le schéma suivant, en remontant à l'intérieur du premier schéma au lieu de descendre:

```
                  1/0
              (11m/8;5m/8)                ^
                /      \                  ^
               /        \                 ^
          2/0            1/1              ||
     (7m/4;m/4)        (m;m)              ||
        /      \                          ||
       /        \                         ||
    3/0          2/1                      ||
  (2m;0)     (3m/2;m/2)                   ||
                /      \                  ||
               /        \                 ||
            3/1          2/2
          (2m;0)        (m;m)
```

Plus généralement, pouvoir obtenir aussi bien *a* que *b*, avec $a>b$, est une situation qui vaut $b + (a-b)/2$, c'est-à-dire $(a+b)/2$[11].

Pascal répond aussi à une autre question, ce que lui permettent ces résultats. Cette question est celle de la valeur de chaque partie gagnée, que l'on obtient par la différence entre les valeurs des différentes situations. Ainsi, la valeur de la première partie est-elle *3m/8*[12], celle de la deuxième également *3m/8*, et celle de la troisième *m/4*, si l'on considère une suite de trois parties gagnantes.

Nous pouvons ainsi retrouver le tableau que Pascal transmet à Fermat le 29 juillet 1654[13]:

---

[10] "2/2" est une situation plus proche de la fin mais le partage ne pose, alors, aucun problème.

[11] C'est la "valeur de l'espérance" dans la situation donnée, notion que Huygens théorise en 1657 dans son *De ratiociniis in ludo aleae;* voir à ce sujet [Meu96].

[12] C'est la différence entre la valeur de la situation 1/0 (11*m/*8) et la mise initiale (*m*).

[13] Voir [Pas70] p.1145 ou [Pas98] p.154; dans son tableau Pascal prend *m=256*, afin de n'avoir que des valeurs entières.

valeur en		6	5	4	3	2	1	parties
de la	1°	*63m/256*	*35m/128*	*5m/16*	*3m/8*	*m/2*	*m*	
	2°	*63m/256*	*35m/128*	*5m/16*	*3m/8*	*m/2*		
	3°	*28m/128*	*15m/64*	*m/4*	*m/4*			
	4°	*21m/128*	*5m/32*	*m/8*				
	5°	*3m/32*	*m/16*					
	6°	*m/32*						

C'est ce tableau dont Pascal va étudier les régularités et, ce faisant, y voir une jonction possible avec le triangle arithmétique. Mais ceci n'est pas notre sujet et je n'ai rappelé ces résultats que pour souligner l'importance heuristique, dans les recherches de Pascal, de cette question de la **"valeur des parties"** que nous allons retrouver chez l'un des auteurs que nous allons étudier.

Un document contemporain de Pacioli

Antérieurement à la correspondance entre Pascal et Fermat de l'été 1654 nous connaissions, avant 1985, des traces du problème des partis et de diverses solutions plus ou moins insatisfaisantes chez plusieurs auteurs italiens, entre Pacioli en 1494 et Forestani en 1603, comme Calandri (un contemporain de Pacioli), Cardano en 1539, Tartaglia en 1556, Peverone en 1558, Pagani en 1591, et chez le français Gosselin en 1578[14].

J'analyse ici deux nouvelles traces qui sont apparues ces dernières années, toutes les deux d'auteurs anonymes, et datant, probablement, du début du XV^{e} siècle pour le premier et de la première moitié de ce même siècle pour le second.

Mais avant cela considérons la solution donnée par Calandri[15] qui nous permettra d'apprécier encore mieux l'originalité des textes des deux autres auteurs.

Calandri

Filippo Calandri est né vers 1467 dans une famille de maîtres d'abaque (son grand-père, son père, son frère aîné) de Sienne. Il est l'auteur d'une des premières arithmétiques imprimées, en 1491; elle est dédiée à Julien de Médicis le fils de Laurent le Magnifique. Ce manuscrit de la bibliothèque de Sienne[16] est donc contemporain de celui de Pacioli et date de la fin du XV^{e} siècle ou du début du XVI^{e} siècle.

Une traduction en français du texte de Calandri[17]

<**81 r**> (12) *Deux [personnes] jouent à la longue paume*[18] *de telle sorte que le premier qui a six chasses*[19] *gagne le jeu. Il arrive alors par hasard*[20] *quand l'un d'eux*

---

[14] Voir [Cou65].

[15] Je propose ici cette étude des "solutions" de Calandri car elles sont beaucoup moins connues que celles de Pacioli.

[16] Codice L. VI. 45 de la Biblioteca Comunale de Sienne; Sienne, Bibl. Com, L. VI. 45.

[17] Je propose cette traduction à partir de la transcription qui en est donnée dans [Cal82] pp. 13-14 et 39-40.

[18] Un jeu de balle, ancêtre du tennis.

en a gagné 4 et l'autre 3 que la balle éclate de telle sorte qu'ils ne peuvent finir le jeu mais tombent d'accord pour que chacun ait ce qui lui convient. On veut savoir combien il reviendra à chacun, chacun ayant misé 3 £[21]*: il y a 2 façons pour cette raison, l'une est de faire la raison sur ce qui est fait et l'autre sur ce qui est à faire. La première façon: on prend autant que ce qu'on voit de chasses en raison de ce qu'ils peuvent faire à eux deux. <**81 v**> La seconde: on prend dans les chasses qui sont à faire autant de chasses à voir que chacun d'eux a à en faire pour avoir le jeu. D'où que si le premier a 4 chasses il lui reste à faire deux chasses pour faire le jeu; le second qui a 3 chasses il lui reste trois chasses à faire et donc le second a à durer une fois et demi la difficulté*[22] *du premier et c'est pourquoi le premier aura à retirer une fois et demi autant que le second: que chaque fois que premier retire 3 le second retire 2. Maintenant [comme] on a à partager 120 s entre les deux, [que] le premier a à retirer 3 [et] le second 2, je veux savoir ce que touchera chacun. Et le faisant tu trouveras que le premier aura 72 sous et le second 48 sous; mais parce que c'est un jeu de hasard*[23] *on ne se porte pas garant que ce soit la vérité précise.*

<**97 v**> (43) *Trois [personnes] jouent à l'arbalète 3 D*[24] *de telle façon que celui qui le premier a 3 coups*[25] *gagne et obtient 3 D. Et tirant à l'arbalète le premier en a fait 2, le deuxième un, le troisième n'a aucun coup.*
Il arrive par hasard[26] *qu'une arbalète se casse et ils sont d'accord que chacun prend ce qui lui convient. Je veux savoir combien chacun touchera: je dis ainsi, que c'est bien du hasard*[27] *et ça se prend de 2 façons. L'une est de prendre ce qu'ils ont fait et l'autre est* <***98 r***> *de prendre ce qu'ils ont à faire et celle qui est la meilleure ce n'est pas déterminé et c'est pourquoi celle des deux que l'on prend n'importe pas. Donc nous prendrons celle qui [prend] ce qui reste à faire et nous dirons ainsi: combien y aura-t-il au plus de coups qu'ils peuvent faire ceux-là? Il y en aura 7.*
Donc si le premier en a deux il a 2/7 du jeu et le second 1/7 et entre eux deux ils ont 3/7, part que l'on prend sur 3 D et que l'on distribue au premier et au deuxième; ensuite des 4/7 qui restent chacun se partage 1/3 et tu trouveras que le premier touchera 1 3/7 et le second un et le troisième 4/7[28].

Analyse et commentaire

Dans le premier jeu, un jeu de paume, les joueurs sont deux et en sont à 4/3 dans un jeu en 6 parties gagnantes au moment où ils décident d'interrompre le jeu. Calandri propose deux méthodes de partage: la première en raison des parties qui ont été gagnées au moment de la séparation, la seconde en raison inverse de la "difficulté" pour chaque joueur de gagner les parties qui resteraient à être gagnées pour obtenir la victoire. Avec la première méthode le partage se ferait en proportion de 4 à 3; mais Calandri fait le partage selon la seconde méthode et il se fait, alors, en proportion de 3 à 2.

---

[19] Les "chasses" sont les différentes parties ou manches d'un jeu.
[20] "per chaso".
[21] Trois "livres", je suppose; une livre valant 20 sous.
[22] "fatica".
[23] "giuco di fortuna".
[24] "D" pour "Denier", probablement.
[25] Un "coup" c'est-à-dire un coup au but, dans la cible.
[26] "per chaso".
[27] "chaso".
[28] Voir le texte italien en Annexe I.

Dans le deuxième jeu, un jeu de tir à l'arbalète, les joueurs sont trois et sont à 2/1/0 dans un jeu en trois parties gagnantes au moment où ils décident d'interrompre le jeu. À nouveau Calandri dit qu'il y a les deux méthodes précédemment définies et décide à nouveau de prendre la seconde. Le partage devrait donc se faire en proportion de 2 à 1 et 0 s'il suivait sa première méthode ou de 6 à 3 et 2, s'il suivait sa deuxième méthode, effective dans le premier jeu, or ce n'est pas le partage proposé. En fait Calandri propose une troisième méthode qui consiste à déterminer combien de coups, au maximum, on peut jouer pour qu'il y ait un vainqueur quand on en est au début de la partie; il y en a 7. Puis il commence par distribuer la mise proportionnellement aux parties déjà gagnées à 2/1/0, c'est-à-dire 2/7, 1/7 et 0 puis le reste 4/7 est réparti également entre les trois joueurs soit 4/21, renonçant alors à faire intervenir la "difficulté" relative à chaque joueur de gagner; le premier joueur aura ainsi 10/21, le deuxième 7/21 et le troisième 4/21 de la mise totale, soit, comme il le dit, 1.3/7, 1 et 4/7 d'une mise de 3.

S'il avait procédé ainsi dans le premier jeu, le premier joueur aurait eu 4/11 + 2/11 et le second 3/11 + 2/11.

Ainsi Calandri paraît-il plutôt rapporter des solutions proposées dans d'autres arithmétiques commerciales selon le problème proposé plutôt qu'appliquer systématiquement les différentes méthodes. On comprend assez bien qu'à ses yeux le seul intérêt de ces problèmes est d'être le support de calculs de proportion.

Néanmoins, il n'est pas inutile de remarquer que l'utilisation de la première méthode dans le deuxième jeu, avec trois joueurs, est facilement contestable dans la mesure où celui qui n'a encore gagné aucune partie n'a rien. Quant à la deuxième méthode elle est assez délicate à manipuler avec trois joueurs; en effet la difficulté est une fois et demie plus grande pour le troisième que pour le deuxième, et deux fois plus grande pour le deuxième que pour le premier ... donc le deuxième doit avoir une fois et demie ce qu'a le troisième et le premier deux fois ce qu'a le deuxième, c'est-à-dire un partage comme 6/3/2[29] alors que les parties à gagner sont: 1/2/3.

Les nouveaux documents

En 1985 Laura Toti Rigatelli, puis cette année même, en 2003, Raffaella Franci ont attiré l'attention sur deux passages d'arithmétiques commerciales italiennes qui traitaient du problème des partis, ce qu'aucun historien n'avait remarqué de manière explicite avant elles.

Ohri

L'auteur est anonyme et son texte était daté par ses éditeurs, lors de la deuxième parution en 1992[30], de la fin du XIV^{e} siècle. En 1960 Oystein Ore[31] a mentionné, sans plus de précision, la trace du problème des partis dans "des manuscrits mathématiques italiens de 1380"; aussi, en son hommage, ai-je appelé cet anonyme Ohri, comme "Objet historique relativement incertain", dans la mesure où le manuscrit d'où il est extrait, pour une raison inconnue, n'a jamais été publié intégralement comme l'ont été

[29] Et non pas 3/2/1 comme on peut être tenté de le dire un peu rapidement...

[30] Voir [Tot85] p. 232 et [Tot92] pp. 349-351.

[31] Voir [Ore60]. Personne, à ma connaissance, ne sait à quels manuscrits Ore fait allusion, pourquoi il est aussi précis sur la date de 1380 et surtout pourquoi il n'en dit pas plus à propos d'une information aussi remarquable.

de nombreuses autres arithmétiques commerciales par le groupe de recherche de l'Université de Sienne[32].

Une traduction en français du texte de Ohri.[33]

<**29 r**> *Deux hommes jouent aux échecs et font un dépôt de un ducat pour 3 jeux, il arrive que le premier gagne 2 jeux au 2°, il demande de ne pas jouer plus avant, combien le premier aura-t-il gagné sur le 2° du ducat; supposons que le premier ait gagné sur le 2° 1 c au premier jeu, tu dois voir, par "raison"*[34]*, que dans le 2° jeu il devrait gagner autant que dans le premier et aura donc gagné une autre c, et ainsi maintenant se trouve avoir gagné 2 c pour les deux jeux; le 2° qui a perdu se trouve avoir maintenant sur son ducat 1 ducat moins 2 c. Et sachant que si celui qui a perdu 2 jeux gagnait 2 autres jeux contre son compagnon, ils n'auraient pas gagné l'un sur l'autre quoi que ce soit, supposons maintenant que le 2° commence à gagner contre le premier un jeu, je dis qu'il gagne dans ce jeu 1 ducat moins 2 c qu'avait gagné le premier et la "raison" en est que si celui qui avait au début gagné 2 jeux avait encore gagné le 3° jeu, [cela] lui aurait gagné au premier tout ce qui restait de son ducat, et ainsi au contraire pour ce que gagne le 2° sur le premier, c'est-à-dire 1 ducat moins 2 c, maintenant enlève un ducat moins 2 c de la part que le premier avait gagné sur le 2°, c'est-à-dire 2 c, il restera encore au premier 4 c moins 1 ducat de gagné, et le second qui commence à recevoir il devra avoir dans [son] jeu 2 ducats moins 4 c, maintenant considère pour le 1° qui a gagné 2 jeux que si le 2° qui a gagné dans les deux jeux gagnait le 3° jeu il se ferait qu'il gagnerait tout ce que le 1° a en plus du ducat et si le premier gagnait ce 3° jeu il gagnerait 2 ducats moins 4 c et il doit en être de même pour le 2° sur le premier; maintenant supposons que le 2° gagne le 2° jeu, il se trouve donc avoir gagné sur le premier 2 ducats moins 4 c et cela se doit trouver touché de ce que le premier lui avait gagné, et cela du fait que l'un comme l'autre a gagné 2 jeux, maintenant regarde quand le 2° gagne sur le premier le 2° jeu, et gagne 2 ducats moins 4 c, maintenant nous devons ajouter 1 ducat à chaque part et nous avons d'une part 4 c et de l'autre 3 ducats moins* <**29 v**> *4 c, ajouter encore 4 c à chaque part et nous aurons 8 c égaux à 3 ducats, maintenant divise le nombre par c, c'est-à-dire 3 ducats par 8, d'où il vient 3/8 et c vaut autant, c'est-à-dire ce que le premier gagne au premier jeu, et au 2° jeu il gagne encore 3/8 de ducat qui valent 6/8, c'est-à-dire 3/4 et c'est ce que le premier a gagné en ne jouant que 2 jeux et ainsi fait-on dans les "raisons"*[35] *semblables.*

Deux hommes jouent aux échecs un ducat en 4 jeux, quand arrive le cas que le premier gagne le premier jeu, le 2°, le 3°, et se retire du jeu sans jouer plus selon la volonté de son compagnon, je demande ce qu'il a gagné. Supposons qu'il a gagné 1 c au premier jeu, alors il gagne 1 c et 1/3 au 2° jeu, parce qu'il ne reste à gagner que 3 jeux, et au 3° jeu il lui vient 1 c 1/2 parce qu'il ne lui reste, gagné le 2° jeu, que 2 jeux pour gagner

[32] Il en était ainsi le 21 janvier 1994 lorsque j'ai fait un exposé sur ce sujet au séminaire d'Histoire du Calcul des probabilités et des Statistiques du CAMS de l'EHESS et rien ne semble avoir évolué depuis.

[33] Codice Magliabechiano CL. XI, 120 de la Biblioteca Nazionale de Florence; Florence, Bibl. nat. Magl. Cl. XI, 120. Je propose cette traduction à partir de la transcription donnée dans [Tot85] pp. 234-235.

[34] "per ragione": je conserve la trace de l'ambiguïté, à mes yeux, de cette expression qui, ici, paraît évoquer tout autant qu'un calcul ou un enchaînement d'opérations, un raisonnement. Voir à ce sujet mon commentaire un peu plus loin.

[35] Ici "ragione" paraît être plus proche de " questions de compte"; voir la note 30.

toute la partie; si [bien] qu'il aura gagné 3 c et 5/6 et ainsi il devra avoir en son jeu 2 ducats moins 3 c et 5/6.[36]

Analyse et interprétation

L'auteur traite deux situations d'un même jeu: les échecs. Dans la première situation il y a deux joueurs et ils en sont à 2/0 en 3 jeux gagnants quand survient la question du partage de la mise et même, plus précisément, celle de la valeur du gain du premier joueur sur le gain du deuxième. Dans la deuxième situation les deux joueurs en sont à 3/0 en 4 jeux gagnants lorsque se pose la question du partage.

Considérons d'abord le premier problème. Je décompose le texte en propositions élémentaires afin de mieux suivre le raisonnement de l'auteur:

1	1°	deux hommes jouent aux échecs et font un dépôt de un ducat pour 3 jeux
	2°	il arrive que le premier gagne 2 jeux au 2°
	3°	il demande de ne pas jouer plus avant
	4°	combien le premier aura-t-il gagné sur le ducat du 2°?
2	5°	supposons que le premier ait gagné sur le 2° *1 c* au premier jeu
	6°	tu dois voir, par "raison", que dans le 2° jeu il devrait gagner autant que dans le premier et aura donc gagné une autre *c*
	7°	et ainsi maintenant se trouve avoir gagné *2 c* pour les deux jeux
	8°	le 2° qui a perdu se trouve avoir maintenant sur son ducat *1* ducat moins *2 c*
3	9°	sachant que si celui qui a perdu 2 jeux gagnait 2 autres jeux contre son compagnon, ils n'auraient pas gagné l'un sur l'autre quoi que ce soit
	10°	supposons maintenant que le 2° commence à gagner contre le premier un jeu
	11°	je dis qu'il gagne dans ce jeu *1* ducat moins *2 c* qu'avait gagné le premier
4	12°	et la "raison" en est que si celui qui avait au début gagné 2 jeux avait encore gagné le 3° jeu, [cela] lui aurait gagné au premier tout ce qui restait de son ducat
	13°	et ainsi au contraire pour ce que gagne le 2° sur le premier, c'est-à-dire *1* ducat moins *2 c*
5	14°	maintenant enlève un ducat moins *2 c* de la part que le premier avait gagné sur le 2°, c'est-à-dire *2 c*
	15°	il restera encore au premier *4 c* moins *1* ducat de gagné
	16°	et le second qui commence à recevoir il devra avoir dans [son] jeu *2* ducats moins *4 c*
6	17°	maintenant considère pour le 1° qui a gagné 2 jeux que si le 2° qui a gagné dans les deux jeux gagnait le 3° jeu il se ferait qu'il gagnerait tout ce que le 1° a en plus du ducat

[36] Voir le texte italien en Annexe II.

7	18°	et si le premier gagnait ce 3° jeu il gagnerait *2* ducats moins *4 c*
	19°	et il doit en être de même pour le 2° sur le premier
8	20°	maintenant supposons que le 2° gagne le 2° jeu
	21°	il se trouve donc avoir gagné sur le premier *2* ducats moins *4 c*
	22°	et cela se doit trouver touché de ce que le premier lui avait gagné
	23°	et cela du fait que l'un comme l'autre a gagné 2 jeux
9	24°	maintenant regarde quand le 2° gagne sur le premier le 2° jeu
	25°	et gagne *2* ducats moins *4 c*
10	26°	maintenant nous devons ajouter 1 ducat à chaque part
	27°	et nous avons d'une part *4 c* et de l'autre *3* ducats moins *4 c*
	28°	ajouter encore *4 c* à chaque part
	29°	et nous aurons *8 c* égaux à *3* ducats
	30°	maintenant divise le nombre par *c*, c'est-à-dire *3* ducats par *8*
	31°	d'où il vient *3/8* et *c* vaut autant, c'est-à-dire ce que le premier gagne au premier jeu
11	32°	et au 2° jeu il gagne encore *3/8* de ducat
	33°	qui valent *6/8*, c'est-à-dire *3/4*
	34°	et c'est ce que le premier a gagné en ne jouant que 2 jeux
12	35°	et ainsi fait-on dans les "raisons" semblables.

Commentaire

Le texte se décompose en 12 moments et 35 propositions qui constituent à la fois un algorithme de calcul et, en partie, des justifications de la réponse donnée au problème considéré.

Deux joueurs qui jouent aux échecs en trois parties gagnantes décident de se séparer au moment où l'un des deux à déjà gagné deux parties alors que son adversaire n'en a gagné aucune; ils ont misé chacun un ducat, ce qui constitue un enjeu de deux ducats à gagner par le vainqueur, c'est-à-dire le premier des deux qui aura gagné trois parties, et ils veulent savoir, dans ces conditions, combien celui qui mène 2/0 doit obtenir sur le ducat misé par son adversaire en plus de son propre ducat. Ce qui sous-tend cette question c'est l'idée que chaque fois qu'un joueur gagne une partie il lui revient une certaine part de la mise de l'autre; **c'est, en fin de compte, la valeur de cette partie**. Que chaque partie jouée n'ait pas la même valeur est une idée profondément originale que l'on retrouvera explicitement chez Cardan et plutôt comme une découverte chez Pascal; la plupart des autres solutions proposées du problème partent de l'idée de répartir les enjeux proportionnellement aux parties gagnées ou inversement proportionnellement aux parties qui restent à être gagnées. Quant au jeu en question, les échecs, comment ne pas noter qu'il est plutôt difficile de le considérer comme un jeu de hasard[37]. La symétrie des situations qui intervient pour légitimer les gains ne repose donc pas sur le fait que le hasard rend effectivement la situation parfaitement

[37] Néanmoins il faut rappeler que certaines variantes du jeu d'échecs se jouaient, au moins au XIIIème siècle, avec un dé qui par le résultat de ses lancers permettait la manœuvre des pièces sur l'échiquier. Voir [Meh90] p.120.

symétrique mais uniquement comme principe de simplicité: chaque partie peut aussi bien être gagnée par chaque joueur; ce n'est pas le hasard qui joue mais l'égalité de valeur des joueurs. Si l'un était "plus fort" que l'autre il le battrait à tous les coups; seules les circonstances, donc d'une certaine façon le hasard, la "fortune", font que c'est l'un ou l'autre qui gagne. Ainsi le jeu n'est pas un jeu de hasard mais il est traité comme tel.

L'auteur considère le jeu en partant de la situation initiale (0/0) en la faisant évoluer par toutes les situations qui peuvent se présenter et en considérant à chaque passage d'une situation à la suivante ce que le gain de la partie considérée a rapporté à celui qui l'a gagnée et donc coûté à celui qui l'a perdue. Entre 0/0 et 1/0 le joueur qui a gagné la partie a donc gagné sur le ducat de son adversaire une quantité inconnue, appelée "*c*" comme "cosa" (la "chose", l'inconnue, ce que nous noterions x) et se trouve donc en droit de considérer qu'il possède $1+ c$. Puis l'auteur affirme que la valeur de la deuxième partie qui est gagnée quand on passe de la situation 1/0 à la situation 2/0 est aussi égale à c, en nous disant que cela se voit "per ragione". En fait l'auteur s'appuie sur un **double principe de symétrie**, qu'il n'explicite pas, le considérant probablement comme évident. Il considère que le gain d'un joueur quand il gagne est non seulement égal à ce que l'autre perd (**premier principe de symétrie**) mais surtout est égal au gain de l'autre si c'est l'autre qui gagne (**deuxième principe de symétrie**[38]), ce qui peut être considéré comme l'enjeu de cette partie ou la valeur de cette partie. Ainsi à 1/0 l'enjeu de la partie est inconnu, appelons le c'; si c'est le premier joueur qui gagne, à 2/0 il a gagné $c + c'$, si c'est le deuxième il a "gagné" $c' - c$ mais comme il se retrouve alors dans la situation 1/1 il a *1* et n'a rien gagné; $c' - c$ est donc égal à 0 et c' est égal à c. C'est un résultat que Pascal ne fera que constater dans sa correspondance avec Fermat[39].

Arrivé à 2/0, et un partage $1+ 2c$ / $1- 2c$, l'auteur, très habilement, au lieu d'introduire une deuxième inconnue pour la valeur de la partie suivante qui permet d'atteindre la situation 3/0 ou la situation 2/1 se sert du fait qu'à 3/0 le deuxième joueur qui a tout perdu a donc perdu 1 - 2c qui représente la valeur de la troisième partie; ainsi à 2/1 les gains de chacun sont donc, d'après le deuxième principe de symétrie, $2c - (1 - 2c)= 4c - 1$ pour le premier joueur et $1- 4c$ pour le deuxième joueur qui possède maintenant $2 - 4c$[40].

Arrivé alors à 2/1 si le premier gagne il gagne les $2 - 4c$ du deuxième puisqu'il a tout et si c'est le deuxième qui gagne il gagne, par symétrie, $2 - 4c$, sur le premier. Ces $2 - 4c$, que gagne le second, sont égaux aux $4c - 1$ qui représentent les gains du premier, puisqu'à 2/2 ils doivent avoir la même somme[41].

---

[38] Ce deuxième principe de symétrie n'a rien d'évident; on pourrait considérer, par exemple, que dans la situation 1/0 les deux joueurs ne sont pas dans les conditions d'un jeu équitable et que, de ce fait, le gain de la partie devrait rapporter plus au deuxième joueur qu'au premier. Il est même tellement peu évident qu'il est "faux" avec trois joueurs... et que c'est alors le joueur qui a gagné le moins de parties qui gagne le moins (voir le schéma du jeu pour trois joueurs).

[39] Voir, ici, le tableau des valeurs des parties dans l'introduction.

[40] Nous en sommes à la 16° étape.

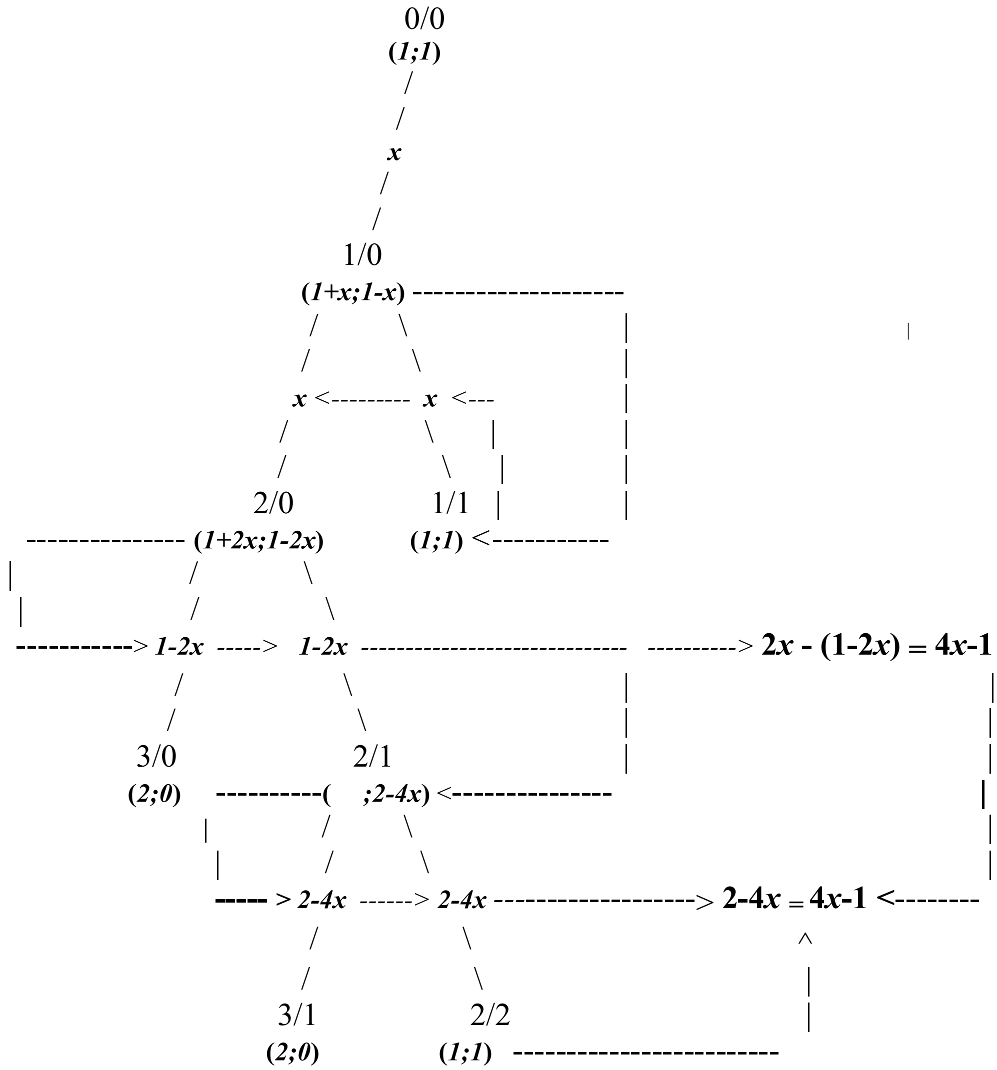
[41] Nous en sommes à la 25° étape. J'ai, ici, beaucoup simplifié le "raisonnement" de Ohri. En particulier, la 17° étape doit être la préparation des 18° et 19° étapes et il faut, je pense, comprendre: quand le premier a gagné 2 jeux (à 2/1), si le deuxième, qui va gagner deux jeux (car nous sommes dans les conditions de la 9° étape) gagnait la 3ème partie (que doit gagner le premier pour être le vainqueur... mais qui est en fait la 4ème partie jouée) il reviendrait à égalité (2/2) et gagnerait donc ce que le premier a en plus de son ducat dans la situation 2/1.

Tout se passe alors comme s'il manquait plusieurs étapes dans le raisonnement et dans l'algorithme entre la 25° et la 26° étapes. En effet nous devrions avoir entre les 25° et 26° étapes:

a) le premier (à 2/1) il a *4c - 1* de gagné (c'est le résultat de la 15° étape)
b) donc *4c - 1* doit être égal à *2 - 4c* (d'après les étapes 17 à 25).

On peut alors reprendre le fil de l'algorithme qui consiste à résoudre une équation du premier degré par "al jabr"[42] (26° étape et suivantes, jusqu'à la 31°).

Je propose ci-après un graphe qui représente les étapes de cet algorithme en gardant la trace, à chaque étape du jeu, du partage des mises et de la valeur de chaque partie[43]:



Nous pouvons remarquer que Ohri aurait pu prendre un chemin beaucoup plus "droit", après la 13ème étape. En effet, on voit, très facilement, sur le graphe précédent qu'il est possible de proposer l'algorithme suivant, à nos yeux plus systématique et plus simple:

5 16° le second qui commence à recevoir il devra avoir 2 ducats moins 4 c[44]

---

[42] De 4x - 1 = 2 - 4x on passe à 4x = 3 - 4x (26° et 27° étapes) par "al jabr" (26° étape), et de 4x = 3 - 4x à 8x = 3, à nouveau par "al jabr" (28° étape).
[43] Le chemin fléché indique, succinctement, la progression du raisonnement.

6 17° maintenant considère pour le 1° qui a gagné 2 jeux que si le 2° qui a gagné dans les deux jeux gagnait le 3° jeu il se ferait qu'il gagnerait tout ce que le 1° a en plus du ducat

7 18° et si le premier gagnait ce 3° jeu il gagnerait *2* ducats moins *4 c*
19° et il doit en être de même pour le 2° sur le premier

8 20° maintenant supposons que le 2° gagne le 2° jeu
21° il se trouve donc avoir gagné sur le premier *2* ducats moins *4 c*

9 22° et il a donc dans son jeu 4 ducats moins 8 c
23° tu dois voir que 4 ducats moins 8 c sont égaux à 1 ducat

10 24° maintenant nous devons ajouter 8 c à chaque part
25° et nous avons 4 ducats égaux à 1 ducat et 8 c
26° maintenant retranche 1 ducat de chaque part
27° et nous avons 3 ducats égaux à 8 c[45].

Ce qui provient du graphe "modifié":

```
                                 0/0
                                (1;1)
                                  /
                                 /
                                x
                               /
                              /
                           1/0
                        (1+x;1-x)--------------------
                          /     \                   |
                         /       \                  |
                        x <--------- x <---         |
                       /              \    |        |
                      /                \   |        |
                   2/0                1/1  |        |
   ----------------(1+2x;1-2x)       (1;1) <---------------
  |                  /       \
   -----------> 1-2x -------->1-2x ------------------------
                  /              \                         |
                 /                \                        |
              3/0                2/1                       |
             (2;0)    ----------(    ;2-4x) <---------------
                     |           /       \
                     |          /         \
                      -------> 2-4x ---->2-4x------------------> (2-4x) + (2-4x) = 4-8x
                               /          \                                          |
                              /            \                                         |
                           3/1             2/2                                       |
                                          (1;1) -------------->  1 = 4-8x <-----------
```

[44] C'est la 16° proposition de Ohri, conséquence de la 8° et de la 13°. Ce raisonnement élimine les 14° et 15° propositions.
[45] C'est la 29° proposition de Ohri.

Néanmoins, ne perdons pas de vue que notre raisonnement s'appuie sur une représentation graphique[46] ce qui n'est, très probablement[47], pas le cas de l'auteur de ce texte. De plus, Ohri paraît guidé dans son raisonnement, à chaque étape, par la part de la mise gagnée ou perdue par chaque joueur. Dans cette optique, le calcul de Ohri est tout à fait cohérent.

Passons maintenant au deuxième problème qui est proposé, sinon traité, par notre auteur. Nous sommes toujours en présence de deux joueurs d'échecs, mais ici ils jouent en 4 parties gagnantes et semblent vouloir partager la mise de 1 (ducat) chacun à 3/0. La méthode précédemment utilisée peut l'être à nouveau[48], mais au prix de l'introduction d'une deuxième inconnue (c') à partir de la situation 2/0 et d'un très sérieux effort d'attention en dehors de toute représentation graphique. On trouve alors que c' est égal à *1/4* et c à *5/16*; le partage à 3/0 devrait donc être tel que le premier joueur reprenne *15/8* et le deuxième 1/8.

Mais notre auteur ne fait rien de tel, peut-être parce qu'il est nécessaire avec la même méthode d'introduire une deuxième inconnue. Qui plus est, ce qu'il propose est totalement incompréhensible[49] et inachevé puisque le texte s'arrête avant qu'il propose une valeur de c et un partage réalisable; il semble nous dire que ce partage devrait se faire à $3c + 5/6$ pour le premier et 2 ducats moins $(3c + 5/6)$ pour le deuxième. Ceci, et l'oubli d'un passage de la démonstration accrédite le fait que nous soyons en présence de la copie d'un autre manuscrit effectuée par quelqu'un qui ne comprend pas ce qu'il recopie.

Quelques remarques s'imposent. Tout d'abord le fait que le problème soit traité dans le contexte d'un jeu d'échec ce qui ne manque pas d'évoquer une origine possible arabo-musulmane[50]. Mais, surtout, ce contexte du jeu d'échecs, que nous ne retrouvons dans aucun autre document, attire notre attention sur deux composantes de la problématique: premièrement il ne s'agit pas d'un jeu de hasard[51], ce qui peut porter des interlocuteurs à contester ce traitement du problème basé sur la symétrie des situations des joueurs; deuxièmement le jeu d'échecs porte en lui cette méthode systématique qui consiste à envisager dans une situation donnée toutes les situations possibles au(x) coup(s) suivant(s), avant de jouer ce(s) coup(s). On peut comprendre que d' autres contextes, évoqués par les différents auteurs, comme la paume, la course à pied, le tir à l'arc ou à l'arbalète[52] induisent d'autres types de solutions et que le problème définitif, celui où il est, explicitement dit qu'il s'agit d'un jeu de hasard équitable qui assure la parfaite égalité des joueurs par leur interchangeabilité, se construise, historiquement, en relation

---

[46] Une représentation graphique du type de celle donnée plus haut dans la présentation générale du problème des partis.

[47] C'est un euphémisme!

[48] C'est un très bon test de la compréhension de la méthode que de le faire.

[49] Je crois comprendre que la valeur de la première partie est c, celle de la deuxième $c + 1/3$, et celle de la troisième $c + 1/2$ (pour des raisons qui m'échappent complètement, sinon qu'il reste, respectivement, 3 puis 2 parties à gagner...?), dont la somme fait bien $3c + 5/6$.

[50] Sous réserve qu'il s'agisse bien, ici, d'un jeu d'échecs et non pas d'un jeu joué sur un échiquier ou sur un damier sans qu'il s'agisse pour autant d'un jeu d'échecs. Voir [Meh90] p. 119.

[51] Voir la note 30.

[52] Ce sont les contextes que l'on trouve chez Pacioli.

avec la solution définitive. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà remarqué, si Ohri possède une méthode très fine pour un jeu en trois parties avec deux joueurs, il est parfaitement incapable de la généraliser, tant pour le nombre des joueurs que pour celui des parties.

Ohrigens

Le manuscrit **Urb.lat.291**, de la Bibliothèque Apostolique Vaticane, d'où est extrait le passage que nous allons étudier, est anonyme et non daté (d'après W. Van Egmond il daterait du début du XV^{e} siècle)[53]. Il comprend 166 pages qui se répartissent ainsi:

p. 1-33:	un traité des racines,
p. 34r-42r:	une traduction de la première partie de l'*Al-jabr* d'Al-Khwarizmi,
p. 42v-102v:	**un développement de l'algèbre qui dans sa première partie suit d'assez près le contenu du chapitre XV du *Liber abaci* de Fibonacci,**
p. 103-132:	sur les nombres carrés, des problèmes résolus par l'algèbre, une règle pour trouver les nombres parfaits,
p. 133-166:	un traité de géométrie pratique

En dehors des pages 81 à102 il s'agit d'une traduction d'une partie du manuscrit latin Vat.lat.4606 du XIV^{e} siècle de la Bibliothèque Apostolique Vaticane. Le contexte du manuscrit que nous étudions ici paraît être celui des écoles d'abaque où l'on étudiait l'algèbre. À partir de la page 94v, et après une longue série de questions d'algèbre, sans aucun changement d'écriture se trouvent des problèmes de partage d'une mise, résolus arithmétiquement. Ces problèmes ne se trouvent pas dans le manuscrit Vat.lat.4606; nous n'en connaissons pas l'origine.

Une traduction en français du texte italien

<94v> *Note sur ces questions secrètes que celui qui en a pris connaissance verra qu'il y a des "raisons"*[54] *à enregistrer et à ne pas jeter dans l'esprit de tout un chacun parce qu'on dit que celui qui montre tout n'a plus rien à dire. Pour autant note les et garde les en toi pour savoir répondre à qui te le demanderait.*

Si on te disait qu'il y a trois hommes qui jouent et qu'on te dise de quel jeu il s'agit, et qu'ils jouent en trois jeux et qu'ils ont mis 2 sous entre eux trois, et que celui qui le

---

[53] Avant 1455 d'après une note manuscrite d'un possesseur du manuscrit. Tous les renseignements que je donne ici proviennent de [Fra03]. Je remercie Maryvonne Spiesser de m'avoir fait connaître cette découverte de Raffaella Franci.

[54] "ragione": raisonnement (ou calcul), comme dans les deux autres textes, mais qui peut-être aussi ce qui est "juste" et ce qui est l'objet d'un calcul "en proportion".

premier laboure trois jeux retire les dits 2 sous, dont chacun a mis 8 deniers[55]. *Maintenant l'un a deux jeux, l'autre a un jeu et l'autre n'a aucun jeu; on demande, si on ne joue plus, combien revient à chacun. Sache qu'on ne peut pas donner cette "raison" d'elle-même si avant tu n'en fais pas plusieurs qui soient des jeux gagnants en une autre forme et ici, après, je parlerai de toutes.*

Tout d'abord nous dirons ceci: je dis que deux ont deux jeux par personne et l'autre n'a qu'un jeu, se faisant que celui qui le premier a les trois jeux remporte la mise. Combien revient par personne, la mise étant fournie en commun par tous les trois? Fais comme je dis: si celui qui a un jeu gagnait un autre jeu il serait au pair avec les deux autres et il aurait le tiers de toute la mise. Et si gagnait l'un de ceux qui ont deux jeux par personne il n'aurait rien celui qui n'a qu'un jeu, si bien que ce tiers ne va pas en commun cette fois. Donc ce tiers est commun qui est le 1/9 de chacun[56]*, si bien que celui qui n'a qu'un seul jeu, ne doit avoir de cette mise que le 1/9. Si bien que* **<95r>** *la mise commune étant de 24 deniers il n'aurait celui qui a un jeu que le 1/9, qui fait 2.2/3, et chacun de ceux qui avaient deux jeux par personne doivent avoir les 4/9 qui font 10.2/3 deniers par personne. Et ceci est la première chose à noter.*

Maintenant fait si l'un a gagné deux jeux et les autres n'en ont gagné qu'un seul par personne et qu'ils ne jouent plus; combien revient par personne? Là on doit faire ainsi: si celui qui a deux jeux gagnait l'autre jeu aucun des deux autres n'aurait rien, et si un des deux qui ont un jeu par personne gagnait le jeu, alors celui qui gagnerait aurait les 4/9 de toute la mise. Si bien que celui qui n'aurait rien gagné avant celui qui a les deux jeux il aurait 1/9, gagnant le compagnon qui a un jeu comme lui, et celui qui gagne qui a un jeu arriverait à deux jeux et aurait les 4/9, si bien que celui qui resterait avec un jeu ne toucherait alors que 1/9. Et maintenant on doit dire ainsi que n'importe lequel des deux qui ont un jeu par personne est dans cette aventure[57] *ou d'avoir rien ou les 4/9 de la mise ou un neuvième. Si bien que tu ajoutes ensemble rien avec 4/9 et avec 1/9 et ça fait 5/9 et, parce qu'ils sont trois personnes, il revient le tiers par personne, c'est-à-dire les 5/27 de toute la mise. Si bien que, donc, les deux qui ont un jeu par personne, chacun d'entre eux doit avoir les 5/27 de la mise et celui qui avait deux jeux doit avoir les 17/27 de la mise. Et tu as l'offre. Et note bien tout.*

Ensuite on dit que les deux ont deux jeux chacun et que l'autre n'a aucun jeu; que vient-il par personne de la mise totale? Ce qui est vite fait: que si l'un de ces deux qui ont deux jeux par personne gagne il aurait tout, et celui qui n'a pas un seul jeu n'aurait rien. Et si celui qui n'a pas un jeu gagnait un jeu, donc, déjà il aurait un jeu et les deux autres deux jeux par personne, et il viendrait à celui qui a un jeu le 1/9 de toute la mise et à ceux qui en ont deux par personne, à chacun les 4/9, comme on l'a déjà dit plus haut. Si bien que, donc, ce 1/9 est touché pour le tiers par chacun[58]*, ce qui fait 1/27. Si bien que celui qui n'a aucun jeu touche 1/27 et les autres qui ont chacun deux jeux par personne touchent, par personne, les 13/27 de toute la mise. Et tu as l'offre. Et note bien toutes ces choses qui sont très belles à savoir bien faire.*

<95v> *Je peux aussi dire que l'un a deux jeux, l'autre en a un, l'autre n'en a aucun; je demande combien revient, par personne, de toute la mise. Fais ainsi: que tu dises que celui qui a deux jeux gagne l'autre jeu, et il ramasse tout. Et si celui qui a un jeu*

[55] 1 sou est égal à 12 dinars.

[56] On peut comprendre: "qui donne le 1/9 qui revient à chacun pour la situation 2/2/2".

[57] "ventura".

[58] Il semble bien que l'auteur attribue à chaque joueur le tiers de ce que chaque joueur pourrait gagner à l'étape suivante pour chaque configuration.

gagnait ce jeu il aurait deux jeux et il viendrait, comme on l'a vu précédemment, qu'il aurait les 13/27 chacun des deux qui ont maintenant deux jeux par personne. Et si celui qui n'a aucun jeu gagnait ce jeu il aurait un jeu, si bien que comme il est dit plus haut il reviendrait à ceux qui maintenant ont chacun un jeu par personne, il reviendrait à ces deux là les 5/27 de toute la mise. Si bien qu'on fait maintenant cette "raison" que tu veux, ou celle de celui qui a un jeu ou celle de celui qui n'en a pas un. Et nous disons de celui qui a un jeu, que si celui qui a deux jeux gagnait l'autre jeu, donc que celui qui a un jeu n'aurait rien, et si lui gagnait ce jeu il aurait deux jeux pour lesquels il toucherait les 13/27 de toute la mise. Et si celui qui n'a pas un jeu gagnait, celui qui a un jeu toucherait les 5/27. Donc celui qui a un jeu touche le 1/3 de rien ajouté à 13/27 et avec 5/27 qui font 18/27 dont le 1/3 (est) 6/27, si bien que celui qui a un jeu touche les 6/27 de toute la mise. Et maintenant tu vois pour celui qui a un jeu nul, que si celui des deux jeux gagne, lui n'a rien, et si celui qui a un jeu gagnait, lui aurait 1/27, et si lui-même gagnait il aurait les 5/27, si bien qu'il doit avoir le 1/3 et joins rien avec 5/27 et avec 1/27, dont le 1/2[59] *fait précisément 2/27, si bien que celui qui a un jeu doit avoir les 6/27 de toute la mise et celui qui n'a pas un jeu doit avoir les 2/27. Et maintenant pour trouver ce que doit avoir celui qui a les deux jeux, tu dis ainsi: s'il gagne ce jeu il ramasse toute la mise, et si gagne celui qui a un jeu il retire les 13/27, et si gagne celui qui n'a aucun jeu alors celui des deux jeux en a les 17/27, si bien que tu ajoutes ensemble tout avec 13/27 et avec 17/27 et ça fait 57/27, dont le tiers est 19/27, si bien qu'il touche les 19/27. Et celui de un jeu il en touche 6/27 et celui qui n'a aucun jeu il en touche les 2/27 de toute la mise fournie par eux trois. Cela s'entend toujours*[60] *et tu as l'offre. Et note tout bien.*

Il manque maintenant si on disait que l'un a deux jeux et les deux autres n'ont aucun jeu; combien revient par personne? Ceci se connaît par ce qui a été dit plus haut, et nous dirons ainsi: si celui qui a les deux jeux gagnait l'autre jeu il aurait toute la mise et les autres n'auraient rien. Maintenant si un des deux qui n'ont aucun jeu chacun gagne ce jeu **<96r>** *ce serait la "raison" déjà dite plus haut; celui qui aurait maintenant un jeu il toucherait les 6/27 de toute la mise et l'autre les 2/27. Si bien que, maintenant, tu vois que les deux qui n'ont aucun jeu chacun sont à l'aventure ou de n'avoir rien ou l'un d'avoir les 6/27 ou les 2/27, si bien que tu joins ensemble rien et 6/27 et 2/27 et ça fait 8/27, si bien que le tiers de 8/27 qui est 8/81 est touché par personne par ceux qui n'ont aucun jeu, si bien que entre eux deux ils touchent les 16/81; le reste enfin de toute la mise c'est 65/81 qui est ce que touche celui qui avait deux jeux. Maintenant, voyons si c'est ainsi qu'il touche les 65/81, et disons que si celui qui a deux jeux gagne il aura toute la mise, et si gagne un des deux autres qui n'ont aucun jeu il en aura 19/27, et aussi, si c'est l'autre des deux qui gagnait, celui des deux qui gagne a les 19/27. Si bien que pour chacun de ces deux qui gagnait il aurait 19/27 et gagnant lui-même il aurait tout, si bien que tu joins ensemble tout et deux fois 19/27 et ça fait 65/27, dont il en touche le tiers qui est 65/81. Si bien que tu vois clairement que celui qui a deux jeux touche les 65/81 de toute la mise, et ceux qui n'ont pas un jeu ils touchent les 16/81 entre eux deux, ce qui fait 8/81 pour un... Et tu as l'offre. Et note bien les ressemblances. Et si tu as bonne intelligence, comme tu devrais avoir, pour ces "raisons" qui sont faites ici, tu dois voir comment on fait le mode d'autant d'hommes et d'autant de jeux qu'on a dit. Et par Dieu note bien tout; ce sont des choses dont il faut être fier entre tous les maîtres du monde.*

---

[59] 1/3; il doit s'agir d'une erreur de transcription de Raffaella Franci.

[60] "s'intenda senpre"... je ne suis pas très satisfait de la traduction.

Note que les susdites "raisons" se font toujours en commençant par faire celles qui sont le plus insérées dans le [?][61] des jeux qu'ils ont composés. Si bien que si je dis avec quatre jeux et que tu supposes que toutes les personnes ont trois jeux et qu'une personne avait deux jeux, c'est-à-dire un de moins que les autres, de supposer qu'ils ont trois jeux et qu'un avait deux jeux, et ainsi on va ensuite en descendant comme tu as vu descendu les susdites si bien que tu en viens à affirmer pour celle qui te fût proposée. Et prends bien note.

<**Note marginale**> *Au sujet de ces "raisons" de trois qui font en trois jeux il manque encore deux modes qui sont écrits plus loin à la page 97.*

<97r> *Aux "raisons" des trois personnes qui jouent en trois jeux il manque encore deux modes; c'est-à-dire que l'un des deux modes est que si les deux avaient chacun un jeu et l'autre n'en avait aucun. Je demande combien revient par personne. Tu fais ainsi: que si un de ces deux qui ont un jeu par personne gagne l'autre jeu, il aurait deux jeux et cela lui vaudrait comme on a dit dans les [modes] passés les 19/27, si bien que à ceux qui ont un jeu par personne, celui d'entre eux qui gagnerait un autre jeu aurait les 19/27 de toute la mise et l'autre n'en aurait que les 6/27 et celui qui n'a aucun jeu n'en aurait que les 2/27. Et si celui qui n'a aucun jeu gagnait, lui, ce jeu là, chacun d'eux aurait le tiers de toute la mise. Si bien que tu vois maintenant clairement que chacun de ces deux qui ont un jeu par personne sont dans l'aventure d'avoir ou les 19/27 ou les 6/27 ou les 9/27, si bien que le tiers de cette aventure revient par personne, c'est-à-dire les 2/3 de toute la dite aventure entre eux deux, si bien que ajoute ensemble 19/27 avec 6/27 et avec 9/27 font 34/27 dont les 2/3 sont 68/81, si bien que ces deux touchent 68/81 d'où vient pour un 34/81. Donc tu diras que ceux qui ont un jeu touchent les 34/81 de toute la mise par personne, le reste qui est 13/81 va à celui qui a un jeu nul. Et fait le rôle[62] pour voir si c'est ainsi, et disons comme ça: si un de ces deux gagne, celui qui n'a pas un jeu touche les 2/27 de toute la mise, et ils sont deux ceux qui peuvent toucher les 2/27, si bien qu'ils peuvent toucher les 2/27 de deux façons, et s'il gagne il peut toucher les 9[63], si bien qu'il touche le tiers de deux fois 2/27 et d'une fois les 9/27 dont le 1/3 de tous est les 13/81 de toute la mise. C'est pourquoi tu ajoutes ensemble 2/27 et 2/27 avec 9/27 qui font 13/27 dont le tiers est 13/81 et tu as que ceux qui ont un jeu par personne touchent les 31/81[64] par personne de toute la mise, et celui qui n'a pas un jeu touche les 13/81. Et c'est l'offre.*

De l'autre de ces deux modes qui manquent, dont on a déjà parlé de l'un, reste à dire ceci: si l'un d'eux avait un jeu et les deux autres n'en avaient aucun par personne, combien revient par personne? Cela se connaît par ce qu'on a dit ci-dessus, c'est-à-dire si nous voulons voir combien en vient à celui qui a un jeu il faut dire ainsi: si celui qui a un jeu gagne un autre jeu il aura deux jeux et les autres aucun. Donc il viendrait alors à celui qui avait les deux jeux les 65/81 comme c'est dit où l'on parle de cette "raison" à la page 95[65]. Si bien que ceux qui n'ont aucun jeu auraient les 8/81 par personne. Et si ce jeu c'est l'un des deux qui n'ont aucun jeu qui le gagnait, alors la

[61] "liviaticha":.....?
[62] "E farola per vedere se cossi è".
[63] Il faut lire: 9/27.
[64] Il faut lire: 34/81.
[65] À peu près ici, le manuscrit doit passer au folio 97v; le "preprint" dont je dispose ne le mentionne pas...

"raison" serait comme ce qui est dit plus haut que les deux auraient un jeu par personne et l'autre aucun et viendrait par personne à ceux qui ont un jeu par personne comme il est dit là, les 34/81 et à celui qui n'a pas de jeu les 13/81. Si bien que deux sont ceux pour lesquels provient l'aventure de celui qui a un jeu de toucher les 34/81 de toute la mise, et si ce seul gagnait ce jeu il aurait les 65/81, et donc il devrait avoir le 1/3 de 65/81 joint avec deux fois 35/81 dont 133/81 est toute la somme, dont pour le 1/3 il lui vient 133/243, si bien que celui qui a un jeu touche les 133/243 de toute la mise et les deux autres le reste[66] *par moitié, qui est 55/243 par personne. Maintenant il manque, pour voir s'il en est ainsi, combien vient par personne à chacun des deux qui n'ont aucun jeu, et on dit ainsi: tu vois que si celui qui a un jeu gagne il en vient à l'un de ces deux qui n'ont aucun jeu les 8/81 de toute la mise et si l'un de ces deux le gagnait ce jeu, l'autre aurait les 13/81, et si cet autre le gagnait, il aurait les 35/81*[67]*, si bien que chacun de ces deux qui n'ont aucun jeu est dans l'aventure ou d'avoir les 8/81 ou les 34/81 ou les 13/81. Si bien que ajoutés ensemble ils font 55/81 dont le tiers revient à chacun de ces deux qui n'ont aucun jeu, qui est les 55/243. Si bien que l'offre reste comme faite. Et note bien tout. Et maintenant c'est dit pour autant de modes et par autant de manières que l'on peut dire de 3 hommes qui jouent à qui le premier a gagné 3 jeux et que chacun d'eux met dans la mise. Et de cette façon tu dois noter que si on fait tout ce qui se dit à ce même niveau de jeux et qu'on voudrait écrire dans tous les modes qu'on peut dire, il n'y aurait jamais de fin, si bien que toi qui étudies cela, juge le bien et tu auras notice de chacun des autres dans quelque forme qu'on t'ai dite. Celles-ci te donnent des éclairages si tu en as la compréhension, comme tu devrais l'avoir, ayant déjà étudié jusqu'à cette étape, si bien que je laisserai cela sans plus rien dire à présent, et ce qui est dit suffit. Et note bien tout ce qui est dit plus haut.*[68]

Analyse et commentaire

L'auteur pose la question du partage d'une mise de trois fois 8 deniers entre trois joueurs qui jouent en 3 parties gagnantes et veulent reprendre ce qu'il leur revient lorsqu'ils se trouvent dans la situation 2/1/0. Il commence alors par envisager la situation 2/2/1, qui, nous le savons dans la perspective "pascalienne", est la plus simple et peut être suivie de l'étude des situations successives: 2/1/1 et 2/2/0 (indifféremment) puis 2/1/0 (c'est la situation du problème) qui peut être suivie de celles de 2/0/0 ou 1/1/0 (indifféremment) et enfin de 1/0/0. C'est exactement le plan que suit l'auteur mais en allant dans un premier temps jusqu'à 2/0/0, sans attacher une importance particulière à la situation qui faisait l'objet de la question initiale, et en traitant un peu plus loin les deux dernières situations. Il considère, en fin de compte, sept situations: quatre qui sont nécessaires à la résolution du problème posé, puis trois autres par volonté d'explorer systématiquement toutes les situations dans lesquelles peuvent se trouver trois joueurs qui décident de jouer en trois parties gagnantes.

[66] "l'avanso".

[67] Il faut lire: 34/81.

[68] Voir le texte italien en Annexe III.

Afin de nous procurer une vision d'ensemble des situations possibles j'en donne le graphe suivant:

```
                              0/0/0
                             /  |  \
                            /
                           /
                       1/0/0
                      /  |  \
                     /   |   \
                    /    |    \
                 2/0/0  1/1/0  1/0/1  -------------------->  1/1/0
                /  |  \                                     /  |  \
               /   |   \                                   /   |   \
              /    |    \                                 /    |    \
          3/0/0   2/1/0  2/0/1                         2/1/0  1/2/0  1/1/1
               /  |  \
              /   |   \

          3/0/0  2/1/0  2/0/1
               /  |  \
              /   |   \
             /    |    \
          3/1/0  2/2/0  2/1/1  ------------------------->   2/1/1
               /  |  \                                     /  |  \
              /   |   \                                   /   |   \
             /    |    \                                 /    |    \
          3/2/0  2/3/0  2/2/1                         3/1/1  2/2/1  2/1/2
                      /  |  \
                     /   |   \
                    /    |    \
                 3/2/1  2/3/1  2/2/2
```

L'auteur va donc, de manière parfaitement logique par rapport à cette description du déroulement du jeu, envisager successivement les situations:

2/2/1; 2/1/1; 2/2/0[69]; 2/1/0, puis 2/0/0, et enfin 1/1/0 et 1/0/0.

Il dit, très explicitement: *Sappi che quessta ragione*[70] *non si può dichiarare per sé sola se prima non ne fai alquante che sia li giuochi vinti in altra forma e qui dirò appresso ditutte*[71] et *Nota che le sopraditte ragione si fanno che senpre si cominciano a ffare da quelle che sono pio inzerrte ala liviaticha de giuochi che ànno conposti. Sicché se dicie a quattro giuochi e ttue metti che tutti gl'omini abiano tre giuochi e uno omo abbia due giuochi, sicché uno meno di tutti, de mettere che abiano 3 giuochi e quello uno abbia due giuochi, e ccosie va poi digradando sicchome vedi digradati li sopraditti sicché vengni asserire a quello che tti fie proposto*[72].

---

[69] Il faut noter que l'auteur aurait pu, tout aussi bien, inverser l'ordre entre les situations 2/1/1 et 2/2/0.

[70] La "raison" de ce qui revient à chacun dans la situation 2/1/0.

[71] À la fin du deuxième paragraphe du folio 94v.

[72] Dernier paragraphe du folio 96r. L'auteur envisage donc ici un jeu en 4 parties gagnantes avec un nombre de joueurs qui n'est pas précisé et dont on peut penser qu'il est encore de trois joueurs ou bien même que notre "maître" considère, à juste titre comme pouvant être quelconque. Effectivement, en 4 parties gagnantes, la première

Le premier principe, explicite, est donc de se placer au départ du raisonnement dans une situation donnée telle que les situations possibles qui en découleraient si le jeu se poursuivait donnent un partage "évident", soit parce que le jeu est achevé, soit parce que tous les joueurs sont à égalité de parties gagnées.

On peut même avancer que pour l'auteur il est clair que si un nombre quelconque de joueurs jouent en *n* parties gagnantes il faut commencer par envisager la situation:

n-1/n-1/n-1/n-1/......../n-1/n-2

et "descendre" ensuite progressivement vers la situation initialement proposée[73]. Il estime qu'il a suffisamment envisagé de cas particuliers pour que ses auditeurs sachent faire fonctionner ce principe, comme il le dit: *E sse ài buono ingiengno come dovressti avere per queste ragione che ài quie fatte dei vedere lo modo come si fanno tutte* ***di quanti omini e di quanti giuochi diciesse***[74].

Avant d'aller plus loin dans l'analyse des principes que ce document révèle, je voudrais revenir sur l'expression, très imagée, utilisée par l'auteur et déjà citée un peu plus haut: *ccosie va poi* ***digradando*** *sicchome vedi* ***digradati*** *li sopradatti.* À partir d'une situation résolue, par exemple 2/2/1 qui est donc la première que l'on doit envisager, le Maître "descend" ce qui peut vouloir dire qu'il fait jouer un principe de "diminution" du nombre de parties jouées: 5 tout d'abord, puis 4, puis 3, puis 2, puis une. Ainsi doit-il envisager successivement:

en 5 parties	2/2/1 (1)	
4 parties	2/2/0 (2)	2/1/1 (3)
3 parties	2/1/0 (4)	
2 parties	2/0/0 (5)	1/1/0 (6)
1 partie	1/0/0 (7)	

ce qui ne correspond pas, tout à fait, à l'ordre dans lequel il envisage les différentes situations puisque cette description intervertit les situations (2) et (3)[75]. Elle est, cependant, probablement beaucoup plus proche de la "logique schématique" du Maître que la représentation arborescente que j'ai utilisée[76].

situation à envisager est bien 3/3/2 (avec trois joueurs), 3/3/3/2 (avec quatre joueurs) etc...

[73] Dans ma présentation schématique cette "descente" prend plutôt l'allure d'une "remontée". Ce détail n'est pas anodin comme on le verra par la suite.

[74] Fin de l'avant-dernier paragraphe du folio 96r.

[75] Le Maître paraît respecter le principe que j'utilise de "diminution" du nombre des parties entre les joueurs pour un nombre de partie jouées donné: par exemple, il envisage la situation 2/1/0 et pas les situations 1/2/0 ou 2/0/1 qui sont équivalentes, et il traite le cas 2/0/0 avant 1/1/0. Mais le fait d'envisager 2/1/1 avant 2/2/0, ce qui n'a aucune importance du point de vue de la résolution du problème, ne respecte pas ce principe en tant que principe systématique de description des situations. Il est raisonnable de considérer qu'à l'"intérieur" du principe de diminution du nombre de parties jouées, le nombre de situations qui se présentent ici (au maximum 2) ne contraint pas beaucoup à être systématique. Il n'en aurait pas été de même s'il avait traité explicitement le problème en 4 parties, ce qu'à juste raison il propose à ses auditeurs comme une simple application de sa méthode (après 3/3/2 qu'il évoque il faut envisager, en 7 parties jouées, les situations 4/3/0, 4/2/1, 3/3/1 et 3/2/2).

[76] J'utilise cette représentation pour donner à voir le plus clairement possible, étant donné notre outillage cognitif actuel, l'ensemble des situations.

Maintenant le point le plus délicat, pour ce qui est de la méthode, est de réussir à comprendre comment l'auteur justifie son principe de partage.

- Il est très clair que 2/2/1 peut déboucher, si l'on continue à jouer, sur 2/2/2, 2/3/1 ou 3/2/1.
- Il est clair que chacune de ces situations donne lieu à un partage "normal" dans deux cas (2/3/1 et 3/2/1): le vainqueur a toute la mise et les deux autres n'ont rien, et "évident" dans le dernier cas (2/2/2): chacun reprend sa mise.

Le deuxième principe, implicite, est donc de considérer que lorsque les joueurs sont dans la même situation ils se partagent la mise équitablement ce qui revient pour chacun à reprendre sa mise.

Si nous considérons, alors, le 3^{ème} joueur, celui qui n'a gagné qu'une seule partie quand les deux autres en ont gagné deux:

- dans un cas il obtient *1/3* de la mise,
- dans les deux autres cas il n'obtient rien.

La méthode utilisée par la suite, telle que nous la comprenons, revient à additionner les trois gains possibles et à diviser la somme par trois, "parce qu'ils sont trois"; ... peut-on reconstituer le principe, implicite, qui la justifie?

- Dans ce premier cas il semble que l'auteur dise quelque chose comme: "il a *1/3* de la mise comme chacun des deux autres joueurs, pour la situation 2/2/2, ce qui vaut *1/9* de la mise à chacun; et il n'a que cela. Il lui revient donc *1/9* de la mise".

Comment peut être "pensé" ce passage du 1/3 au 1/9 de la mise? Il me semble que rien ne s'oppose à ce que nous fassions l'hypothèse que le schème de pensée est le suivant:

- comme il y a trois joueurs, il y a dans chaque situation donnée trois situations possibles ("à l'aventure"); pour pouvoir envisager chacune de ces situations possibles il faudrait miser trois fois, donc, proportionnellement pour une seule de ces trois situations il revient le tiers de la mise de base. Le fait que les trois situations possibles se rencontrent en trois coups est une idée que l'on retrouve chez Cardan, dans son *De ludo aleae*, lorsqu'il évoque le "cycle" des possibilités pour un dé, où l'on peut comprendre qu'en lançant le dé 6 fois on devrait parcourir, logiquement sinon réellement, le cycle des 6 possibilités. Ainsi, lorsqu'il y a trois possibilités, pouvoir gagner *a* nécessite de miser *a/3*, pouvoir gagner *b* nécessite de miser *b/3*, pouvoir gagner *c* nécessite de miser *c/3*, et ainsi pouvoir gagner *a* **ou** *b* **ou** *c* nécessite de miser *a/3* **et** *b/3* **et** *c/3.*

Le troisième principe, implicite, consiste ainsi à considérer que ce qui reviendrait à un joueur dans une situation donnée pour l'une des situations qui en découlent immédiatement doit être divisé par trois, parce qu'il y a trois joueurs et donc trois situations à venir possibles qui nécessiteraient pour les obtenir de miser trois fois plus que la mise effective.

Ce qui vient d'être calculé pour le troisième joueur peut l'être pour les deux autres qui, par exemple pour le premier joueur, dans un cas ont tout (3/2/1), dans un cas rien (2/3/1), et dans un cas 1/3 (2/2/2); mais l'auteur choisit ici de dire qu'il leur reste *4/9* chacun car il reste *8/9* à partager à égalité d'après le premier principe puisqu'ils sont, tous les deux, dans la même situation.

Considérons alors la situation suivante: 2/1/1; celui qui a gagné 2 jeux, dans un cas il gagne tout (3/1/1), et dans deux cas il gagne *4/9* (2/2/1 ou 2/1/2); mais l'auteur s'intéresse alors aux deux autres: dans un cas rien, dans un cas *4/9* et dans le dernier cas *1/9* (par exemple, pour le deuxième joueur). Il ajoute alors ces gains et comme ils sont trois, le tiers est ce qui revient à chacun des deux. On peut donc considérer que ce calcul est la conséquence du troisième principe dans une nouvelle version de ce principe qui additionne, explicitement, les trois revenus des trois situations possibles. Notre auteur va procéder ainsi dans tous les autres cas qu'il envisage et il dit, comme je l'ai déjà mentionné, *E sse ài buono ingiengno come dovressti avere per queste ragione che ài quie fatte* ***dei vedere lo modo come si fanno tutte di quanti omini e di quanti giuochi diciesse***[77] et encore plus explicitement, *E ora è ditto in quanti modi e per quante maniere si può dire di 3 omini che giuochano a cchi prima àe vinto 3 giuochi e cche ciasschuno di loro mette su la possta.* ***E per questa maniera dei notare che ssi fanno tutte quante diciesseno di simile grado di giuochi e cchi volesse scrivere in qua' modi dire si può non arebbe mai fine*** *sicché tue che studi in ciò però stima bene quessti e arai notisia di ciasschuno altro in che forma ti fusse ditto. Quesste ti danno dichiaragione se ài intendimento come dovressti avere avendo già studiato infine a questo passo, sicché lasserò di ciò pio non dire al prezente che cciò che è ditto basta*[78] . Dans la mesure où il répète, à deux reprises et assez explicitement, que cette méthode est générale et où nous la voyons utilisée de manière systématique, je considère que nous pouvons lui attribuer ce principe général implicite (et le surnom d'Ohrigens[79]):

Principe général, implicite, d'Ohrigens: s'il y a *n* joueurs et que dans une situation donnée un joueur peut avoir dans les *n* situations possibles qui en découlent les *n* quantités d'argent $a_1, a_2, a_3, a_4,.........,a_n$ alors il lui revient, pour cette situation donnée, la quantité d'argent $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 +...... + a_n \ / \ n$;

Il faut aussi remarquer que Ohrigens, à plusieurs reprises en dehors de la première situation traitée, refait les calculs à titre de contrôle et, on peut le supposer, d'exercice pour ses élèves, chaque fois qu'il y a deux façons de trouver le résultat, c'est-à-dire lorsque deux joueurs ont gagné le même nombre de parties.

Je donne maintenant une présentation schématique de la résolution du problème par Ohrigens en désignant par A, B et C les trois joueurs qui veulent partager la mise lorsqu'ils sont dans la situation 2/1/0:

```
(1)        2/2/1
          /  |  \
         /   |   \
        /    |    \
   3/2/1  2/3/1  2/2/2  -------------------> C: 1/3  ------------>  1/9;  --------->  A et B: 4/9

(2)        2/1/1
          /  |  \
         /   |   \
        /    |    \
   3/1/1  2/2/1  2/1/2  ----> B ou C: (4/9,1/9,0) -->5/9 ----> 5/27;  ----------->  A: 17/27
```

[77] Ce passage se trouve à la fin du premier paragraphe du folio 96r. C'est moi qui souligne en gras!
[78] Fin du dernier paragraphe du folio 97r.
[79] Allusion au principe de l'espérance de Huygens.

```
(3)        2/2/0
          /   |  \
        /     |    \
      /       |      \
  3/2/0  2/3/0  2/2/1   ------------------>  C: 1/9 -------------> 1/27;  ------> A et B: 13/27
```

```
(4)        2/1/0
          /   |  \
        /     |    \
      /       |      \
  3/1/0  2/2/0  2/1/1   ---->B: (0,13/27,5/27) -----> 18/27 ----> 6/27
                             C: (0,1/27,5/27) ------->  6/27 ----> 2/27
                             A: (1,13/27,17/27) ---> 57/27 ---> 19/27
```

*
*   *

```
(5)        2/0/0
          /   |  \
        /     |    \
      /       |      \
  3/0/0  2/1/0  2/0/1   ---> B ou C: (0,6/27,2/27) ---> 8/27 ---> 8/81;  ------> A: 65/81
                                      vérification:
                             A: (1,19/27,19/27) -----> 65/27 ---> 65/81
```

*
*   *

```
(6)        1/1/0

          /   |  \
        /     |    \
      /       |      \
  2/1/0  1/2/0  1/1/1   ---> A ou B: (19/27,6/27,9/27) ---> 34/27 ---> 2/3(34/27) --------
-                       ---------------------------->  68/81 ----> 34/81;    -----------> C: 13/81
                                      vérification:
                             C: (2/27,2/27,9/27) -----> 13/27 ---> 13/81
```

```
(7)        1/0/0

          /   |  \
        /     |    \
      /       |      \
  2/0/0  1/1/0  1/0/1 ---> A: (65/81,34/81,34/81)--->133/81---> 133/243; ----> B ou C:
                                                                                 55/243
                                      vérification:
                             B ou C: (8/81,34/81,13/81) -----> 55/81 ---> 55/243
```

Le lecteur peut ainsi prendre la mesure de la virtuosité apparente de l'auteur, une virtuosité qui s'appuie sur les principes explicites et implicites que nous avons précédemment dégagés de leur gangue.

Une problématique historique renouvelée

En dehors des aspects techniques et méthodologiques étonnants que nous découvrons dans ces deux documents de la première moitié du XV^{e} siècle, en rupture totale avec l'historiographie du Calcul des probabilités, il est particulièrement intéressant de noter que le texte d'Ohrigens nous livre un certain nombre d'informations sur le contexte et la signification de la résolution de ce problème de partage des mises au cours du déroulement d'un jeu interrompu avant son terme normal. *E nnota bene di tutte che sono cose bellissime a ssapere ben fare*[80]*........E per dio nota bene tutto che sono cose d'averne onore infra tutti li maestri del mondo*[81]: notre maître d'abaque anonyme est parfaitement conscient de posséder avec la résolution de ce problème, la cohérence de sa solution et sa généralité, un savoir remarquable par sa beauté, suffisamment exceptionnel et original pour procurer à celui qui le possède une forme de reconnaissance sinon de pouvoir puisqu'il débute son exposé en disant ***Nota sopra queste segrete quistione che chi appresso vedraj che sono ragione da notare e da non gittarle in dela mente di ciasschuno peroché si dicie che si tutto mostra non sae pio. E pertanto notale e tielle in te per saperle rispondere a chi te ne adimandasse***. Il est frappant et assez énigmatique d'"entendre" ce maître dire à celui qui l'"écoute" de garder ce savoir secret et que, néanmoins, cette mention et ce savoir se retrouvent sous forme écrite dans le document qui nous est parvenu. La question se pose donc de savoir quel est le statut de ce texte? Est-ce lui, le maître, qui écrit ce texte qui doit rester secret, ou bien un élève-secrétaire autorisé à le faire, ce qui revient au même, ou est-ce l'un de ses élèves, futurs maîtres d'abaques eux-mêmes très probablement, qui s'autorise à le faire pour un usage personnel en transcrivant mot à mot l'exposé, intégralement mémorisé de son maître? Une issue possible et qui me paraît vraisemblable à cette contradiction apparente entre le caractère secret du sujet et son exposé dans un texte écrit est de supposer que la version écrite est à usage purement interne, qu'elle ne doit pas sortir du petit groupe des disciples du maître et que son but est de faciliter la tâche de mémorisation et d'assimilation sur un sujet particulièrement "acrobatique". Dans cette hypothèse il est incontournable d'étudier de près le contenu des pages 81 à 102 du manuscrit qui contiennent le passage sur le problème des partis, de la page 94v à la page 97v, et d'en estimer l'originalité[82]; un fait remarquable est déjà la présence au sein de questions d'algèbre de ce problème résolu de manière purement arithmétique. Ce seul fait établit peut-être une relation avec le texte de Ohri qui, lui, propose une solution algébrique; au début du XV^{e} siècle n'y aurait-il pas une forme de "circulation" du problème des partis en tant que problème pouvant être l'occasion de manipuler l'algèbre?

Il paraît assez clair que le maître considère que ce savoir qu'il communique à ses élèves avec tant de souci pédagogique, leur procure un bien probablement monnayable dans le cadre du recrutement d'un maître où les postulants se lancent des défis; c'est

---

[80] Fin du dernier paragraphe du folio 95r.

[81] Fin du premier paragraphe du folio 96r.

[82] Cette partie du Ms. Urb. Lat. 291 de la Biblioteca Apostolica Vaticana n'est pas pour le moment transcrite et publiée. Je ne puis que souhaiter que cela soit le projet de Raffaella Franci et du Centro studi della matematica medioevale.

peut-être ce qu'il faut comprendre lorsqu'il dit en préambule: *E pertanto notale e tielle in te per saperle rispondere a chi te ne adimandasse* car, de plus, le nombre de problèmes particuliers que la méthode permet de résoudre est infini, *si può non arebbe mai fine*[83].
Cette hypothèse paraît beaucoup plus vraisemblable que celle qui verrait dans le maître d'abaque un conseiller potentiel des joueurs. Néanmoins, dans les deux cas je ne comprends pas comment le détenteur de cette solution pourrait montrer sa supériorité sans en expliciter la méthode. Je ne peux conserver, en fin de compte, qu'une seule hypothèse suffisamment réaliste pour résister à la critique: la connaissance de cette solution, étant donnée sa cohérence et sa beauté, est destinée à un usage strictement interne au groupe des disciples du Maître et des futurs disciples de ses disciples. Savoir manipuler les enchaînements de propositions nécessaires à la solution assure la fascination rationnelle du maître sur ses élèves à l'intérieur du groupe restreint (peut-être réduit à un seul) de ceux qui vont eux-mêmes devenir, peut-être, des maîtres d'abaque et peut contribuer fortement à assurer sa réputation à l'extérieur et à accroître sa capacité à attirer le public potentiellement important de son école d'abaque.

Il faut noter encore, à l'appui du caractère général exceptionnel de cette solution que notre maître inconnu ne fait pas référence à un jeu particulier comme les autres auteurs du XV^{e} siècle que nous connaissons: Ohri, Calandri et Pacioli. Étant donné le niveau de généralité et de subtilité atteint par la solution de Ohrigens on peut penser que le problème est bien connu d'un certain nombre de maîtres d'abaque du début du XV^{e} siècle (ce que confirme le texte de Ohri): le problème circule, sinon des solutions. D'autre part voir apparaître ainsi, sans référence aucune au cas plus simple de deux joueurs, lui-même traité par Ohri, une solution aussi claire et aussi générale renforce cette impression que le problème ne peut qu'avoir, alors, déjà une assez longue histoire. À supposer que le texte d'Ohri, lui-même proposant une solution "correcte" si originale qu'on ne l'a jamais retrouvée[84] sous la plume de quiconque, mathématicien ou historien, jusqu'à nos jours, soit bien de la fin du XIV^{e} siècle, cette "longue histoire" court au moins depuis le XIV^{e} siècle jusqu'au milieu du XVII^{e} siècle. Les découvertes successives ces dernières années par des historiennes italiennes de la présence du problème et de solutions "correctes" dans des arithmétiques commerciales dont on connaissait néanmoins l'existence sinon le contenu ne peuvent qu'encourager la recherche de nouvelles traces. De même peut-on raisonnablement imaginer, qu'ayant échappé à de multiples dégâts collatéraux, un manuscrit arabo-musulman nous livrera, un jour, une trace antérieure de ce type de problème de partage[85]. Mais le très grand intérêt de ces solutions du début du XV^{e} siècle est surtout de permettre de reposer la question de l'originalité du phénomène d'émergence qui va se développer autour des travaux, au milieu du XVII^{e} siècle, de Pascal, Fermat et Huygens[86]. Ainsi voit-on à quel point ce n'est pas, uniquement, le fait d'avoir une solution, même très cohérente, même "simple" et très générale, mais, aussi, un certain nombre de conditions structurelles de nature sociale qui va impulser le phénomène. En particulier l'opposition est particulièrement tranchée entre un milieu très fermé, où l'on devine que le secret

---

[83] Fin du dernier paragraphe.
[84] Tout au moins à ma connaissance.
[85] Je suis d'autant plus porté à formuler cette hypothèse que le contexte du problème, dans le document qui est probablement le plus ancien, celui de Ohri, est celui d'un jeu d'échecs dont on sait qu'il est originaire de l'Inde mais qu'il est parvenu en Europe (probablement à la fin du XI^{e} siècle) par la Perse (au VI^{e} siècle) puis le Maghreb et la péninsule Ibérique; voir à ce sujet [Meh90] p.116.
[86] Voir [Meu96].

freine considérablement la circulation des arguments et leur fécondité, et un milieu beaucoup plus ouvert organisé en réseau d'échange[87].

Je remercie Marcel Maarek et Pierre-Philippe Calvo qui m'ont aidé de leurs conseils dans la traduction des textes italiens, et Maryvonne Spiesser qui par sa lecture attentive et critique m'a permis d'apporter à ce texte plusieurs corrections et précisions.

Bibliographie

[Cal82] Calandri, Filippo. (1982) *Una raccolta di ragioni: dal codice L. VI. 45 della Biblioteca Comunale di Siena*, a cura e con introduzione di Daniela Santini, Quaderni del Centro studi della matematica medioevale, 4, Siena, pp. 13 e 39.

[Cou65] Coumet, Ernest. (1965) Le problème des partis avant Pascal, *Archives internationales d'histoire des sciences*, 18/73, pp. 245-272.

[Cou70] Coumet, Ernest. (1970) La théorie du hasard est-elle née par hasard?, *Annales: Economies, Sociétés, Civilisations*, 25 (1970), pp. 574-598.

[Fra03] Franci, Raffaella. (2003) Una soluzione esatta del problema delle parti in un manoscritto della prima meta' del quattrocento, in corso di stampa su *Il bollettino di storia delle scienze mathematiche,* (à paraître).

[Meh90] Mehl, Jean-Michel. (1990) *Les jeux au royaume de France, du XIII^e au début du XVI^e siècle*, Fayard, Paris.

[Meu96] Meusnier, Norbert. (1996) L'émergence d'une mathématique du probable au XVII^e siècle, *Revue d'histoire des mathématiques,* 2, pp.119-147.

[Meu03] Meusnier, Norbert. (2003) Fermat et les prémices d'une mathématisation du hasard, *Actes du colloque Fermat 2001,* Toulouse, (à paraître).

[Ore60] Ore, Oystein. (1960) Pascal and the invention of probability theory, *American Mathematical Monthly*, 67, pp.409-419.

[Pas70] Pascal, Blaise. (1970) *Œuvres complètes* (tomeII), texte établi, présenté et annoté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer.

[Pas98] Pascal, Blaise. (1998) *Œuvres complètes* (tomeI), présentées, établies annotées par Michel Le Guern, Gallimard, La Pléiade, Paris.

[Sch88] Schneider, Ivo. (1988) The market place and games of chance in the fifteenth and sixteenth centuries, dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from manuscript to print.1300-1600*, Oxford: Clarendon Press, pp. 220-235.

[87] Un sens du mot "échange" qui apparaît d'ailleurs... au XVII^{ème} siècle: *communication réciproque (de documents, renseignements, etc.)*. Dictionnaire *Le Petit Robert*, 1972, p.529.

[Tot85] Toti Rigatelli, Laura. (1985) Il "problema delle parti" in manoscritti del XIV e XV secolo, dans Folkerts (Menso), Lindgren (Uta), éds., *Mathemata. Festschrift für Helmuth Gericke*, Boethius, 12, Wiesbaden-Stuttgart: Franz Steiner Verlag, pp.229-236.

[Tot92] Toti Rigatelli, Laura. (1992) Il problema delle parti, dans Bottazini (Umberto), Freguglia (Paolo), Toti Rigatelli (Laura), *Fonti per la storia della matematica*, Firenze: Sansoni Editore, pp. 347-351.

Annexe I : Extraits du Codice L. VI. 45 de la Biblioteca Communale de Sienne

<81 r> (12) Dua fanno alla palla grossa e fanno . che chi à prima sei
chacie vincca il giuoco Ora viene per chaso che uno di loro .
n'aveva vinte . 4 . et l'altro n'aveva vinte . 3 . et quando so-
no chosì la palla si forò in modo che non potettono finire il
guocho ma rimasono d'achordo che ognuno avessi quanto gli si con-
veniva . Vo sapere quanto tocherà a cascuno havendo posto su . 3
£ per uno : Dassi 2 modi alla detta ragone l'uno . / è / di fare
la ragone in su quello che è fatto et l'altro in su quello che
ss'à a fare El primo modo si pigla così che s'à a vedere . quan-
<81 v> te chacie ragonevolmente e possono fare tutta a dua // El secon-
do che si pigla in sulle chacie che ss'ànno a fare s'à . a vedere
quante chacie e gl'àno a fare caschuno di loro ad avere il guocho
. Dove chel primo . ha . 4 . cacie . gli resta ad fare dua ca-
cie ad avere il giuoco El secondo che à . 3 cacie gli resta ad
fare . 3 . cacie adunque il secondo . / à / a durare un tanto et
mezzo fatica del primo E però il primo arà a trarre un tanto et
mezo del secondo : che ogni volta chel primo trarrà . 3 . il se-
condo trarrà . 2 . Ora dì . dua ànno a dividere . 120 S el primo
. à . a trarre . 3 . El secondo . ' dua Vo sapere che tocherà per uno
E faccendo troverrai chel primo, arà . 72 S El secondo . 48 S ma
perchè e gl'è giuoco . di fortuna non si risponde absolutamente
che questo sia la verità apunto .

[.....]

<97v> (43) Tre fanno a balestrare 3 D in questo modo che quello che
prima / à / 3 cholpi ghuadagni e detti 3 D E balestrando . Il pri-
mo : n'à fatti questa . 2 el secondo uno El terzo non n'à cholpo
nessuno viene per chaso che si rompe un balestro e sono dachordo
che ognuno pigli quanto si gli chonviene . Vo sapere Quanto to-
cherà a ciaschuno : dico chosì ch'è bene sia chaso di fortuna si
pigla in . 2 . modi . l'uno / è / di piglare quello ànno facto e
<98 r> ll'altro . è / // di piglare quello ànno a fare e quale sia il
meglo non / è diterminato e però Quale de' dua si pigli non por-
ta . Adunque piglereno quello che ss'à a ffare et direno chosì e
più cholpi che possino fare chostoro Quanti saranno : saranno .
7 . adunque sel primo n'à dua / à 2/7 del guocho et il secondo il
1/7 che tramendua ànno e 3/7 la quale parte pigla di 3 D et di-
stribuiscigli nel primo et nel secondo dipoi . e 4/7 che rimane
ognuno divida per 1/3 E troverrai che al primo tocherà 1 3/7 e
al secondo . uno . e al terzo 4/7 .

Annexe II : Extraits du Codice Magliabechiano CL.XI.120 de la Biblioteca Nazionale de Florence

<c. 29r.> Due huomini giuochano a schacchi e fano d'uno ducato a 3 giuochi, viene caso ch'el primo vince 2 giuochi al 2^o, adomando non giuocando più quanto arà ad avere vinto lo primo al 2^o del lo ducato; pone ch'el primo vincesse al 2^o 1 c. al primo giuocho, tu dei vedere che nel 2^o giuocho eli de' vincere tanto per ragione quanto nel primo, adunque arà vinto una altra c., e cossì ora à d'avere vinto in 2 giuochi 2 c., el 2^o ch'à perduto ora arà ad avere in sul suo ducato 1 duc. meno 2 c.. E' da sapere che questo ch'à perduto 2 giuochi che se lli vincesse ao compagno 2 altri giuochi eli non li arebbe vinto alcuna cosa l'uno a l'altro, ora pognamo ch'el 2^o comincia a vincere al primo un giuoco, dico che li vince in questo giuocho 1 duc. meno 2 c. ch'avea vinto il primo e la ragione si è questa che se quello che avea vinto in prima 2 giuochi avesse ~~vinto ancora lo 3^o giuocho eli arebbe~~ vinto al primo tutta la altra parte del suo ducato e così per converso lo 2^o vinto al primo, cioè 1 duc. meno 2 c., ora cava 1 duc. meno 2 c. de la partita ch'el 1^o avea vinto al 2^o cioè 2 c., rimarrà allo primo ancora 4 c. di vincita men 1 duc., al 2^o che si comincia a riscuotere arà ad avere in sul giuocho 2 duc. men 4 c., ora guarda per lo 1^o ch'à vinto 2 giuochi che s'el 2^o ch'à vinto li du' giochi vincesse lo 3^o giuocho non resterebbe che non vincesse tutta la ragione ch'el 1^o à in su di ducato e se 'l primo vincesse questo 3^o giuocho elli vincerebbe 2 duc. men 4 c. e così de' fare lo 2^o al primo, ora pognamo ch'el 2^o vince lo 2^o giuocho adunque viene eli ad avere vinto al primo 2 duc. men 4 c. ed elli si de' trovare riscosso di quello ch'el primo li avea vinto e però che così à vinto 2 giuochi l'uno come lo altro, ora guarda quanto lo 2^o vince al primo lo 2^o giuocho elli vince 2 duc. men 4 c., ora dobbiamo giugere 1 duc. a ciascuna parte e aremo dal'una parte 4 c. e dal'altra 3 duc. men <c.29v.> 4 c., ancora giungi 4 c. a ciascuna parte e arai 8 c. equale a 3 duc., ora parte lo numero per le c., cioè 3 duc. per 8 che ne viene 3/8 e tanto vale la c., cioè li d. ch'el primo vince al primo giuocho e al 2^o giuocho vince ancora 3/8 di ducato che vale 6/8, cioè 3/4 e tanto à d'avere vinto el primo non giuocando più che 2 giuochi e così adopra nele simili ragioni.

Due homini giuochano a schacchi a 4 giuochi uno duc., ora viene caso ch'el primo vince lo primo giuocho el 2^o el 3^o e partesi da giuoco sanza giuocare più di volontà del suo compagno, adomando ciò che li da avere vinto. Pone che li vincesse al primo giuocho 1 c., ora al 2^o giuoco à da vincere 1 c. e 1/3 e però che non restava a vincere se non 3 giuochi, al 3^o giuocho eli vinse 1 c. 1/2 e però che li non restava vinto lo 2^o giuocho se non 2 giuochi a vincere tutta la partita, si che li arà vinto 3 c. e 5/6 e così dovrebbe eli avere in sul giuocho 1 duc. men 3 c. e 5/6.

Annexe III : Extrait du manuscrit Urb.lat.291 de Biblioteca Apostolica Vaticana

<c.94v> *N*ota sopra queste segrete quistione che qui appresso vedraj che sono ragione da notare e da non gittarle in dela mente di ciasschuno peroché si dicie che chi tutto mostra non sae pio. E pertanto notale e tielle in te per saperle rispondere a chi te ne adimandasse.

*S*e ti fusse ditto e sono tre omini che giuochano e dicha a che giuoco si volgla, e giuocano a ttre giuochi e ànno misso in tra loro tre soldi 2, e chi prima arae tre giuochi tira li ditti soldi 2, di che ciasschuno misse denari 8. Ora l'uno àe due giuochi, l'autro àe uno giuocho e l'autro non nne [àe] nessuno giuocho, adimando non giocando pio quanto ne viene a cciasschuno. Sappi che quessta ragione non si può dichiarare per sé sola se prima non ne fai alquante che sia li giuochi vinti in altra forma e qui dirò appresso di tutte.

*D*iremo prima quessta, e dicie che li due ànno due giuochi per omo e l'autro n'àe uno giuocho andando che chi prima àe 3 giuochi vincie la posta. Quanto ne viene per omo, essendo la possta fornita di comuno di tutti e ttre. Fae cosie che dicii: se quello ch'àe un giuocho vinciesse un autro giuocho sarebbe al pari con quelli altri due e arebbe lo terso di tutta la possta. E sse vincesse uno di quelli che ànno due giuochi per omo non arebbe quello ch'àe un giuocho niente, sicché quello terso ne va di chomuno in quella volta. Adunqua è comuno quello terso che è lo 1/9 di ciasschuno, sicché quello che non àe se non uno giuocho, ne de' avere di quella possta lo 1/9. Sicché <c.95r> essendo la possta comuna denari 24 n'arae quello ch'àe uno giuocho lo 1/9, che è 2 2/3, e cciasschuno di quelli che aveano due giuochi per omo denno avere li 4/9 che sono denari 10 2/3 per omo. E quessta è la prima notandi.

*O*ra fae se l'uno àe vinto due giuochi e l'autri n'ànno vinto uno per omo e non giuocano pio, quanto ne viene per omo. Quessta dei fare cosie: se quello ch'àe due giuochi vinciesse l'autro giuocho niuno di que' due arebbono niente, e sse uno di que' due che ànno un giuocho per omo vinciesse lo giuocho, adunqua quello che vinciesse arebbe li 4/9 di tutta la possta. Sicché quello che prima non arebbe nulla vinciendo quello ch'àe li due giuochi e arebbe 1/9, vinciendo lo compagno ch'àe un giuocho come lui e quello che vincie ch'àe un giuocho andrebbe a due giuochi e arebbe li 4/9, sicché a quello che ressterebbe in del'uno giuocho ne toccherebbe allora 1/9. E ora dei dire cosie che qualsisia di quelli due che ànno uno giuocho per omo stae in questa ventura o d'avere niente o li 4/9 de la possta o l'uno novino. Sicché aggiungi insieme nulla con 4/9 et con 1/9 e ffanno 5/9 che perché sono 3 omini ne viene lo terso per omo, cioè li 5/27 di tutta la possta. Sicché adunqua quelli due che ànno uno giuocho per omo, ciasschuno di loro de' avere li 5/27 de la possta e quello che aveva due giuochi de' avere li 17/27 de la possta. E ài lo proposto. E nnota bene di tutto.

Seguita se diciesse che li due avesseno due giuochi ciasschuno e l'autro non avesse giuocho niuno che ne viene per omo di tutta la possta. Quessta è tossto fatta, che sse uno di que' due che ànno due giuochi per omo vinciesse arebbe tutto, e quello che non à niuno giuocho non arebbe niente. E sse quello che non à giuocho niuno vinciesse uno giuocho adunqua già arebbe uno giuocho e l'atri due ànno due giuochi per omo, che ne verrebbe a quello che avesse uno giuocho lo 1/9 di tutta la possta e a que' che n'ànno due per omo, a ciasschuno li 4/9, siccome già di sopra fue ditto. Sicché adunqua quello 1/9 toccha per terso a cciasschuno, che è 1/27. Sicché a quello che non à niuno giuocho toccha 1/27 e algl' autri che ànno ciasschuno due giuochi toccha per omo li 13/27 di tutta la possta. E ài lo propossto. E nnota bene di tutte che sono cose bellissime a ssapere ben fare.

<c.95v> Ancho può dire che l'uno àe 2 giuochi, l'autro n'àe uno, l'autro non àe nessuno, adimando di tutta la possta quanta ne viene per omo. Fa ccossie: che dichi se quello ch'àe due giuochi vincie l'autro giuocho, ello tira tutto. E sse quello ch'àe uno giuocho vinciesse quello giuocho n'arebbe due giuochi e verrebbe, come ài veduto di sopra, che arebbe li 13/27 per uno quelli due che arebbeno ora due giuochi per omo. E sse quello che non àe giuocho nessuno vinciesse lui quello giuocho arebbe uno giuocho, sicché come ditto è di sopra ne verrebbe a quelli che ora arebbeno uno giuocho per uno per omo ne verrebbe a que' due li 5/27 di tutta la possta. Sicchè fae ora quelle ragione tue vuoi, o quella di quello ch'àe uno giuocho o quella di quello non n'ae niuno. E diciamo di quello ch'àe uno giuocho, che se quello che n'àe due giuochi vinciesse l'autro giuocho, dunqua quello ch'àe uno giuocho non n'arebbe niente, e sse lui vinciesse quel giuocho arebbe due giuochi di che li toccherebbe li 13/27 di tutta la possta. E sse quello che non n'àe giuocho niuno vinciesse, quessto che n'àe un giuocho li toccherebbe li 5/27. Adunqua a questo ch'àe uno giuocho tocca lo 1/3 di niente agiunto a 13/27 e con 5/27 che fae 18/27 che lo 1/3 <è>6/27, sicché a quello ch'àe un giuocho toccha li 6/27di tutta la possta. E ora vedi per quello che n'àe giuocho nullo, che se quello da due giuochi vincie, ello non n'arae niente, e sse quello ch'àe un giuocho vinciesse, ello n'arebbe 1/27, e sse llui proprio vinciesse arebbe li 5/27, sicché de' avere lo 1/3 e di giunto niente con 5/27 e con 1/27, che è lo 1/2 apunto 2/27, sicché quelo che àe uno giuocho de avere li 6/27 di tutta la possta e quello

che non àe giuocho niuno de' avere li 2/27. A ora per trovare che de' avere quello ch'àe li due giuochi e ttue di' cosie: se ello vincie quello giuocho tira tutta la possta, e sse lo vincie quello che n'àe uno giuocho ne tira li 13/27, e sse lo vincie quello che non àe giuocho niuno allora quello da due giuochi n'ae li 17/27, sicché aggiungi insieme tutto con 13/27 e con 17 /27 e ffae 57/27, di che lo terso si è 19/27, sicché li tocca li 19/27. E a quello di uno giuocho ne toccha 6/27 e a quello che non àe giuocho niuno ne toccha li 2/27 di tutta la possta fornita per loro tre. S'intenda senpre e ài la proposta. E nnota bene di tutto.

*M*ancha ora se diciesse che l'uno àe due giuochi e lgl'autri due non ànno giuoco nessuno, quanto ne viene per omo. Quessta si congnosscie per la ditta di sopra, e diremo cosie: se quello che àe li due giuochi vinciesse l'autro giuocho arebbe tutta la possta e quelli autri arebbeno nulla. Ora se uno di quelli due che non ànno giuocho niuno vincie quello giuocho < **c.96r**> sie sarebbe la ragione già detta di sopra, che arebbe ora uno giuoco e toccherebbeli li 6/27 di tutta la possta e al'autro li 2/27. Sicché ora vedi che stanno ala ventura que' due che non ànno giuocho niuno o d'avere niente o l'uno avere li 6/27 o li 2/27, sicché giungi insieme niente et 6/27 et 2/27 e ffae 8/27, sicché lo terso di 8/27 che è 8/81 li toccha per omo a quelli che non ànno giuocho nullo, sicché in tra loro due toccha li 16/81, l'avanso infine in tutta la possta sie 65/81 che tanto toccha a quello ch' avea due giuochi. Ora vediamo se è ccosie che li tocchi li 65/81, e diciamo se ne due giuochi ello vincie arae tutta la possta, e sse vincie uno di quelli altri due che non ànno giuocho niuno n'arae 19/27, e ccosie se vinciesse l'autro di que' due, quali di lo due vincie àe li 19/27. Sicché per ciaschuno di que' due che vinciesse arebbe 19/27 e vincendo lui arebbe tutto, sicché giungi insieme tutto e due volte 19/27 e ffae 65/27, che ne li toccha lo terso che è 65/81. Sicché bene vedi chiaro che a quello ch'àe due giuochi li toccha li 65/81 di tutta la possta, e a quelli che non ànno giuocho niuno ne toccha li 16/81 tra loro due che è per uno 8/81.. E ài lo proposto. E nnota bene dele simile. E sse ài buono ingiengno come dovressti avere per queste ragione che ài quie fatte dei vedere lo modo come si fanno tutte di quanti omini e di quanti giuochi diciesse. E per dio nota bene tutto che sono cose d'averne onore infra tutti li maestri del mondo.
Nota che le sopraditte ragione si fanno che senpre si cominciano a ffare da quelle che sono pio inzerrte ala liviaticha de giuochi che ànno conpossti. Sicché se dicie a quattro giuochi e ttue metti che tutti gl'omini abiano tre giuochi e uno omo abbia due giuochi, sicché uno meno di tutti, de mettere che abiano 3 giuochi e quello uno abbia due giuochi, e ccosie va poi digradando sicchome vedi digradati li sopraditti sicché vengni asserire a quello che tti fie proposto. E nnota bene.

<Nota a margine> *A quesste ragione di tre che fanno a tre giuochi ne mancha ancho due modi che sono scritte inansi a carte 97.*

<**c.97r**> Ale ragione de' tre omini che giuochano a ttre giuochi manca ancho due modi, cioè quessto sie l'uno di que' due modi, che sse li due avesseno ciasschuno uno giuocho e ll'autro non n'avesse niuno. Adimando quanto ne viene per omo. Fassi cosie: che se uno di que' due che ànno uno giuocho per omo vincie l'autro giuocho che arebbe due giuochi e verrebeli come dicie in dele passate li 19/27, sicché a quelli che ànno uno giuocho per omo quali di loro vinciesse un autro giuocho verebbe li 19/27 di tutta la possta e l'autro n'arebbe li 6/27 e quello che non n'àe giuocho niuno n'arebbe li 2/27. E sse quello che non n'ae giuocho niuno vinciesse quello giuocho lui. ciasschuno di loro arebbe lo terso di tutta la possta. Sicché vedi ora chiaramente che ciasschuno di que' due che ànno un giuocho per omo stanno in ventura d'avere o li 19/27 o li 6/27 o li 9/27. sicché lo terso di questa ventura ne viene per omo, cioè li 2/3 di tutta la dicta ventura intra loro due, sicché

aggiunti insieme 19/27 con 6/27 e ccon 9/27 fanno 34/27 che li 2/3 sono 68/81, sicché a quelli due ne tocca 68/81 chè viene per uno 34/81. Adunqua dirai che a quelli che ànno uno giuocho tocca di tutta la possta per omo li 34/81, lo ressto che sono 13/81 tocca a quello che non àe giuocho nullo. E farola per vedere se cossì è, e diciamo cosie se uno di que' due vincie, a llui che non àe giuocho li toccherae li 2/27 di tutta la possta e ssono due quelli per chi li può toccare li 2/27,sicché in due modi li può toccare li 2/27, e sse ello vincie ne li può toccare li 9, sicché li tocca lo terso di due volte 2/27 e di una volta li 9/27 che è lo 1/3 di tutti li 13/81 di tutta la possta. Perochè aggiunti insieme 2/27 e 2/27 con 9/27 fanno 13/27 che è lo terso 13/81 e ài che a quelli che ànno un giuocho per omo toccha li 31/81 per omo di tutta la possta ,e a quello che non n'àe giuocho niuno tocca li 13/81. E ài la proposta.

L'autro di que' due modi che mancano di che già dittone l'uno resta a dire quessto: se l'uno di loro avesse uno giuocho e gl'autri due non n'avesse giuocho niuno per omo, quanto ne viene per omo. Questa si congnosscie per la ditta di sopra, cioè se volgliamo vedere quanto ne viene a quello che àe uno giuocho e ttue de dire cosie: se quello che àe uno giuocho vince un autro giuocho arae due giuochi e quegl'autri nonniuno. Adunqua ne verrebbe allora a quello che avesse li due giuochi li 65 /81 come arrieto appare unde dicie di tale ragione a ccarte 95. Sicché quelli che non ànno giuocho niuno arebbeno li 8/81 per omo. E sse quello giuocho lo vinciesse uno di que' due che non ànno giuocho niuno, allora sarebbe la ragione come la ditta di sopra che li due arebbeno un giuocho per omo e l'autro niuno e verrebene per omo a que' che ànno un giuocho per omo come ditto in quella, li 34/81 e a quello che non à giuocho li 13/81. Sicché due sono quelli per li quali ne provenne ventura a quello che àe un giuocho di toccarli li 34/81 di tutta la possta, e sse ello solo vinciesse quello giuocho arebbe li 65/81, adunqua de' avere lo 1/3 di giunto 65/81 con due volte 35/81 che è tutta la somma 133/81, che per lo 1/3 li viene 133/243, sicché a quello che àe uno giuocho toccha li 133/243 di tutta la possta e agl'autri due l'avanso per metà, che è 55/243 per omo. Ora falla per vedere se ssta cosie quanto ne viene per omo a ciasschuno di que' due che non ànno giuocho niuno, e di' cosie: vedi che se quello che àe uno giuocho vincie ne viene a uno di que' due che non ànno niuno giuocho li 8/81 di tutta la posta e sse l'uno di loro due lo vinciesse quello giuocho l'autro arebbe li 13/81 e sse quell'autro lo vinciesse arebbe li 35/81, sicché ciasschuno di que' due che non ànno giuocho nullo stae in ventura o d'avere li 8/81 o li 34/81 o li 13/81. Sicché aggiunti insieme fanno 55/81 che lo terso ne viene a ciasschuno di que' due che non ànno giuocho niuno, che è li 55/243. Sicché ben stae come fatto è la proposta. E nnota bene di tutto. E ora è ditto in quanti modi e per quante maniere si può dire di 3 omini che giuochano a cchi prima àe vinto 3 giuochi e cche ciasschuno di loro mette su la possta. E per questa maniera dei notare che ssi fanno tutte quante diciesseno di simile grado di giuochi e cchi volesse scrivere in qua' modi dire si può non arebbe mai fine sicché tue che studi in ciò però stima bene quessti e arai notisia di ciasschuno altro in che forma ti fusse ditto. Quesste ti danno dichiaragione se ài intendimento come dovressti avere avendo già studiato infine a questo passo, sicché lasserò di ciò pio non dire al prezente che cciò che è ditto basta. E nnota bene di tutto ciò che è ditto di sopra.