Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique

Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics

Vol 9; Décembre/December 2013

www.jehps.net

« Le Pari » mis à l'épreuve par les théories probabilistes, de Pascal à nos jours

YVETTE PERRIN[1]

Résumé

Depuis plus de trois siècles et jusqu'à nos jours, le « Pari » de Pascal a été abondamment soumis à la critique des philosophes, des théologiens et des mathématiciens. Au fur et à mesure du développement du Calcul des Probabilités, ce texte a été revisité par les mathématiciens dans le but d'utiliser les outils probabilistes nouvellement élaborés pour réfuter ou appuyer les arguments pascaliens du « Pari ». Nous envisageons ici quelques étapes importantes de l'histoire des Probabilités et leurs répercussions sur l'interprétation du « Pari », depuis la naissance de la notion d'espérance jusqu'aux probabilités non standard, en passant par les probabilités bayésiennes, et la théorie de la décision.

Abstract

During more than three centuries and until today, Pascal's Wager has been extensively submitted to critics by philosophers, theologians and mathematicians. As Probabilities developed, Pascal's text has been revisited by mathematicians in order to use the newly elaborated probabilistic tools to refute or support the Pascalian arguments of the "Wager". Here, we are considering some important stages of the history of Probabilities and show their impacts on the interpretation of the "Wager", since the birth of the concept of expectation up to the non-standard probabilities, passing through Bayesian probabilities and decision theory.

Les historiens s'accordent pour voir en Blaise Pascal et Pierre de Fermat les fondateurs du Calcul des Probabilités. Même si des auteurs comme Ian Hacking ou Ernest Coumet insistent sur le fait que le terrain avait été longuement préparé pour qu'émerge au milieu du 17ème siècle la notion de probabilité, ils montrent que les travaux de Pascal font rupture dans la façon de considérer tout ce qui concerne le hasard, le sort, la chance et plus généralement l'incertitude.

[1] Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mathématiques, 63171 Aubière cedex, yvette.perrin1@orange.fr

On fait généralement référence à ses travaux sur la résolution du célèbre problème des partis [Pascal, (1654)] pour voir en l'auteur de la Géométrie du hasard l'initiateur du calcul des probabilités. Pour un historien comme Hacking les arguments du « Pari » ont une importance tout aussi grande. Il écrit dans son ouvrage de référence sur l'histoire du concept de probabilité, *The Emergency of Probability* [Hacking, (1975)] :

> La correspondance avec Fermat est importante et conduisit Huygens à travailler sur ce sujet. De son côté, Pascal contribua d'une façon tout à fait différente, mais bien plus générale et décisive, à l'appréciation du nouveau concept de probabilité. Ses historiens ne l'on jamais véritablement prise au sérieux et elle est surtout restée du domaine de l'apologie religieuse. Il s'agit cependant de la première contribution apportée à ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie de la décision et [...] cette contribution fut de grande importance.

E. Coumet arrive à une conclusion analogue dans son article « La théorie du hasard est-elle née par hasard ? » [Coumet,(1970)]

> On a pu dire récemment qu'il avait fallu attendre l'avènement de la théorie moderne des jeux pour que la découverte de Pascal apparaisse sous son véritable jour [...]Ce que nous pouvons affirmer avec d'autant plus de sûreté que les textes mêmes de Pascal peuvent servir de fil conducteur à un exposé d'initiation au Calcul des probabilités, vu comme un chapitre de la théorie mathématique des décisions.

Blaise Pascal exposa les arguments du « Pari » dans un des fragments, regroupés dans le recueil des *Pensées,* intitulé *Infini, rien.* Publié pour la première fois en 1670 par les éditeurs de Port Royal, ce recueil fut republié maintes fois, différemment ordonné selon les éditeurs, enrichis de fragments censurés, de notes, de variantes oubliées ou retrouvées. Aujourd'hui le fragment *Infini-rien* porte le numéro 418 dans la classification de Lafuma [Pascal, 1654] et 233 dans celle de Brunschvicg [Pascal, 1670a].

Dès sa parution et jusqu'à aujourd'hui le « Pari » fut abondamment commenté et critiqué aussi bien par les théologiens, les philosophes, les historiens mais aussi par les mathématiciens, les logiciens, les économistes… Comment se fait-il qu'aujourd'hui, ce « Pari » soit encore l'objet de controverses mathématiques ? Comment se fait-il que chaque fois qu'on lui fait son sort, le « Pari » échappe et l'argument pascalien ressurgisse, reformulé, réinterprété ?

Il n'est pas question ici de donner une réponse exhaustive à ces questions en suivant une démarche historique. Nous avons choisi de sélectionner et d'analyser dans le détail quelques textes mathématiques qui montrent comment chaque étape importante du développement du Calcul des probabilités a réactivé l'intérêt pour le « Pari » et comment les mathématiciens ont utilisé les nouveaux apports de la théorie des probabilités pour critiquer ou renforcer les arguments du « Pari ».

Nous choisirons trois moments dans le développement du Calcul des Probabilités : le premier, autour des années 1660 avec l'émergence des notions de probabilité et d'espérance, le deuxième autour des années 1780 avec la mise au point par Bayes et Laplace du calcul des probabilités conditionnelles et le troisième qui s'étend de 1944, date de la parution du livre de Von Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior,* jusqu'à nos jours.

Nous commencerons par exposer les arguments du « Pari » dans sa forme originale où est amorcé le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire et soulignerons les présupposés sous-jacents au raisonnement de Pascal.

Dans une deuxième partie nous monterons comment Laplace utilise la notion de probabilités conditionnelles pour calculer la véracité des témoignages et réfuter l'argument du « Pari ». L'analyse critique de la démonstration de Laplace nous conduira à faire une courte parenthèse historique pour montrer combien la définition et surtout l'évaluation d'une probabilité, quelle soit objective ou subjective, a priori ou a postériori, ont posé de problèmes et alimenté une très abondante littérature.

Dans une troisième partie nous présenterons les fondements de la théorie moderne de la décision et sélectionnerons quelques travaux récents de mathématiciens qui ont appliqué cette théorie au « Pari », soit pour infirmer les arguments de Pascal, soit pour souligner les limites de la théorie.

Enfin dans une quatrième partie nous montrerons comment les travaux d'Abraham Robinson et d'Edouard Nelson, qui réhabilitent les notions d'infiniment grands et d'infinitésimaux en leur donnant un statut parfaitement rigoureux, ont suscité de nouveaux plaidoyers en faveur du « Pari ».

1 Présentation du « Pari ». L'ébauche de la notion d'espérance

Qu'en est-il du « Pari » pascalien ? [Pascal, 1670a] Rappelons brièvement quel est le contexte et quels en sont les enjeux, de la façon la moins engagée possible du point de vue de l'interprétation. Pascal imagine un dialogue entre lui et un homme du monde habitué à jouer et à calculer ses intérêts, au cours duquel il veut le convaincre de parier que Dieu existe. Pascal commence par affirmer que la raison ne permet en aucun cas de trancher sur l'existence de Dieu. Son interlocuteur acquiesce et ajoute que « le juste est de ne point parier ». Pascal répond : nous devons parier car nous sommes « embarqués » et nous ne pouvons pas ne pas nous préoccuper de notre destinée. Pour gouverner notre vie d'ici bas nous avons deux seuls choix possibles : soit suivre les commandements de Dieu, c'est-à-dire faire comme si Dieu existait, soit mener une vie de plaisirs, égoïste, en nous laissant entraîner par nos passions. La question du pari n'est donc pas : Dieu existe-t-il ou pas, mais faut-il vivre comme si Dieu existait ou comme s'il n'existait pas ? Ce sont ces deux choix que, dans la littérature, on a coutume de désigner respectivement par les formules : parier pour Dieu, parier contre Dieu. Comme l'avait déjà affirmé Leibnitz, ils concernent non pas « ce que l'on doit croire mais seulement ce que l'on doit faire » [Leibnitz, 1678]

Citons une nouvelle fois ce texte célèbre :

> Dieu est ou il n'est pas. Mais de quel côté penchons-nous ? […] Pesons le gain et la perte en prenant choix que Dieu est. Estimons ces deux cas : si vous gagner, vous gagnez tout, si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagez qu'il est sans hésiter.

On sait que Pascal a élaboré les bases du calcul des probabilités à partir de situations de jeux d'argent. Lorsqu'on joue à un tel jeu, trois paramètres sont à considérer : la mise, c'est-à-dire la somme d'argent que l'on engage au départ, la probabilité de gagner et enfin le montant du gain. Un joueur se détermine à jouer en considérant d'un côté le montant du gain et la probabilité de gagner et de l'autre la mise et la probabilité de perdre. Pour quantifier ce qui apparaît comme le compromis entre les valeurs du gain et de la perte et les probabilités correspondantes d'autre part, on introduit la notion d'espérance mathématique.

Rappelons que Pascal n'utilise jamais le terme de probabilité mais celui de hasard ou de chance et qu'il ne dégage pas explicitement la notion d'espérance mathématique sur laquelle repose le critère de décision.

> Mais l'incertitude de gagner est proportionnelle à la certitude de ce que l'on hasarde, selon la proportion des hasards de gain et de perte. [Pascal, 1670b]

Nous formaliserons l'analyse du « Pari » en utilisant ce concept d'espérance que Laplace a minutieusement explicité dans son introduction à l'*Application du calcul des probabilités aux sciences morales* [Laplace, 1820a], suivant ainsi ceux qui ont commenté le fragment *Infini, rien* strictement sur le plan mathématique. Soulignons cependant que l'importance de cette notion dans la démonstration pascalienne a été débattue.

Aux nombreux commentateurs du « Pari » qui, selon Courmet, « affirment, non d'ailleurs sans quelque dérision, que dans l'argument du Pari, Pascal s'est contenté d'appliquer la notion élémentaire d'espérance mathématique », Courmet répond « qu'il l'inventait bien plutôt, au moment même où il en explorait les possibilités » et qu'au 17ème siècle cette notion loin d'être élémentaire avait dû présenter de grandes difficultés épistémologiques [Coumet, 1970]

Plus récemment Laurent Thirouin [Thirouin, 1991], grand connaisseur de l'œuvre de Pascal, souligne que Pascal ne formalisait pas la notion d'espérance mathématique comme nous le faisons aujourd'hui, tout en reconnaissant l'importance de cette notion dans les arguments du « Pari ». Bien plus, son analyse très fine de la progression des arguments pascaliens destinés à amener le libertin à parier, le conduit à remplacer le concept d'espérance par celui de parti tel qu'il est développé dans la solution du problème des partis posé par le chevalier de Méré [Mesnard, 1970] : L'athée ne serait pas celui qui parie contre Dieu mais celui qui, embarqué malgré lui dans le jeu du « Pari », décide d'arrêter ou de refuser de jouer et de prendre son dû. .

Ce n'est pas l'objet de cet article de rentrer dans ces interprétations « existentielles « du « Pari »- elles aussi foisonnantes et toujours d'actualité- et comme nous l'avons revendiqué plus haut nous nous limiterons à son interprétation mathématique.

1.1 Interprétation mathématique

Soit un jeu supposant une mise n et permettant un gain N, soit p la probabilité de gagner et 1- p celle de perdre. L'espérance mathématique est définie par :

$$\bar{E} = p(N\text{-}n) - (1\text{-}p)n \qquad (1,1)$$

N-n est le bénéfice que l'on retire du jeu si l'on gagne. Le joueur est d'autant plus enclin à jouer que l'espérance est grande.

Dans l'argument du « Pari », Pascal n'envisage que la stratégie : parier pour Dieu. Dans ce cas, quelle est l'espérance de gain que l'on peut espérer ? La mise est une vie terrestre, ou plutôt la quantité de bonheur que vous perdez en renonçant aux plaisirs du monde ; le gain est le nombre de vies heureuses que vous gagnez ou gagnerez si vous vivez vertueusement, et p est la probabilité que Dieu existe.

Pour Pascal p est un nombre strictement positif, appréciable, N est un nombre infiniment grand, n est un nombre fini, donc N-n est infini de même que p (N-n). Comme (1-p) n est fini, il en résulte que l'espérance de gain $\bar{E}$ est infinie. Il faut donc parier sans hésiter sur l'existence de Dieu.

1. 2 Les présupposés pascaliens du « Pari »

Mettons en évidence les présupposés de ce pari, présupposés sur lesquels s'appuieront les détracteurs de Pascal pour réfuter le pari :

1- La probabilité que Dieu existe n'est pas infiniment petite.

2- La mise, i.e. la quantité de bonheur que l'on peut avoir sur terre est très faible, car la vie sans Dieu est misérable.

3- Si l'on mène une vie vertueuse et si Dieu existe, la béatitude éternelle nous sera accordée à notre mort, c'est-à-dire que nous bénéficierons « d'une infinité de vie infiniment heureuse ». Le Dieu dont il s'agit ici est le Dieu biblique de l'Alliance et la foi en ce Dieu inclut celle dans un jugement personnel de chaque homme et l'éternité qui en résulte pour celui qui a mis sa confiance en Dieu.

La plupart des critiques et des réfutations ultérieures du « Pari » portent sur ces présupposés et en particulier sur l'affirmation d'une espérance de gain infini si l'on parie pour Dieu et s'il s'avère que Dieu existe.

2 L'analyse du « Pari » par Laplace. Les probabilités conditionnelles pour évaluer la véracité d'un témoignage

C'est sur ce dernier présupposé que Laplace s'appuie pour contester le « Pari ». Voyons en quels termes il formule sa critique. Laplace reprend d'abord l'argument pascalien en insistant sur le fait que la promesse en une félicité éternelle est en réalité exprimée par un témoignage :

> Des témoins attestent qu'ils tiennent de la Divinité même qu'en se conformant à telle chose on jouira, non pas d'une ou deux vies heureuses mais d'une infinité de vies heureuses. Quelque faible que soit la probabilité des témoignages, pourvu qu'elle ne

> soit pas infiniment petite, il est clair que l'avantage de ceux qui se conforment à la chose prescrite est infini puisqu'il est le produit de cette probabilité par un bien infini ; on ne doit donc point balancer à se procurer cet avantage, [Laplace, 1870b].

C'est sur la présence du filtre testimonial que repose toute la critique de Laplace :

> Cet argument est fondé sur le nombre infini des vies heureuses promises au nom de la Divinité par les témoins ; il faudrait donc faire ce qu'ils prescrivent, précisément parce qu'ils exagèrent leurs promesses au delà de toutes limites, conséquences qui répugnent au bon sens. Aussi le calcul nous fait-il voir que cette exagération même affaiblit la probabilité de leur témoignage, au point de la rendre infiniment petite ou nulle. [Laplace, 1820b]

Déployons l'argument. Quel est le gain de félicité que l'on peut espérer en pariant pour Dieu ? Ce sera, selon la formule (1,1) :

$$\bar{E} = p'\,(N\text{-}n) - (1\text{-}p')\,n \qquad (1,2)$$

Mais ici p' est la probabilité de la véracité du témoignage, c'est-à-dire la probabilité que, sachant que le témoin a annoncé « si Dieu existe celui qui mène une vie vertueuse aura une infinité de vies heureuses », ce témoin a dit la vérité. Et Laplace montre que cette probabilité est infiniment petite. Pour ce faire, il considère le modèle suivant :

Une urne contient un très grand nombre N de boules, numérotées de 1 à N. On tire une boule au hasard. Le numéro de la boule extraite représente le nombre de vies de bonheur qu'on obtiendra si on se conforme à la volonté de Dieu, la béatitude éternelle correspondant à un nombre N infini. Un témoin assiste au tirage et atteste que la boule extraite porte le numéro N, i.e. le plus grand des numéros.

Notons

E l'événement : La boule extraite a le numéro N,

E^* l'événement : Le témoin dit que la boule extraite a le numéro N,

$P(E)$ *et* $P(E^*)$ leur probabilité respective, $P(E) = 1/N$,

V l'événement : le témoin dit la vérité,

F l'événement : le témoin ne dit pas la vérité,

$P(V)$ et $P(F)$ leur probabilité,

V/E^* l'événement V conditionné par l'événement E^*, i.e. l'événement : le témoin dit la vérité, sachant qu'il a affirmé : « si Dieu existe celui qui mène une vie vertueuse aura une infinité de vies heureuses », *P (V/E*)* sa probabilité.

On doit donc calculer $p' = P\ (V/E^*)$. Un calcul simple de probabilités conditionnelles donne les formules suivantes :

$$P(V/E^*) = \frac{P(V \cap E^*)}{P(E^*)}$$

$$P(V \cap E^*) = P(E^* \cap V) = P(E^*/V)P(V)$$

$$P(E^*) = P(E^* \cap V) + P(E^* \cap F) = P(E^*/V)P(V) + P\ (E^*/F)\ P(F)$$

L'événement E^*/V est l'événement suivant : le témoin a dit que l'événement E s'est réalisé et l'on sait que ce témoin a dit la vérité, donc $P(E^*/V) = P(E)$. Par conséquent :

$$P(V/E^*) = \frac{P(E^*/V)P(V)}{P(E^*/V)P(V) + P(E^*/F)P(F)} = \frac{P(E)P(V)}{P(E)P(V) + P(E^*/F)P(F)}$$

$$P\ (V/E^*) = \frac{1}{1 + \dfrac{P(E^*/F)P(F)}{P(E)P(V)}}$$

Il reste à calculer $P(E^*/F)$. C'est le point le plus subtil qui montre le rôle primordial du témoin dans l'évaluation de la probabilité p'. Ici l'événement E^*/F est le suivant : le témoin a dit que la boule extraite a le numéro N et l'on sait que le témoin a menti. Cet événement est le produit de deux événements indépendants. Le premier est : la boule extraite n'est pas celle qui a le numéro N ; sa probabilité est $(N-1)/N$. Le second est : le témoin a choisi parmi les N-1 boules qui restent dans l'urne celle qui a le plus grand numéro ; l'estimation de sa probabilité est plus problématique. Si le témoin ne privilégiait aucune boule numérotée parmi les N-1 restant dans l'urne, la probabilité de son choix serait $1/(N-1)$ et dans ce cas on aurait :

$$P\ (E^*/F) = \frac{N-1}{N}.\frac{1}{N-1} = \frac{1}{N} \quad \text{et}$$

$$p' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1/N \times 1/10}{1/N \times 9/10}\right)} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{9}\right)}$$

Mais, dit Laplace, ce témoin est chrétien et il a tout intérêt à croire et à faire croire qu'un bon chrétien aura le plus grand nombre de vies heureuses s'il mène une vie pour Dieu et non pour lui-même. Donc la probabilité qu'il choisisse parmi les N-1 boules non tirées celle qui a le plus grand numéro est bien supérieure à $1/(N-1)$. Laplace propose que cette probabilité soit, par exemple de ½. C'est une probabilité attribuée a priori, dont il reconnaît, lui-même le caractère discutable [Laplace, 1820a]. Dans ces conditions

$$P\ (E^*/F) = \frac{N-1}{N}.\ \frac{1}{2}$$

Et l'on trouve pour p' l'expression suivante :

$$p' = \frac{18}{17+N}$$

donc si N est infiniment grand, p' est infinitésimal.

L'espérance de gain est alors :

$$p'(N - n) - (1 - p')n = \frac{18}{17+N}(N-n) - (1 - \frac{18}{17+N})\, n.$$

Lorsque N tend vers l'infini le terme qui représente le gain : $\frac{18}{17+N}$ $(N- n)$ a une limite finie 18, l'espérance a pour limite 18 - n (qui peut être négative si l'on évalue fortement la mise n, comme le fait, par exemple, Hans Jonas [Jonas, 1990]). Laplace conclut alors : « l'infini disparaît du produit qui exprime l'avantage résultant de la promesse ce qui détruit l'argument de Pascal. »

Nous avons vu quels sont les présupposés sur lesquels Pascal fonde ses arguments et comment Laplace les utilise pour en annuler la conclusion. Pascal fonde l'évaluation de la probabilité p que Dieu existe et du gain qu'il en résulte si on parie pour Dieu sur la confiance qu'il accorde aux textes sacrés de la Bible. Laplace s'en remet à des témoignages humains.

Examinons maintenant quels problèmes soulève la démarche de Laplace et quels échos ils ont trouvés dans la littérature.

Pour calculer la probabilité p' éminemment subjective, Laplace utilise une méthode purement aléatoire : le tirage d'une boule. Cette méthode, initiée par J. Bernouilli [Bernoulli, 1713], qui consiste à assimiler l'événement dont on veut calculer la probabilité à un tirage au sort a été à l'origine de nombreuses discussions au début du 20ème siècle. Schématiquement deux écoles se sont opposées : les fréquentistes et les personnalistes. Pour ces derniers, dont les plus radicaux sont B.de Finetti [Finetti, de, 1937] et J.M. Keynes [Keynes, 1921] toute probabilité résulte d'un jugement ; on ne peut pas parler de probabilités objectives. Pour les fréquentistes au contraire, groupés autour de R. von Mises [Mises, 1928], J. Ville, A. Wald, M. Reichenbach [Reichenbach, 1935], il n'est pas possible de déterminer la probabilité d'un événement isolé ou d'un jugement. Tout événement doit être inséré dans un « collectif » d'événements qui se produisent dans des conditions semblables, et sa probabilité est alors définie comme limites de fréquences. E. Borel a fait une étude critique de cette thèse [Borel, 1939] que Cavaillès a prolongée dans son article « Du collectif au pari » [Cavaillès, 1939], critique portant essentiellement sur l'impossibilité de définir rigoureusement la notion de collectif. La démarche de Laplace se situe, ici, aux confins des deux écoles :

Revenons à son calcul. La formule de la probabilité conditionnelle $P(V/E^*)$ oblige à introduire deux probabilités a priori : la probabilité que le témoin dise « en général » la vérité et celle résultant du choix N du numéro le plus élevé pour la boule prétendument tirée. L'évaluation de ces deux probabilités relève plus de la psychologie que de l'aléatoire. Comme nous l'avons dit, Laplace en a tout à fait conscience, mais il considère que, dans certains cas le recours à ce type de calcul « permet de prouver l'invraisemblance de croyances et raisonnements spécieux que, sous l'influence de l'opinion générale, des esprits, même très éclairés, peuvent accepter. ». Cette position est un peu celle de Borel qui écrit « lorsqu'on cherche à résoudre un problème de probabilités des causes on sait que l'une des principales difficultés est l'évaluation des probabilités a priori qui figurent dans la formule de Bayes. On ne peut rendre cette formule, ni la théorie des probabilités responsables des erreurs qui résulteraient d'une évaluation inexacte des probabilités a priori. ». Nous ne nous étendrons pas plus longtemps sur ces distinctions subtiles entre types de probabilités qui ont surtout étaient le fait des philosophes et non des praticiens des probabilités. L'axiomatisation de la théorie des probabilités proposée par A.N. Kolmogorov en 1933 [Kolmogorov, 1933] a fourni à ces derniers un cadre de calcul totalement abstrait qui ne fait aucune distinction entre « les deux visages de Janus » de la probabilité. Unanimement adoptée aujourd'hui par les probabilistes cette axiomatique facilite le développement de la théorie sans oblitérer le problème de l'application et de l'évaluation des probabilités

3 Le « pari » vu au travers de la théorie de la décision

Faisons un nouveau saut dans le temps et abordons une autre branche du calcul des probabilités, la théorie moderne de la décision qui a fait resurgir une vague d'intérêts pour le « Pari ». On a coutume de la faire remonter à la parution en 1944 du livre de von Neumann et Morgenstern : *Theory of games and economic behaviour* [Neumann von et Morgenstern 1944]. Disons brièvement que cette théorie doit permettre à un individu de prendre la meilleure décision lorsque, confronté à plusieurs situations à risques possibles, il doit choisir d'agir. L'ensemble des stratégies qui s'offrent à lui est muni d'une relation d'ordre de préférence. Si cette relation possède certaines propriétés, que l'on peut qualifier de raisonnables, alors il existe sur l'ensemble des stratégies une fonction d'utilité et la stratégie optimale est celle qui maximise son espérance.

Pour être précis, commençons par énoncer le théorème fondamental de von Neumann et Morgenstern avant de montrer comment dans des travaux récents certains mathématiciens l'ont appliqué au « Pari », soit pour justifier l'argumentation de Pascal, soit pour illustrer les insuffisances de la théorie et son incapacité à traiter le cas du Pari..

Théorème de von Neumann et Morgenstern :

Soit *W* un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels. Soient $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de *W* et *X* leur enveloppe convexe $X = \{\sum_{i=1}^{m} p_i x_i \,:\, p_1,\ldots, p_m \in [0,1]\}$ et soit $\prec$ une relation binaire sur *X*.

Il existe des réels $u_1,\ldots, u_m$ qui assurent l'implication

$$\sum_{i=1}^{i=m} p_i x_i \prec \sum_{i=1}^{i=m} p'_i x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=m} p_i u_i \leq \sum_{i=1}^{i=m} p'_i u_i$$

quels que soient les nombres $p_i, p'_i \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{i=1}^{i=m} p_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{i=m} p'_i = 1$, si et seulement si la relation $\prec$ possède les propriétés suivantes :

(1) Complétude : pour tous $x, y \in X$ on a, soit $x \prec y$, soit $y \prec x$.

(2) Transitivité : pour tous $x, y, z \in X$ tels que $x \prec y$ et $y \prec z$ on a $x \prec z$.

(3) Continuité : pour tous $x, y, z, \in X$ tels que $x \prec y \prec z$, il existe des réels *p, q* $\in$ [0,1] tels que

$$px + (1\text{-}p)\, z \prec y \prec qx + (1-q)z$$

(4) Indépendance : pour tous $x, y, z \in X$ et tout $p \in (0, 1]$ la relation $x \prec y$ est équivalente à la relation $px + (1-p)z \prec py + (1-p)z$.

Cet énoncé mérite interprétation. La relation $\prec$ représente une relation de préférence dans l'ensemble X des stratégies, les axiomes (1), (2), (3) et (4) sont ceux qu'une personne raisonnable est en mesure d'exiger d'une relation de préférence : les axiomes (1) et (2) définissent un préordre total, l'axiome de continuité affirme l'existence de perturbations qui respectent les préférences, l'axiome d'indépendance signifie que la préférence $x \prec y$ n'est pas modifiée si on mixe x et y avec une même stratégie z et la même probabilité *p*. Le théorème permet de conclure que si le joueur ordonne de façon raisonnable ses préférences, sa stratégie gagnante est celle qui maximise l'utilité espérée $\sum_{i=1}^{i=m} p_i u_i$.

Empruntons le langage de la théorie de la décision pour présenter le « Pari » sous sa forme actualisée :

1- Prémisses

Le parieur doit choisir entre deux stratégies pures : parier pour Dieu ou parier contre Dieu, La raison requiert que la probabilité p que Dieu existe ne soit pas infinitésimale.

.La matrice des gains (ou utilités) est la suivante :

	Dieu existe (probabilité p)	Dieu n'existe pas (probabilité ($1-p$))
Je parie pour Dieu	I	b
je parie contre Dieu	f	g

Pour Pascal I est infiniment grand positif, b, f et g sont des nombres finis. Rappelons qu'il n'envisage pas le cas où son interlocuteur parie contre Dieu.

2- D'après le théorème de von Neumann et Morgenstern la meilleure stratégie est celle qui maximise l'utilité espérée.

3- Conclusion : Le calcul recommande de parier pour Dieu.

C'est ce que nous allons démontrer maintenant.

Dans la première stratégie (parier pour Dieu) l'utilité espérée - ou espérance de gain- est

$pI + (1-p)\, b.$

Dans la seconde stratégie (parier contre Dieu), l'utilité espérée est $pf + (1-p)g.$

Comme le produit pI domine tout réel, il s'en suit que

$$pf - (1-p)g \leq pI + (1-p)b$$

D'après le théorème de Von Neumann Morgenstern, la première stratégie est donc préférable à la seconde, ce qui justifie le parti pris de Pascal de ne pas considérer cette dernière et sa conclusion : parier sans hésiter pour Dieu.

Cette démonstration cependant a du mal à convaincre l'interlocuteur récalcitrant de Pascal, si l'on en croit les objections qu'il lui oppose :

> Cela est admirable. Oui il faut gager; mais je gage peut-être trop […]
> Mais encore n'y a-t-il pas moyen de voir le dessous du jeu ? [...]
> Oui mais j'ai les mains liées et la bouche muette ; on me force à parier, et je ne suis pas en liberté ; on ne me relâche pas et je suis fait d'une telle sorte que je ne puis croire. Que voulez-vous donc que je fasse ? [Pascal, 1670a]

A bout d'arguments, Pascal répond :

> Apprenez de ceux qui ont été liés comme vous et qui parient maintenant tout leur bien…Suivez la manière par où ils ont commencé : c'est en faisant tout comme s'ils croyaient, en prenant de l'eau bénite, en faisant dire des messes, etc. Naturellement même cela vous fera croire et vous abêtira. [Pascal, 1670a]

La théorie moderne de la décision aurait peut-être offert à Pascal un autre moyen plus convaincant pour aider son interlocuteur à faire le bon pari: le recours à une stratégie mixte .Une telle stratégie consiste, pour le parieur, à probabiliser ses choix - parier pour Dieu ou parier contre Dieu - c'est-à-dire à les soumettre à un évènement aléatoire de probabilité choisie q - par exemple le tirage d'une boule dans une urne-. Si l'événement se produit, le parieur pariera pour Dieu, s'il ne se produit pas il pariera contre Dieu. Développons le raisonnement.

.Il y a quatre issues possibles pour le parieur

1ère issue : $x_1 = (1,1)$ Dieu existe et il parie effectivement pour Dieu.

2ème issue : $x_2 = (0,1)$ Dieu n'existe pas et il parie pour Dieu.

3ème issue : $x_3 = (1,0)$ Dieu existe et il parie contre Dieu.

4ème issue : $x_4 = (0,0)$ Dieu n'existe pas et il parie contre Dieu.

Si le parieur choisit un ordre de préférence fondé sur la raison, il existe quatre utilités (ou gains) g_1, g_2, g_3, g_4 associées aux quatre issues x_1, x_2, x_3, x_4, tels que pour deux loteries quelconques $\sum_{i=1}^{i=m} p_i x_i$ et $\sum_{i=1}^{i=m} p'_i x_i$ la première loterie est préférée à la seconde si et seulement si l'utilité espérée de la première $\sum_{i=1}^{i=m} p_i g_i$ est supérieure à celle de la seconde $\sum_{i=1}^{i=m} p'_i g_i$. La raison demande alors de maximiser l'utilité espérée.

Considérons alors la loterie (p,q) qui représente la stratégie : parier pour Dieu avec une probabilité q dans la situation où la probabilité que Dieu existe est p. L'ensemble des loteries étant une partie convexe d'un espace vectoriel de dimension 2, on peut développer (p,q) sous la forme suivante :

$$(p,q) = p\,[\,q\,(1,1) + (1-q)\,(1,0)\,] + (1-p)\,[\,q\,(0,1) + (1-q)\,(0,0)\,]$$

.L'utilité espérée pour cette stratégie est :

$$p\,[q\,I + (1-q)\,f\,] + (1-p)\,[\,q\,b + (1-q)\,g\,] = p\,q\,I + p\,(1-q)\,f + (1-p)\,(\,q\,b + (1-q)\,g\,)$$

Comparons cette espérance à celle de la stratégie pure - parier pour Dieu - représentée par le vecteur $(p,1)$ que nous avons déjà calculée et qui est égale à $p\,I + (1-p)\,b$.

$$p\,q\,I + p(1-q)f + (1-p)\,(\,q\,b + (1-q)\,g\,) - [\,p\,I + (1-p)\,b] = -(1-q)\,[p\,I + p\,f + (1-p)(g-b)]$$

Comme pI domine tout nombre fini, le terme entre crochet dans le membre de droite est strictement positif. La différence des deux espérances est donc négative.

D'après le théorème de von Neumann et Morgenstern cette inégalité entre les utilités espérées traduit la relation de préférence entre les stratégies

$$(p, q) \prec (p,1)$$

Ceci signifie que parier pour Dieu avec la probabilité 1 est strictement préférable à parier pour Dieu avec la probabilité q qu'elle que soit cette probabilité strictement inférieure à 1, ce qui confirme l'argumentation de Pascal.

Cette présentation du « Pari » a été proposée par un certain nombre d'auteurs contemporains, comme par exemple Bartha [Bartha, 2007], Hàjec [Hàjec, 2003], McClennen [Mc Clennen, 1994], et a fait l'objet de nombreux commentaires. Mentionnons aussi l'article de Hacking de 1972 [Hacking, 1972], repris dans son livre *The Emergency of Probability* [Hacking, 1975] qui montre avec finesse comment les concepts de situation dominante, espérance d'utilité, dominance de l'espérance d'utilité étaient déjà en germe dans l'argumentation pascalienne.

Les commentaires des trois auteurs cités ci-dessus portent d'abord sur les paramètres de la matrice de décision $I, b, f, g,$ et en particulier sur le fait que le gain $p\, I$ correspondant à la première stratégie domine les gains associés aux trois autres. Pour McClennen, les quatre axiomes imposés à la relation d'ordre sur les préférences et sur lesquels repose la démonstration du théorème de von Neumann et Morgenstern, sont incompatibles avec l'existence d'une fonction d'utilité qui prend des valeurs infiniment grandes. Donc le raisonnement qui consiste à maximiser l'espérance de l'utilité n'est pas fondé rigoureusement. Hàjec prétend que toute formulation mathématique du « Pari » est inconcevable même si l'on cherche à étendre l'ensemble des réels à un ensemble qui contient au moins un infiniment grand I car cet ensemble devrait être convexe et l'élément I qui domine tous les réels devrait vérifier en plus les deux propriétés suivantes : pour tout $p \in [0, 1)$, $p\, I$ est strictement inférieur à I et quel que soit le réel r, $I + r = I$ (si l'on veut respecter la phrase de Pascal : « l'unité jointe à l'infini ne l'augmente de rien […] le fini s'anéantit devant l'infini et devient pur néant ») et il conclut : « il n'y a aucun espoir de caractériser une notion d'utilité qui soit réflexive pour l'addition et strictement non réflexive pour la multiplication par des probabilités finies, positives ».

P. Bartha, répond en substituant à la fonction d'utilité u de la théorie classique de von Neumann et Morgenstern, une fonction d'utilité relative U définie de la façon suivante : Il suppose que l'espace des choix possède un plus petit élément w et définit l'utilité relative U de deux choix x et y par

$$U(x,y) = u(x)\text{-}u(w) / u(y)\text{-}u(w) \quad \text{si} \quad u(y) \neq u(w)$$
$$U(x,y) = 1 \quad \text{si} \quad u(x) = u(y) = u(w)$$
$$U(x,y) = \infty \quad \text{si} \quad u(x) \neq u(w) \text{ et } u(y) = u(w)$$

Puis il généralise cette idée en s'affranchissant de l'hypothèse d'un élément minimal.

4 Le « Pari » revisité par le calcul des probabilités non standard

Mais l'histoire n'est pas close pour autant. Dans un article de 2011: *Hyperreal expected utilities and Pascal's wager* [Herzberg, 2011], F. Herzberg relève le défit de A. Hàjec en faisant appel à l'Analyse Non Standard. Celle-ci fut élaborée en 1966 par A. Robinson à partir de la théorie des modèles [Robinson, 1966], puis présentée en 1977 sous forme axiomatique par E. Nelson [Nelson, 1977]. Dans son livre *Radically elementary theory of probability* [Nelson, 1987], Nelson refonde la théorie des probabilités dans le cadre de cette axiomatique. L'Analyse Non Standard donne un fondement rigoureux aux concepts d'infiniment grand et d'infiniment petit. Dans la présentation robinsonienne le corps totalement ordonné R des nombres réels est plongé dans une extension $*R$, qui possède elle aussi une structure de corps totalement ordonné et qui contient des éléments infiniment grands, i.e. plus grands que tous les réels de R et des infinitésimaux, i.e. des éléments dont la valeur absolue est plus petite que tout réel de R strictement positif. Dans une telle structure on peut enfin manipuler le gain infini I de la matrice des utilités comme un nombre ordinaire. En particulier il possède les propriétés suivantes :

Tout réel $p< 1$ vérifie $pI< I$ quel que soit le nombre I infiniment grand. Si de plus p n'est pas infinitésimal pI est un nombre infiniment grand et quel que soit le nombre réel r de R, $I + r$ est infiniment grand.

F. Herzberg formule le problème du « Pari » pascalien dans un modèle non standard. Il transfert le théorème fondamental de von Neumann et Morgenstern dans ce modèle, démontre que si l'ordre des préférences est un préordre total qui vérifie les axiomes de continuité et d'indépendance , il est légitime de maximiser l'utilité espérée, même si celle-ci est un nombre infiniment grand et par un raisonnement identique à celui présenté ci-dessus, il valide ainsi l'exhortation de Pascal à parier pour Dieu.

F. Herzberg répond ainsi à tous ceux qui prétendaient illégitime l'application de la théorie de la décision au problème du « Pari ». Cette réponse ne satisfait pas à toutes les exigences d'Hàjec puisque aucun infiniment grand de *R n'est réflexif pour l'addition par un réel non nul. Herzberg propose une autre extension des réels, totalement ordonnée et qui contient un infiniment grand qui est réflexif par rapport à l'addition des réels, puis il s'interroge : est-il si sûr que dans la pensée de Pascal le gain d'un élu de Dieu soit le même pour tous ou n'y-a-t-il pas aussi de hiérarchie dans l'au-delà ? C'est une autre question qui déborde, bien sûr, le cadre que nous nous sommes fixé.

Conclusion

Que faut-il conclure ? Laplace a-t-il convaincu plus aisément un croyant du 18ème siècle que Pascal un sceptique du 17ème ? L'argumentation pascalienne a-t-elle été renforcée ou au contraire démolie définitivement par la rigueur formelle de la théorie moderne de la décision, aux yeux d'un agnostique du 21ème siècle ? On en doute. Mais ce qui est intéressant est de constater à quel point le « Pari » a fasciné durant des siècles et combien de scientifiques ont convoqué la raison à travers le filtre de raisonnements probabilistes de plus en plus sophistiqués pour défendre des positions théologiques opposées. Les récents travaux que l'on vient de mentionner auront-ils le dernier mot, ou bien l'argument du « Pari » continuera-t-il a illustrer de futurs développements probabilistes ? Parions pour une réponse positive à cette dernière question.

Références

Bartha, P. (2007): Tacking stock of infinite value : Pascal's Wager and relatives utilities, *Synthese,* 154 (1), p. 1-52.

Bayes, T. (1763): Essai en vue de résoudre un problème sur la doctrine des chances*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, 18,* Société Française d'Histoire et des Sciences et des Techniques, Belin, Paris, 1988.

Bernoulli, J. (1713): *Ars Conjectandi,* Bâle. Trad. française par J. Peyroux, *L'art de conjecturer,* Paris, A. Blanchard, 1998.

Borel, E. (1939): *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications,* t. IV, fsc. III *, Valeur pratique et Philosophie des Probabilités,* Paris.

Cavaillès, J. (1939): Du collectif au pari, *Revue de Métaphysique et de Morale*.

Coumet, E. (1970): La théorie de hasard est-elle née par hasard ? *Annales. Economies, Sociétés, Civilisations,* 25ème année, 3, p. 574-598.

Finetti, B. de (1937): La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives, *Annales de L'Institut Poincaré*, 7, p. 1- 68.

Hacking, I. (1972): The logic of Pascal's wager, in *American philosophical Quaterly*, 9.

Hacking, I. (1975): *The Emergence of probability,* Cambridge University Press.

Hàjec. A. (2003): Waging war on Pascal's wage, *Philosophical Review*, 112(1).

Herzberg, F. (2011): Hyperreal expected Utilities and Pascal's Wager, *Logique et Anal. (N.S.)*, 54, n° 213, p. 69-108.

Jonas, H. (1990): *Le Principe de responsabilité.* Editions du Cerf, Paris.

Keynes, J.M. (1921): *A Treatise of Probability,* Londres.

Kolmogorov, A.N. (1933): *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer.

Laplace, P.S. (1820a): Principes généraux du calcul des probabilités, XI, *Œuvres complètes*, 3ème édition, Gauthier-Villars, Paris.

Laplace, P. S. (1820b): Application du calcul des probabilités aux sciences morales dans *Œuvres* complètes, 3ème édition, Gauthier-Villars, Paris.

Leibniz, W. (1678): Allegemeiner Politischer und Historischer Briefweschel, Darmstadt, , t. II, p, 112, 1927.

McClennen, E.F. (1994): Pascal's wager and finite decision theory, *J .Jordan, editor, Gambling on God : essays on Pascal's wager,* Lanham, MD: Rowman & Littlefield.

Mesnard, J. (1970): *Oeuvres complètes*, t. II, Desclée de Brouwer, Paris.

Mises, R. von (1928): *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Berlin, 1951.

Nelson, E. (1977): Internal Set Theory, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 83, p, 1165-1198.

Nelson, E. (1987): *Radically Elementary Probability Theory,* Princeton University Press.

Neumann, J. von et Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic behaviour,* Princeton University Press.

Pascal, B. (1654): La règle des partis, dans *Œuvres complètes*, Lafuma, Seuil, Paris, 1963.

Pascal, B. (1670a): Infini, rien, section III, 233 dans *Pensées et Opuscules*, Brunschvicg, 10ème édition, Hachette, 1922.

Pascal, B. (1670b): Pensées, section IV, dans *Pensées et Opuscules,* Brunschvicg, 10ème édition, Hachette, 1922.

Reichenbach, H. (1935): *Wahrscheinlichkeitslehre,* Leyde, trad. anglaise sous le titre *The Theory of Probability,* Berlin, 1971.

Robinson, A. (1966): *Non-standard Analysis,* Amsterdam, North-Holland Publishing Company.

Thirouin, L. (1991): *Le hasard et les règles,* Vrin, Paris.