Journal of Lie Theory
Volume **13** (2003) 271–278

Sous-groupes elliptiques de groupes linéaires sur un corps valué

Anne Parreau

Communicated by A. Valette

Abstract. Let n be a positive integer and $\mathbb{F}$ be a valuated field. We prove the following result: Let Γ be a subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ generated by a bounded subset, such that every element of Γ belongs to a bounded subgroup. Then Γ is bounded.

This implies the following. Let G be a connected reductive group over $\mathbb{F}$. Suppose that $\mathbb{F}$ is henselian (e.g. complete) and either that G is almost split over $\mathbb{F}$, or that the valuation of $\mathbb{F}$ is discrete and $\mathbb{F}$ has perfect (e.g. finite) residue class field. Let Δ be its (extended) Bruhat-Tits building. Let x_0 be any point in Δ and $\overline{\Delta}$ be the completion of Δ. Let Γ be a subgroup of G generated by S with $S.x_0$ bounded, such that every element of Γ fixes a point in $\overline{\Delta}$, then Γ has a global fixed point in $\overline{\Delta}$.

Introduction

Soit $\mathbb{F}$ un corps muni d'une valeur absolue non triviale et n un entier non nul. Les sous-groupes bornés du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ jouent le même rôle dans le cas général que les sous-groupes compacts dans le cas où $\mathbb{F}$ est localement compact.

Un élément g de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ est dit *elliptique* s'il appartient à un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Voir par exemple la section 1. pour des caractérisations et propriétés utiles en pratique des éléments elliptiques. En particulier, la trace, ainsi que tous les autres coefficients du polynôme caractéristique, sont uniformément bornés sur les éléments elliptiques.

Par le théorème de Burnside, si Γ est un sous-groupe absolument irréductible de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, et si $\mathrm{Trace}(\Gamma)$ est borné, alors Γ est borné (voir par exemple [1]). C'est encore vrai si Γ est d'adhérence de Zariski réductive (voir [2]).

Un sous-groupe non irréductible formé d'éléments elliptiques n'est pas nécessairement borné en général. Par exemple, dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, H. Bass donne ([1]) un exemple de sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de type fini, dont tout élément est conjugué à un élément du sous-groupe compact maximal $\mathrm{U}(n)$, et qui n'est pas globalement conjugué dans $\mathrm{U}(n)$ (donc qui n'est pas borné).

Dans le cas où le corps $\mathbb{F}$ est non-archimédien, la situation est plus simple. On démontre dans cet article le résultat suivant.

ISSN 0949–5932 / \$2.50

Théorème 1. *Soit $\mathbb{F}$ un corps valué (de valuation à valeurs réelles, pas nécessairement discrète). Soit Γ un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, engendré par une partie bornée (par exemple finie ou compacte), dont chaque élément est elliptique. Alors Γ est borné.*

Ce résultat admet un corollaire pour les actions de groupes algébriques réductifs, définis sur un corps valué, sur leurs immeubles de Bruhat-Tits associés. Des exemples intéressants proviennent notamment des cônes asymptotiques d'espaces symétriques de type non compact, et dans ce cas la valuation du corps $\mathbb{F}$ mis en jeu n'est pas discrète. Voir par exemple [12] pour des applications du théorème 1 dans ce cadre. Soit G un groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{F}$. Une partie B de G est dite *bornée* si toute fonction f régulière sur G est bornée sur B. Le résultat ci-dessus entraîne la propriété analogue suivante pour G.

Corollaire 2. *Soit G un groupe algébrique affine défini sur un corps valué $\mathbb{F}$. Soit Γ un sous-groupe de G, engendré par une partie bornée, dont chaque élément appartient à un sous-groupe borné. Alors Γ est borné.*

Lorsque le groupe G est connexe et réductif, alors, sous les hypothèses de [8], par exemple quand le corps $\mathbb{F}$ est hensélien (par exemple complet), à valuation discrète, de corps résiduel parfait (par exemple fini) (ou bien quand G est quasi-déployé sur $\mathbb{F}$ hensélien, à valuation quelconque), le groupe G agit par isométries sur son immeuble de Bruhat-Tits (élargi) associé Δ. Le résultat ci-dessus se traduit alors géométriquement de la façon suivante. Soit $\overline{\Delta}$ le complété de l'espace métrique Δ.

Corollaire 3. *Soit Γ un sous-groupe de G, engendré par une partie bornée, dont chaque élément fixe un point dans $\overline{\Delta}$. Alors Γ admet un point fixe global dans $\overline{\Delta}$.*

Dans le cas où $n = 2$, ceci est un cas particulier d'un résultat sur les groupes agissant par isométries sur les arbres, dû à J.-P. Serre ([13]) dans le cas discret et à J. Morgan et P. Shalen ([11]) dans le cas général (arbres réels).

Si la valuation est discrète, l'immeuble de G est un complexe polysimplicial, et un sous-groupe borné stabilise alors une facette. Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, un sous-groupe borné fixe en fait un sommet de l'immeuble, et le groupe G agit transitivement sur les sommets. Les sous-groupes bornés maximaux de G sont donc tous conjugués dans G au sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ désigne l'anneau de valuation de $\mathbb{F}$. En particulier, on a le corollaire suivant :

Corollaire 4. *On suppose que la valuation du corps $\mathbb{F}$ est discrète, et on note $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{F}$. Un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, engendré par une partie bornée, dont chaque élement est elliptique, est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$.*

Dans le cas particulier où $\mathbb{F} = \mathbb{Q}_p$, H. Glöckner et G. A. Willis ont montré (cf. [9, Conjecture 1.1 et Theorem 3.5]) que ce résultat entraîne le corollaire suivant. Un groupe topologique totalement discontinu, localement compact, est *uniscalaire* si tout élément normalise un sous-groupe compact ouvert, et *pro-discret* si tout voisinage de l'identité contient un sous-groupe compact ouvert distingué.

Corollaire 5. *Tout groupe de Lie p-adique uniscalaire engendré par un compact est pro-discret.*

Je remercie Frédéric Paulin pour ses suggestions et son soutien. Je remercie également Hyman Bass pour ses explications et Gopal Prasad pour ses suggestions, ainsi que le rapporteur. Ce travail a été en grande partie mené pendant ma thèse au laboratoire de Mathématiques d'Orsay, que je remercie pour son accueil.

1. Groupe linéaire.

Cette section est consacrée aux rappels préliminaires nécessaires à la preuve du théorème 1, qui sera faite en section 3.

Corps valué. Dans tout cet article, $\mathbb{F}$ désigne un corps commutatif muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. On dira que $\mathbb{F}$ est *ultramétrique*, ou bien que c'est *un corps valué*, si sa valeur absolue vérifie l'inégalité triangulaire ultramétrique

$$|x+y| \leq \max(|x|\,,\ |y|) \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ de } F.$$

La valeur absolue provient alors d'une valuation $v = -\log(|\cdot|)$ sur $\mathbb{F}$. On dira que la valuation v est discrète (resp. dense) si son image, qui est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, est discrète (resp. dense). On notera alors $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{F}$, c'est-à-dire le sous-anneau formé par les éléments de $\mathbb{F}$ de valeur absolue inférieure à 1.

Bornés du groupe linéaire. Soit un espace vectoriel V de dimension finie n sur $\mathbb{F}$. Une partie A de V est *bornée* si dans une (toute) base fixée de V, les coordonnées des vecteurs de A sont de valeurs absolues bornées. Une partie B de $GL(V)$ est *bornée* si, dans une (toute) base fixée de V, l'ensemble des coefficients des matrices des éléments de B est un borné de V, et si, de plus, l'inverse du déterminant est borné sur B.

Dans le cas où le corps $\mathbb{F}$ est localement compact, les bornés de V et de $\mathrm{GL}(V)$ sont les parties relativement compactes.

Extension de corps. Soit $\mathbb{E}$ une extension algébrique du corps $\mathbb{F}$. Il existe (au moins) une valeur absolue sur $\mathbb{E}$ prolongeant celle de $\mathbb{F}$ (voir par exemple [4, Chap. VI, §8, n°7, Prop. 9]). Une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ est alors bornée dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ si et seulement si elle est bornée en tant que partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$, pour une valeur absolue quelconque sur $\mathbb{E}$ prolongeant celle de $\mathbb{F}$.

Par conséquent, il suffit de prouver le théorème 1 pour un corps $\mathbb{F}$ algébriquement clos.

Normes et sous-groupes bornés. On suppose désormais qu'on a choisi une base de V et on identifie V à $\mathbb{F}^n$. On notera η_0 la norme canonique sur V, définie par $\eta_0(v) = \max_i |x_i|$ pour tout vecteur $v = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{F}^n$. On notera N la norme canonique sur $\mathrm{End}(V)$, définie par $N(g) = \max_{i,j} |g_{ij}|$, où (g_{ij}) est la matrice de g dans la base canonique. Notons que, dans le cas où $\mathbb{F}$ est ultramétrique, les normes η_0 et N sont ultramétriques et N est la norme d'endomorphismes sur $\mathrm{End}(V)$ associée à η_0. Une partie B de $\mathrm{GL}(V)$ est bornée si et seulement si $N(g)$ et $\det(g)^{-1}$, ou, de manière équivalente, $N(g)$ et $N(g^{-1})$, sont bornés pour $g \in B$. Pour toute norme η sur V, on note N_η la norme d'endomorphismes sur $\mathrm{End}(V)$ associée à η. La norme N_η est sous-multiplicative, et équivalente à N si η est équivalente à η_0. Elle est ultramétrique si η l'est.

Notons G_η le sous-groupe des éléments g de $\mathrm{GL}(V)$ conservant la norme η. Si η est équivalente à η_0, alors G_η est un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}(V)$. Réciproquement, on a la propriété suivante.

Proposition 1.1. *Si H est un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}(V)$, alors il existe une norme η sur V, équivalente à η_0, conservée par H. De plus, dans le cas où $\mathbb{F}$ est ultramétrique, on peut prendre une norme η ultramétrique.*

Démonstration. Soit R un réel tel que $N(h) \leq R$ pour tout h de H. Soit $\eta = \sup_{h\in H} \eta_0 \circ h$. Pour tout $h \in H$, on a $\frac{1}{n}N(h^{-1})^{-1}\eta_0 \leq \eta_0 \circ h \leq nN(h)\eta_0$ sur V. On a donc $\frac{1}{nR}\eta_0 \leq \eta \leq nR\eta_0$ sur V. On voit facilement que η est une norme sur V, ultramétrique si $\mathbb{F}$ l'est, qui convient. ∎

Éléments elliptiques. Un élément g de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ est dit *elliptique* s'il appartient à un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.

Proposition 1.2. *Soit g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *les coefficients du polynôme caractéristique sont bornés sur le sous-groupe cyclique engendré par g.*

(ii) *Les valeurs propres de g sont de valeur absolue 1.*

Les coefficients du polynôme caractéristique, notamment la trace, de g sont alors majorés en valeur absolue par des constantes indépendantes de g (les coefficients du binôme).

Remarque. 1) Si la caractéristique du corps $\mathbb{F}$ est nulle, alors il suffit que la trace soit bornée sur le sous-groupe cyclique engendré par g (car les formules de Newton entraînent alors (i)).

2) Si g est elliptique, alors g vérifie clairement (i), donc les autres assertions ci-dessus (En particulier, $|\det(g)| = 1$). La proposition ci-dessous montre que, lorsque le corps $\mathbb{F}$ est ultramétrique, la réciproque est vraie.

Démonstration. Montrons que (i) entraîne (ii) (le reste est clair). On se place dans une extension finie de $\mathbb{F}$ où le polynôme caractéristique de g est scindé, munie d'une valeur absolue prolongeant celle de $\mathbb{F}$.

Supposons que g possède $k \geq 1$ valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ de valeur absolue maximale $\alpha > 1$. Notons $\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n$ les autres valeurs propres de g, qui sont de valeurs absolues majorées par $\beta < \alpha$. Le k-ième coefficient $\sigma_k(g^n) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \lambda_{i_1}^n \cdots \lambda_{i_k}^n$ du polynôme caractéristique de g^n, est la somme d'un terme de valeur absolue $(\alpha^k)^n$ et d'un nombre fini de termes de valeur absolue inférieure à $(\beta\alpha^{k-1})^n$. Il ne peut donc être borné pour $n \in \mathbb{Z}$. ∎

Dans le cas ultramétrique, on a la situation plus simple suivante.

Proposition 1.3. *Supposons que le corps $\mathbb{F}$ est ultramétrique, d'anneau de valuation $\mathcal{O}$. Soit $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Soit $\mathbb{E}$ une extension algébrique de $\mathbb{F}$ dans laquelle le polynôme caractéristique de g est scindé, munie d'une valuation prolongeant celle de $\mathbb{F}$. Notons $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{E}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *g est elliptique.*

(ii) *Les valeurs propres de g sont de valeur absolue* 1.

(iii) *Les coefficients du polynôme caractéristique de g sont dans $\mathcal{O}$.*

(iv) *g est conjugué dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ *à un élément de* $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})$.

Démonstration. (i) entraîne (ii) par la remarque ci-dessus.

(ii) entraîne (iii) comme précédemment, mais en utilisant l'inégalité triangulaire ultramétrique.

(iii) entraîne (ii), car les valeurs propres sont alors des entiers algébriques sur $\mathcal{O}$, donc dans $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$, car $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ est intégralement clos.

(ii) entraîne (iv) : g est alors conjugué dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ à une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux dans $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$. On peut alors conjuguer g par une matrice diagonale d appropriée dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$ pour obtenir un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})$. En effet, si $g = (g_{ij})_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, prenons $d = \mathrm{diag}(a, a^2, \cdots, a^n)$ avec $a \in \mathbb{F}$ de valeur absolue supérieure à $\max_{i<j} |g_{ij}|$. Alors pour tout i, j on a $(dgd^{-1})_{ij} = a^{i-j} g_{ij}$, qui est de valeur absolue inférieure ou égale à 1 pour $i < j$.

(iv) entraîne (i), car g est alors elliptique dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{E})$, donc également dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. ∎

2. Groupes réductifs et immeubles de Bruhat-Tits.

Dans cette section, on montre comment déduire les corollaires 2 et 3 du théorème 1.

Groupes algébriques affines. Si E est un ensemble algébrique affine défini sur $\mathbb{F}$, une partie A de E est dite *bornée* si toute fonction régulière $f \in \mathbb{F}[E]$ est bornée sur A. Si E est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{F}^n$, ses bornés sont les bornés usuels de $\mathbb{F}^n$. Dans le cas où le corps $\mathbb{F}$ est localement compact, une partie de E est bornée si et seulement si elle est relativement compacte.

Soit G un groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{F}$. Soit $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire de dimension finie de G, définie sur $\mathbb{F}$, induisant un isomorphisme de G sur son image (voir par exemple [3, Prop. 1.10]). En particulier ρ induit une surjection de l'anneau $\mathbb{F}[\mathrm{GL}(V)]$ des fonctions régulières sur $\mathrm{GL}(V)$ sur l'anneau $\mathbb{F}[G]$ des fonction régulières sur G. Une partie A de G est alors bornée dans G si et seulement si son image est une partie bornée de $\mathrm{GL}(V)$ (car $\mathbb{F}[\mathrm{GL}(V)]$ est engendré par les coefficients matriciels et l'inverse du déterminant).

Le corollaire 2 découle donc directement du théorème 1. Voyons maintenant comment déduire le corollaire 3 du corollaire 2.

Groupe des isométries d'un espace métrique. Rappelons (voir par exemple [7, section 3.1], ou [5, Chap. III, §1, n°1]) qu'une *bornologie* sur un ensemble E est une famille de parties de E appelées *parties bornées*, contenant les parties finies, stable par passage à une partie et par réunion finie. Par exemple, l'ensemble des parties bornées d'un groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{F}$ est une bornologie.

Le groupe $\mathrm{Isom}(X)$ des isométries d'un espace métrique X possède une bornologie naturelle. Ses bornés sont les parties A de $\mathrm{Isom}(X)$ telles qu'il existe $x \in X$ tel que $A.x$ est borné (ce qui entraîne que pour toute partie $B \subset X$ bornée, $A.B$ est borné).

Dans le cas où X est un espace métrique CAT(0) complet (par exemple le complété d'un espace métrique CAT(0)), le théorème de Cartan ci-dessous assure qu'un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(X)$ est borné si et seulement s'il admet un point fixe global dans X (voir [6] pour la définition et les propriétés de base des espaces métriques CAT(0)).

Théorème 2.1. *Soit X un espace métrique* CAT(0) *complet et H un groupe agissant par isométries sur X. Si H possède une orbite bornée dans X, alors H admet un point fixe global dans X (voir [7, Lemme 3.2.3]).* ∎

Lorsqu'un groupe algébrique affine G défini sur un corps $\mathbb{F}$ ultramétrique agit par isométries sur un espace métrique CAT(0) complet X, et que la bornologie sur G provenant de son action sur X coïncide avec sa bornologie usuelle, on peut donc déduire du corollaire 2 la propriété suivante.

Un sous-groupe de G, engendré par un borné, dont tout élément possède un point fixe dans X, admet un point fixe global dans X.

C'est notamment le cas quand le corps $\mathbb{F}$ (donc le groupe G) est localement compact, l'espace métrique X est propre, et l'action de G sur X est propre (les bornés de G et de X sont alors les parties relativement compactes).

C'est aussi le cas si G est un groupe algébrique connexe réductif défini sur un corps ultramétrique $\mathbb{F}$, vérifiant les hypothèses de [8, §4 ou §5], agissant par isométries sur son immeuble élargi Δ, qui est un espace métrique CAT(0) (voir [7, Prop. 7.4.20]), pas nécessairement complet. Rappelons que les hypothèses de [8] sont notamment satisfaites dans les deux situations suivantes.

- Le groupe G est quasi-déployé sur le corps $\mathbb{F}$, et l'extension galoisienne minimale de $\mathbb{F}$ déployant G est univalente (cette dernière condition est toujours vraie si le corps $\mathbb{F}$ est hensélien).

- Le corps $\mathbb{F}$ est à valuation discrète, hensélien (par exemple complet), de corps résiduel parfait (par exemple fini).

Le fait suivant assure en effet que les deux notions de bornés coïncident.

Fait 2.2. *La bornologie du groupe algébrique G coïncide avec la bornologie induite par l'action isométrique de G sur son immeuble affine élargi Δ. C'est-à-dire qu'une partie A de G est bornée si et seulement si, pour un (tout) point x de l'immeuble Δ, on a que $A.x$ est borné dans Δ.* ∎

(Voir [8, sections 4.2.19 et 5.1.29])

Au vu de ce qui précède, le corollaire 3 est une conséquence directe du corollaire 2.

3. Démonstration du théorème 1.

Rappelons qu'il s'agit de montrer que, si $\mathbb{F}$ est un corps ultramétrique et n un entier non nul, si Γ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, engendré par une partie S bornée, formé d'éléments elliptiques, alors Γ est borné.

D'après les remarques faites en section 1., on peut supposer, et on le fera désormais, que le corps $\mathbb{F}$ est algébriquement clos. Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur l'entier n.

Pour $n = 1$, c'est immédiat car tout élément elliptique étant de déterminant de valeur absolue 1, il est dans le sous-groupe $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O})$ qui est borné.

Soit $n > 1$. Supposons le résultat vrai pour tout $m < n$. Soit Γ un sous-groupe de $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, vérifiant les hypothèses.

Comme la trace est uniformément bornée sur les éléments elliptiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ (voir Prop. 1.2), on a que $\mathrm{Trace}(\Gamma)$ est borné. Dans le cas où $V = \mathbb{F}^n$ est un Γ-module irréductible, le lemme de Burnside permet de conclure que Γ est borné (voir [1, section 1, Corollary 1.3]).

Dans le cas contraire, $\Gamma \subset \mathrm{End}(V)$ stabilise un sous-espace vectoriel de V de dimension r, avec $0 < r < n$. Quitte à conjuguer, on peut supposer que Γ est inclus dans le sous-groupe P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ suivant (on note $r_1 = r$ et $r_2 = n - r$) :

$$\Gamma \subset P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} ; A \in \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{F}), B \in \mathrm{M}_{r_1,r_2}(\mathbb{F}), D \in \mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{F}) \right\}$$

On considère alors les morphismes π_1 de P dans $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{F})$ et π_2 de P dans $\mathrm{GL}_{r_2}(\mathbb{F})$ tels que $\pi_1 \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) = A$ et $\pi_2 \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) = D$.

Montrons que, pour $i = 1, 2$, le sous-groupe $\Gamma_i = \pi_i(\Gamma)$ de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$ vérifie les hypothèses du théorème. Le morphisme π_i diminue la norme N, donc envoie un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ sur un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$. Le sous-groupe Γ_i est donc formé d'éléments elliptiques de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$. La partie $S_i = \pi_i(S)$ engendre le sous-groupe Γ_i, et est bornée dans $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$. En effet, la norme N est bornée sur S_i car π_i diminue N, et le déterminant est de valeur absolue 1 sur Γ_i (car Γ_i est formé d'éléments elliptiques) donc sur S_i. On a alors par récurrence que Γ_i est un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}_{r_i}(\mathbb{F})$.

Notons V_1 et V_2 les sous-espaces vectoriels de $V = \mathbb{F}^n$ respectivement engendrés par les r_1 premiers et par les r_2 derniers vecteurs de la base canonique. D'après la proposition 1.1, il existe alors une norme ultramétrique η_i sur V_i, équivalente à la norme canonique, conservée par Γ_i. Soit η la norme ultramétrique sur V définie par $\eta(v) = \max\{\eta_1(v_1),\ \eta_2(v_2)\}$ pour tout $v = v_1 + v_2$ dans $V = V_1 \oplus V_2$. La norme η est équivalente à la norme canonique η_0. Soit N_η la norme d'endomorphismes sur $\mathrm{End}(V)$ associée à η, qui est équivalente à N.

Quitte à conjuguer par $d = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & a\mathrm{I} \end{smallmatrix}\right)$ avec $a \in \mathbb{F}$ de valeur absolue suffisamment grande, on peut supposer que tout élément s de S conserve la norme η. En effet, si $|a|$ est supérieure à $\sup_{s \in S} N_\eta(s)$, qui est fini car S est borné dans G, alors pour $s = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) \in S$, il est facile de vérifier que $dsd^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} A & a^{-1}B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ conserve la norme η. Montrons qu'en effet, dsd^{-1} diminue la norme η. Soit $v = v_1 + v_2$ dans $V = V_1 \oplus V_2$, alors

$$\begin{aligned} \eta(dsd^{-1}v) &= \max\{\eta_1(Av_1 + a^{-1}Bv_2),\ \eta_2(Dv_2)\} \\ &\leq \max\left\{\eta_1(Av_1),\ |a|^{-1}\eta_1(Bv_2),\ \eta_2(Dv_2)\right\} \end{aligned}$$

car η_1 est ultramétrique. Or $\eta_1(Av_1) = \eta_1(v_1)$, car Γ_1 conserve η_1, et, de même, $\eta_2(Dv_2) = \eta_2(v_2)$, et on a

$$\eta_1(Bv_2) \leq \eta(sv_2) \leq N_\eta(s)\,\eta(v_2) \leq |a|\,\eta_2(v_2)\ .$$

Donc $\eta(dsd^{-1}v) \leq \max\{\eta_1(v_1),\ \eta_2(v_2)\} = \eta(v)$. On voit de la même manière que $(dsd^{-1})^{-1}$, qui est égal à

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -a^{-1}A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix},$$

diminue la norme η sur V.

Par conséquent (quitte à conjuguer par d), Γ est inclus dans le stabilisateur G_η dans G de la norme η, qui est un sous-groupe borné de G. ■

Références

[1] Bass, H., *Groups of integral representation type*, Pac. J. Math. **86** (1980), 15–51.

[2] Benoist, Y., *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 1–47.

[3] Borel, A., "Linear algebraic groups," W. A. Benjamin, New-York, 1969.

[4] Bourbaki, N., "Algèbre commutative," Hermann, Paris, 1971.

[5] —, "Espaces Vectoriels Topologiques," Masson, Paris, 1981.

[6] Bridson, M. R., et A. Haefliger, "Metric spaces with non-positive curvature," Grundl. math. Wiss. **319**, Springer Verlag (1999).

[7] Bruhat, F., et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5–252.

[8] —, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée.*, Pub. Math. I.H.E.S. **60** (1984), 197–376.

[9] Glöckner, H., et G. A. Willis, *Uniscalar p-adic Lie groups*, Forum Math. **13** (2001), 413–421.

[10] Lang, S., "Algebra," Addison-Wesley, 1965.

[11] Morgan, J., et P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*, Ann. Math. **122** (1985), 398–476.

[12] Parreau, A., *Dégénérescence de sous-groupes discrets de groupes de Lie semi-simples et actions de groupes sur des immeubles affines*, thèse de doctorat, Univ. Orsay, 2000.

[13] Serre, J.-P., "Arbres, amalgames, SL_2," Astérisque **46**, Soc. Math. France (1983).

Anne Parreau
Laboratoire Emile Picard,
UMR 5580 du CNRS,
Université Paul Sabatier, UFR MIG
118, route de Narbonne,
31062 Toulouse Cedex 04, France.
parreau@picard.ups-tlse.fr

Received March 15, 2002
and in final form June 11, 2002