Journal of Lie Theory
Volume **13** (2003) 589–610

Représentations des formes d'une algèbre de Kac–Moody

Cécile Barlet-Mathieu*

Communicated by A. Valette

Résumé. Le sujet de cet article est l'étude des représentations des $\mathbf{K}$-formes d'une $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre de Kac–Moody $\mathfrak{g}$ où $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle et $\overline{\mathbf{K}}$ sa clôture algébrique, c'est-à-dire des représentations des $\mathbf{K}$-algèbres de Lie, qui tensorisées par $\overline{\mathbf{K}}$, deviennent isomorphes à $\mathfrak{g}$. Nous donnons comme résultat principal la classification des $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules simples, sous des conditions de catégories $\mathcal{O}$ "classique" et parabolique.

Introduction

Si on considère une algèbre de Kac–Moody sur la clôture algébrique $\overline{\mathbf{K}}$ d'un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle, il est naturel de s'intéresser à ses $\mathbf{K}$-formes, c'est-à-dire aux algèbres de Lie sur $\mathbf{K}$ qui, tensorisées par $\overline{\mathbf{K}}$, deviennent isomorphes à cette algèbre de Kac–Moody. Dans le cas d'une algèbre de Kac–Moody indécomposable, les $\mathbf{K}$-formes ne sont que de deux sortes : presque déployées ou presque-anisotropes. L'étude de ces formes a été faite en grande partie par G. Rousseau et ses élèves depuis le milieu des années 80. Les premières ont été étudiées et classifiées dans un article publié en 1995 [1]. En ce qui concerne les secondes, la classification dans le cas d'une algèbre de Kac–Moody affine et de $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ a été terminée en 2000 [3].

L'objectif de cet article est l'étude des représentations des formes d'une algèbre de Kac–Moody dans le cadre d'une catégorie $\mathcal{O}$. Cette classe de représentations a été mise en évidence par Bernstein–Gelfand–Gelfand en 1971 pour les algèbres de Lie semi-simples déployées [4] puis étendue par Kac aux algèbres de Kac–Moody. La catégorie $\mathcal{O}$ est effectivement le bon cadre pour une théorie des représentations d'algèbres de Kac–Moody, car elle contient les représentations à plus haut poids qui sont les exemples fondamentaux de représentations. Il s'agit donc dans ce travail de définir et d'étudier des catégories $\mathcal{O}$ adaptées aux formes des algèbres de Kac–Moody, et en particulier à celles presque déployées.

Ce travail est découpé en 4 parties. La première partie comprend essentiellement la définition du cadre et des objets mathématiques avec lesquels nous

*Je tiens à remercier Guy Rousseau pour son aide, son soutien et ses conseils dans l'élaboration de cet article.

ISSN 0949–5932 / \$2.50

allons travailler. Dans la deuxième partie, la théorie des catégories $\mathcal{O}$ "classiques" pour une algèbre de Kac–Moody est généralisée à des catégories $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$, appelées paraboliques, qui vont intervenir de façon naturelle dans la théorie des représentations des formes presque déployées. Nous démontrons (Propositions 2.10, 2.12, 2.14) des caractérisations pratiques de ces catégories les unes par rapport aux autres.

La partie 3 est consacrée aux représentations des formes presque-anisotropes. Nous obtenons, sous des conditions de catégorie $\mathcal{O}$ plus ou moins "classique", un résultat très restrictif. En effet, le résultat principal (Théorème 3.1) impose aux représentations irréductibles d'une forme presque anisotrope d'une catégorie $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}$ ou $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{b}}$ d'être de dimension 1.

Les représentations des formes presque déployées sont étudiées dans la dernière partie. Nous rappelons les principaux résultats permettant de comprendre la structure des formes presque déployées, notamment l'existence d'une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{g}$ définie sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}$-anisotrope, appelée noyau anisotrope. Nous justifions ensuite l'introduction et l'étude des catégories paraboliques $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ désigne la $\mathbf{K}$-sous-algèbre parabolique minimale de $\mathfrak{g}$. En effet, $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ étant une $\mathbf{K}$-forme presque déployée d'une $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$, si un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module $V_{\mathbf{K}}$ est tel que $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ appartient à la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$, alors $V_{\mathbf{K}}$ est dans la catégorie $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p}}$ (Proposition 4.6).

Nous poursuivons avec la mise en place des outils nécessaires à la construction de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules simples de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p}}$; nous obtenons une correspondance bijective entre les objets simples de $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p}}$ décomposés sur $\overline{\mathbf{K}}$ et les représentations irréductibles de dimension finie du noyau anisotrope de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$. Les objets simples de $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p}}$, décomposés sur $\overline{\mathbf{K}}$, sont en fait obtenus par induction parabolique à partir de représentations irréductibles du noyau anisotrope de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ (Théorème 4.11), qui nous sont données par des résultats de J. Tits [11].

Nous terminons cette partie en montrant l'existence (Théorème 4.13), pour un module de $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p}}$, d'une suite de composition locale dont les sous-quotients propres sont des objets simples décomposés sur $\overline{\mathbf{K}}$. Cela prouve que l'on a ainsi obtenu la classification des objets simples de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p}}$:

Théorème 0.1. *Soient $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ une forme presque déployée d'algèbre de Kac–Moody, $\mathfrak{p}_{\mathbf{K}}$ une sous-algèbre parabolique minimale de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ contenue dans $\mathfrak{p}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$. Si $V_{\mathbf{K}}$ est un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module simple tel que $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ soit dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ (i.e. $V_{\mathbf{K}} \in \mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p}}$), alors $V_{\mathbf{K}}$ est obtenu par induction parabolique à partir d'une représentation irréductible du noyau anisotrope de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$.*

1. Algèbres et formes d'algèbres de Kac–Moody

1.1. Soient $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle et $\overline{\mathbf{K}}$ sa cloture algébrique. On considère une algèbre de Kac–Moody $\mathfrak{g}$ sur $\overline{\mathbf{K}}$ que l'on suppose construite comme dans [6] (où $\mathbb{C}$ est remplacé par $\overline{\mathbf{K}}$).

Il existe une matrice de Cartan généralisée $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ telle que $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}$ soit engendrée par l'algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ et des éléments e_i, f_i pour $i \in I$. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$ où α parcourt le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* - \{0\}$. On note $\Pi = \{\alpha_i / i \in I\}$ la base standard de Δ. L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est $\Delta^+ = \Delta \cap Q^+$ où $Q_+ = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{N}\alpha_i$ (resp. $\Delta^- = -\Delta^+$). Les coracines $\alpha_i^\vee$ dans $\mathfrak{h}$ sont telles que $\alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij}$ pour tous $i,\ j$ [6, 1.3].

Soit la réflexion fondamentale r_i de $\mathfrak{h}^*$ définie par $r_i(\lambda) = \lambda - \langle\lambda, \alpha_i^\vee\rangle\alpha_i$ $\forall\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est engendré par les r_i (pour i dans I). Une racine réelle est une racine conjuguée par W à une racine dans Π ; leur ensemble est noté Δ^{re}. Une racine non réelle est une racine imaginaire ; leur ensemble est noté Δ^{im}. On a $\Delta^{im} = \Delta - \Delta^{re}$ [6, 3.7 et 5.1].

1.2. Pour un sous-ensemble J de I, on définit le sous-groupe $W(J)$ de W engendré par les r_i, $i \in J$ et des sous-ensembles de Δ par :

$$\Delta(J) = \Delta \cap ((\textstyle\bigoplus_{i\in J} \mathbb{Z}\alpha_i) \oplus (\bigoplus_{i\notin J} \mathbb{N}\alpha_i))$$

$$\Delta^m(J) = \Delta(J) \cap (-\Delta(J)) \text{ et } \Delta^u(J) = \Delta(J) \setminus \Delta^m(J).$$

On en déduit des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{p}^+(J) = \mathfrak{p}(J) = \mathfrak{h} \oplus (\textstyle\bigoplus_{\alpha\in\Delta(J)} \mathfrak{g}_\alpha)$$

$$\mathfrak{p}^-(J) = \mathfrak{h} \oplus (\textstyle\bigoplus_{\alpha\in-\Delta(J)} \mathfrak{g}_\alpha)$$

$$\mathfrak{m}(J) = \mathfrak{h} \oplus (\textstyle\bigoplus_{\alpha\in\Delta^m(J)} \mathfrak{g}_\alpha)$$

$$\mathfrak{u}^+(J) = \mathfrak{u}(J) = \textstyle\bigoplus_{\alpha\in\Delta^u(J)} \mathfrak{g}_\alpha \text{ et } \mathfrak{u}^-(J) = \bigoplus_{\alpha\in-\Delta^u(J)} \mathfrak{g}_\alpha.$$

$\mathfrak{p}^+(J) = \mathfrak{m}(J) \oplus \mathfrak{u}(J)$ (respectivement $\mathfrak{p}^-(J) = \mathfrak{m}(J) \oplus \mathfrak{u}^-(J)$) est la sous-algèbre parabolique standard positive (respectivement négative) de type J et $\mathfrak{m}(J)$ en est le facteur de Levi standard (le mot standard et les signes font référence au couple $(\mathfrak{h}, \Pi)$ choisi).

Le sous-ensemble J et les paraboliques correspondants sont dits de type fini si la matrice $A_J = (a_{ij})_{i,j\in J}$ est une matrice de Cartan, c'est-à-dire si $W(J)$ est fini ou si $\Delta^m(J)$ est fini. Quand $J = \emptyset$, les paraboliques $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{p}^+(\emptyset)$ et $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{p}^-(\emptyset)$ sont appelés sous-algèbres de Borel standard.

1.3. On définit un groupe G (ne dépendant que de $\mathfrak{g}$) agissant sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est engendré par des sous-groupes U_α, pour α racine réelle, isomorphes au groupe additif $\mathfrak{g}_\alpha$ par un isomorphisme $\exp$ tel que $\mathrm{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathrm{ad}$.

On note H le groupe associé à la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; H est l'ensemble des $g \in G$ qui agissent sur $\mathfrak{g}_\alpha$ (pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de α. En particulier H fixe point par point $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ (il en est même le fixateur) et normalise U_α (pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ on a $h \cdot \exp(X) \cdot h^{-1} = \exp(\alpha(h) \cdot X)$).

Aux sous-algèbres $\mathfrak{n}^\pm = \mathfrak{u}^\pm(\emptyset)$, $\mathfrak{b}^\pm$, $\mathfrak{m}(J)$ et $\mathfrak{p}^\pm(J)$ sont associés respectivement des groupes $U^\pm$ engendrés par les U_α pour $\alpha \in \Delta^\pm_{re}$, $B^\pm = HU^\pm$ (sous-groupe de Borel standard positif ou négatif), $M(J)$ engendré par H et les $U_{\pm\alpha_i}$, $i \in J$, et $P^\pm(J) = M(J)U^\pm$ (sous-groupe parabolique standard positif ou négatif associé à J). Le groupe $B^\pm$ (resp. $P^\pm(J)$) est le stabilisateur dans G de $\mathfrak{b}^\pm$ (resp. $\mathfrak{p}^\pm(J)$) ; le groupe $M(J) = P^+(J) \cap P^-(J)$ stabilise $\mathfrak{m}(J) = \mathfrak{p}^+(J) \cap \mathfrak{p}^-(J)$.

Les sous-algèbres de Cartan déployées de $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire les sous-algèbres ad($\mathfrak{g}$)-diagonalisables maximales) sont conjuguées par G à $\mathfrak{h}$ [8, Théorème 2]; celles contenues dans $\mathfrak{p}^{\pm}(J)$ sont conjuguées par $P^{\pm}(J)$. Comme les facteurs de Levi de $\mathfrak{p}^{\pm}(J)$ sont associés aux sous-algèbres de Cartan déployées de $\mathfrak{p}^{\pm}(J)$, ils sont conjugués par $P^{\pm}(J)$ et donc par $U^{\pm}$.

Pour les résultats suivants, on suppose qu'aucune composante connexe de I n'est de type fini.

Une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre complètement résoluble maximale de $\mathfrak{g}$; c'est le cas de $\mathfrak{b}^{+}$ et $\mathfrak{b}^{-}$ qui ne sont pas conjuguées par G. Les sous-algèbres de Borel conjuguées par G à $\mathfrak{b}^{+}$ (respectivement $\mathfrak{b}^{-}$) sont dites positives (respectivement négatives).

Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable (c.-à-d. I connexe), il n'y a pas d'autre classe de conjugaison de sous-algèbre de Borel [8, Théorème 3].

Une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre contenant une sous-algèbre de Borel. On dit qu'elle est non dégénérée si elle ne contient aucun facteur indécomposable de $\mathfrak{g}$, et de signe positif ou négatif si elle est propre (c.-à-d. différente de $\mathfrak{g}$) et si elle contient une sous-algèbre de Borel positive ou négative.

Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable, toute sous-algèbre parabolique propre est non dégénérée et de signe positif ou négatif. Une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de signe positif ou négatif est conjuguée à une unique sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}^{\pm}(J)$; elle est non dégénérée si et seulement si J est non dégénérée (c.-à-d. J ne contient aucune composante connexe de I).

Une sous-algèbre parabolique de signe ϵ est dite de type fini si elle est conjuguée à une sous-algèbre parabolique standard $\mathfrak{p}^{\epsilon}(J)$ avec J de type fini.

Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de $\mathfrak{g}$ transforme deux sous-algèbres de Borel (resp. paraboliques) conjuguées en deux sous-algèbres de Borel (resp. paraboliques) conjuguées. Il est dit de première espèce s'il transforme une sous-algèbre de Borel positive ou négative en une sous-algèbre de Borel de même signe, et de seconde espèce s'il transforme une sous-algèbre de Borel positive ou négative en une sous-algèbre de Borel de signe opposé.

1.4. Une $\mathbf{K}$-forme de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ telle qu'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$.

Un tel isomorphisme étant fixé, le groupe de Galois Γ de $\overline{\mathbf{K}}$ sur $\mathbf{K}$ agit sur $\mathfrak{g}$ et G (de manière compatible avec la représentation adjointe Ad). On identifie $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ avec l'ensemble $\mathfrak{g}^{\Gamma}$ des points fixes de $\mathfrak{g}$ sous l'action de Γ et on définit $G_{\mathbf{K}} = G^{\Gamma}$. Pour un sous-espace $e_{\mathbf{K}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$, on note $e = e_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$.

Une sous-algèbre de Cartan (resp. parabolique, de Borel) de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ est une sous-algèbre $\mathfrak{h}_{\mathbf{K}}$ (resp. $\mathfrak{p}_{\mathbf{K}}$, $\mathfrak{b}_{\mathbf{K}}$) de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ telle que $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$) soit une sous-algèbre de Cartan (déployée) (resp. parabolique, de Borel) de $\mathfrak{g}$.

Définition 1.1. On dit que $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ est une $\mathbf{K}$-forme presque déployée de $\mathfrak{g}$ si Γ est formé d'automorphismes de première espèce. Cela équivaut au fait que $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre parabolique non dégénérée de signe positif (ou négatif) qui est définie sur $\mathbf{K}$.
On dit que $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ est une $\mathbf{K}$-forme presque anisotrope de $\mathfrak{g}$ si Γ contient un automorphisme de seconde espèce.

Si $\mathfrak{g}$ est décomposable, la notion de presque déployé dépend du choix de la classe de conjugaison des sous-algèbres de Borel opposées $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$. On peut alors dire de manière plus générale que $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ est presque déployée si Γ stabilise une classe de conjugaison de sous-algèbres de Borel ; cette notion se ramène à la précédente par le choix de cette sous-algèbre de Borel comme standard.

Si $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ est presque anisotrope, alors $\mathfrak{g}$ ne contient pas de sous-algèbre parabolique propre définie sur $\mathbf{K}$.

Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable, tout automorphisme est de première ou seconde espèce et toute forme est presque déployée ou presque anisotrope.

Nous terminons cette première partie en donnant un résultat qui va nous permettre de travailler, dans la partie 4. (lemme 4.15), avec un sous-groupe fini de Γ. La démonstration (facile) est laissée au lecteur [2, 1.2].

Proposition 1.2. *Soit $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ une $\mathbf{K}$-forme de $\mathfrak{g}$. Alors il existe une extension finie $\mathbf{E}$ de $\mathbf{K}$ qui déploie $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$, c'est-à-dire telle que $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E}$ est une $\mathbf{E}$-algèbre de Kac–Moody.*

Remarque 1.3. En particulier, si $\mathfrak{h}_{\mathbf{K}}$ est donnée, les orbites de Γ dans l'ensemble $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ des racines sont finies.

2. Catégories $\mathcal{O}$

2.1. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ une algèbre de Kac–Moody sur un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle. On considère un couple $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ formé d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ et d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}^+$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$.

On considère la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ définie comme suit :

(i) Les objets sont les $\mathfrak{g}$-modules diagonalisables sous l'action de $\mathfrak{h}$ avec des espaces de poids de dimension finie et qui vérifient la condition suivante : l'ensemble $P(V)$ des poids de V est tel que : $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$, $P(V) \cap (\lambda + Q^+)$ est fini.

(ii) Les morphismes sont les homomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules.

La catégorie $\mathcal{O}$ “classique” est définie de la même manière en remplaçant la condition sur les poids par : $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{h}^*$ tels que $P(V) \subset \bigcup_{i=1}^n (\lambda_i - Q_+)$. On renvoie à [6] ou à [7] pour cette définiton et les résultats standard suivants.

Les exemples les plus importants de modules de ces catégories $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ sont les modules de plus haut poids, c'est-à-dire les modules engendrés par un vecteur de poids qui est annulé par $\mathfrak{n}_+$.

Un $\mathfrak{g}(A)$-module M_λ de plus haut poids λ est appelé un module de Verma si tout $\mathfrak{g}(A)$-module de plus haut poids λ est un quotient de M_λ. On a les propriétés suivantes :

- Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, il existe un module de Verma M_λ unique à isomorphisme près.
- Vu comme un $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$-module, M_λ est un module libre de rang 1, engendré par un vecteur de plus haut poids.
- M_λ contient un unique sous-module propre maximal M'_λ.

Remarque 2.1. On peut construire M_λ comme un module induit : $M_\lambda = \mathcal{U}(\mathfrak{g}(A)) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h})} \mathbb{C}_\lambda$, avec $\mathbb{C}_\lambda$ le $(\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h})$-module défini par $\mathfrak{n}_+ \cdot 1 = 0$ et $H \cdot 1 = \lambda(H)1 \ \forall H \in \mathfrak{h}$.

On note $L_\lambda = M_\lambda / M'_\lambda$ le module irréductible quotient. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, le module de Verma M_λ et son module irréductible quotient L_λ sont dans la catégorie $\mathcal{O}_\mathfrak{b}$ et dans la catégorie $\mathcal{O}$.

Remarque 2.2. L'action de $\mathfrak{g}_\alpha$ (pour $\alpha \in \Delta^+_{re}$) sur un module de la catégorie $\mathcal{O}_\mathfrak{b}$ est localement nilpotente. On en déduit donc une action de U^+, et même de B^+, sur ce module, compatible avec la représentation adjointe. Comme les sous-algèbres de Cartan déployées de $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^+$ sont conjuguées par B^+, on en déduit que la catégorie $\mathcal{O}_\mathfrak{b}$ ne dépend que de $\mathfrak{b}$ et pas du choix de $\mathfrak{h}$.

La démonstration de [6, 9.6] pour $\mathcal{O}$ donne en fait le résultat suivant : Si $V \in \mathcal{O}_\mathfrak{b}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, alors il existe une filtration de V par une suite de sous-$\mathfrak{g}$-modules $(V_i)_{i=1,\dots,k}$ dans $\mathcal{O}_\mathfrak{b}$, $V = V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k = (0)$, et un sous-ensemble $I \subset \{0, \dots, k\}$ tels que :

(i) si $i \in I$, alors $\exists \lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\lambda_i \geq \lambda$ et $V_i / V_{i+1} \cong L_{\lambda_i}$;

(ii) si $i \notin I$, alors $(V_i/V_{i+1})_\mu = (0) \ \forall \mu \geq \lambda$.

Une telle filtration est appelée suite de composition ou filtration locale de V en λ.

Remarque 2.3. Les L_λ sont donc les objets simples de $\mathcal{O}_\mathfrak{b}$.

Si $V \in \mathcal{O}_\mathfrak{b}$ et $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, deux suites de composition (V_i) et (W_i) de V, locales en λ et μ respectivement, ont des raffinements communs qui sont équivalents à une suite de composition (X_i) de V locale en λ et μ. De plus, pour $\xi \geq \lambda$ (resp. $\xi \geq \mu$) le nombre de facteurs propres de type L_ξ dans (V_i) et (X_i) (resp. (W_i) et (X_i)) est le même (voir par exemple [7, 2.6]).

2.2. Nous définissons, dans ce paragraphe, une catégorie $\mathcal{O}$ plus générale, appelée parabolique, qui apparaît de façon naturelle dans l'étude des représentations des formes presque déployées d'une algèbre de Kac–Moody.

Définition 2.4. Si $\mathfrak{m}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre de Lie réductive, de centre $\mathfrak{z}$ et de sous-algèbre de Levi $\mathfrak{l}$, un $\mathfrak{m}$-module V est dit semi-simple si V est un $\mathfrak{l}$-module semi-simple (c.-à-d. de dimension finie) et si de plus l'action de $\mathfrak{z}$ est semi-simple.

Définition 2.5. Avec les notations de la définition précédente, un $\mathfrak{m}$-module V est dit semi-simple déployé si V est un $\mathfrak{l}$-module semi-simple (c.-à-d. de dimension finie), si l'image de $\mathfrak{l}$ dans $\mathrm{End}(V)$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée et si de plus l'action de $\mathfrak{z}$ est diagonalisable.

Remarque 2.6. Un $\mathfrak{m}$-module V est simple s'il est semi-simple et indécomposable. Si de plus $\mathfrak{l}$ est déployée et l'action de $\mathfrak{z}$ diagonalisable, le $\mathfrak{l}$-module V est absolument simple et l'action de $\mathfrak{z}$ est donc scalaire. Un $\mathfrak{m}$-module semi-simple (déployé) se décompose en somme directe de $\mathfrak{m}$-modules simples (déployés). Si $\mathfrak{l}$ est déployée, un $\mathfrak{m}$-module de dimension finie est semi-simple déployé si et seulement si l'action de $\mathfrak{z}$ est diagonalisable.

On considère dans $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de type fini (de signe positif ou négatif). De la conjugaison de $\mathfrak{p}$ à une sous-algèbre $\mathfrak{p}^{\pm}(J)$ (paragraphe 1.3.), on déduit les décompositions suivantes : $\mathfrak{p} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}$, où $\mathfrak{z}$ est le centre de l'algèbre réductive $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{l}$ une sous-algèbre semi-simple (de Levi) ; l'algèbre $\mathfrak{l}$ est en fait déployée. On considère de plus une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{m}$, et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{p}$ et qui contient $\mathfrak{h}$. On choisit également une sous-algèbre $\mathfrak{t}$ contenue dans $\mathfrak{z}$, et on note : $Q^+_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{p}) = \sum_{i\in I} \mathbb{N}\alpha'_i$ où les α'_i sont les restrictions à $\mathfrak{t}$ des racines simples α_i de $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$.

Remarque 2.7. On a de façon évidente $Q^+_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{p}) = Q^+_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{b})$.

On peut maintenant donner la définition de la catégorie $\mathcal{O}$ parabolique, relative aux sous-algèbres $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{t}$.

Définition 2.8. On note $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ la catégorie définie comme suit :

1. Les objets de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ sont les $\mathfrak{g}$-modules V qui vérifient :
   - (i) V admet une décomposition en espaces de poids par rapport à $\mathfrak{t}$: $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{t}^*} V_\lambda$, avec $V_\lambda = \{v \in V \mid T\cdot v = \lambda(T)v \ \ \forall T \in \mathfrak{t}\}$;
   - (ii) les termes de la graduation, c'est-à-dire les V_λ, sont des $\mathfrak{m}$-modules semi-simples déployés de dimension finie ;
   - (iii) l'ensemble $P_{\mathfrak{t}}(V) = \{\mu \in \mathfrak{t}^* \mid V_\mu \neq (0)\}$ des poids de V par rapport à $\mathfrak{t}$ est tel que : $\forall \lambda \in \mathfrak{t}^*$, $P_{\mathfrak{t}}(V) \cap (\lambda + Q^+_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{p}))$ est fini.
2. Les morphismes de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ sont les homomorphismes de $\mathfrak{g}$-modules.

Remarque 2.9. Comme pour la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$, on a une action de B^+ sur tout module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$. Comme $\mathfrak{z}$ est déterminé par le facteur de Levi $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{p}$ et que ces facteurs sont conjugués par U^+, on en déduit que la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{z}}$ ne dépend que de $\mathfrak{p}$. Il est facile de vérifier que tout sous-module ou tout module quotient d'un module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ est encore dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$.

Dans certains cas particuliers, on simplifie la notation de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$: si $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}$, on note $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{z}}$, et si $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$, on retrouve la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ (dans ce cas $\mathfrak{z} = \mathfrak{h} = \mathfrak{m}$).

En fait, la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ ainsi définie est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}$, associée à la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$:

Proposition 2.10. *On a les deux séries d'inclusions suivantes :*

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b}} \quad \textit{et} \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$$

Démonstration. Montrons l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Si V est un $\mathfrak{g}$-module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$, il est gradué par $\mathfrak{t}^*$; notons $V_{\lambda'}$ les termes de cette graduation. Par hypothèse, $\mathfrak{m}$ agit de façon semi-simple déployée sur chaque $V_{\lambda'}$ donc $\mathfrak{z}$ agit de façon diagonalisable sur chaque $V_{\lambda'}$; V est donc gradué par $\mathfrak{z}^*$ et on a $V_\lambda \subset V_{\lambda'}$ pour $\lambda \in \mathfrak{z}^*$ tel que $\lambda\mid_{\mathfrak{t}} = \lambda'$. Comme les $V_{\lambda'}$ sont de dimension finie, les V_λ aussi, d'où (i) et (ii). Il reste à montrer que V vérifie la condition (iii) de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$; on note $P_{\mathfrak{z}}(V) = \{\mu \in \mathfrak{z}^* \mid V_\mu \neq (0)\}$ et

$$Y = \{\mu' \in \mathfrak{t}^* \mid \mu' = \mu \mid_{\mathfrak{t}}$$

avec $\mu \in P_{\mathfrak{z}}(V) \cap (\lambda + Q_{\mathfrak{z}}^+(\mathfrak{p}))\}$. On a $Y \subset P_{\mathfrak{t}}(V) \cap (\lambda \mid_{\mathfrak{t}} + Q_{\mathfrak{t}}^+(\mathfrak{p}))$, et ce dernier est fini, comme V est dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$. Donc Y est fini. De plus, l'ensemble $\{\mu \in P_{\mathfrak{z}}(V) \mid \mu \mid_{\mathfrak{t}}$ donné$\}$ est fini d'après la condition (ii), donc $P_{\mathfrak{z}}(V) \cap (\lambda + Q_{\mathfrak{z}}^+(\mathfrak{p}))$ est fini pour tout $\lambda \in \mathfrak{z}^*$. En appliquant ce résultat à $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$, on obtient l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$.

Montrons maintenant l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}$. Si V est un $\mathfrak{g}$-module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$, il vérifie clairement la condition (i) de la définition de $\mathcal{O}_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}$. Si $\lambda' \in \mathfrak{t}^*$, $V_{\lambda'}$ est $\mathfrak{m}$-semi-simple déployé et $\mathfrak{h}$ est somme de $\mathfrak{z}$ et d'une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{l}$, donc $\mathfrak{h}$ agit de façon diagonalisable sur $V_{\lambda'}$ d'où (ii). Le point (iii) se prouve comme ci-dessus vu la remarque 2.7. En appliquant l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ à $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}$, on obtient l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$. ∎

Remarque 2.11. Ce résultat est le principal intérêt des catégories $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ par rapport à la catégorie $\mathcal{O}$. En effet la seule définition raisonnable d'une catégorie parabolique "classique" $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\text{class}}$ (c.-à-d. analogue de $\mathcal{O}$) est donnée avec l'axiome $(\text{iii})_{class}$ $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathfrak{z}^*$ tel que $P_{\mathfrak{z}}(V) \subset \bigcup_{i=1}^n (\lambda_i - Q_{\mathfrak{z}}^+(\mathfrak{p}))$. Mais alors on n'a pas nécessairement l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\text{class}} \subset \mathcal{O}$, comme le montre le contre-exemple suivant : si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(J)$ avec $J \neq \emptyset$ une partie de type fini de I, on peut choisir des racines $\alpha = \alpha_j$ avec $j \in J$ et $\alpha' = \alpha_i$ avec $i \in I \setminus J$. Alors la somme directe infinie des modules de Verma $M(n(\alpha - \alpha'))$ est dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\text{class}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ mais pas dans $\mathcal{O}$.

Le résultat suivant nous montre que les catégories $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ sont très proches, modulo une condition sur la sous-algèbre $\mathfrak{t}$:

Proposition 2.12. *On suppose que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+(J)$ et que $\mathfrak{t}$ contient un élément T vérifiant $\alpha_i(T) \in \mathbb{Q} \cap]0; +\infty[$ $\forall i \notin J$. Alors tout module V de type fini de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$.*

Lemme 2.13. *Si J est une partie de type fini de I et si pour $i \notin J$ on fixe des entiers N_i, alors le nombre de racines $\alpha \in \Delta \cap (\sum_{i \notin J} N_i \alpha_i + \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i)$ est fini.*

Démonstration. On peut supposer que les N_i sont des entiers positifs ou nuls. Si les N_i sont tous nuls, le lemme est vérifié car l'ensemble $\Delta^m(J)$ est fini. Donc on suppose que les N_i sont strictement positifs, ce qui implique que les coefficients des α_i pour $i \in J$ sont positifs. L'ensemble X des racines $\alpha = \sum_{i \notin J} N_i \alpha_i + \sum_{i \in J} n_i \alpha_i$ est stable par le groupe de Weyl fini $W(J)$. Quitte à remplacer $\alpha \in X$ par $\alpha' \in W(J)\alpha$ de hauteur minimale, on peut supposer que $\alpha \in Y = \{\alpha \in X \mid \alpha(\alpha_j^\vee) \leq 0$ $\forall j \in J\}$, et il suffit de montrer que Y est fini. Pour $\alpha \in Y$ et $j \in J$, on a

$$\alpha(\alpha_j^\vee) = \sum\nolimits_{i \notin J} N_i \alpha_i(\alpha_j^\vee) + \sum\nolimits_{i \in J} n_i \alpha_i(\alpha_j^\vee) \leq 0$$

On note $P_j = -\sum_{i \notin J} N_i \alpha_i(\alpha_j^\vee) \in \mathbb{N}$ (fixé) et $\underline{n}$ (resp. $\underline{P}$) la matrice colonne des n_j (resp. P_j) pour $j \in J$. La matrice $A_J = (\alpha_i(\alpha_j^\vee))_{i,j \in J}$ est une matrice de Cartan généralisée de type fini ; en particulier elle est inversible. L'inégalité ci-dessus s'écrit alors $\sum_{i\in J} n_i\alpha_i(\alpha_j^\vee) \leq P_j$ ou encore $A_J\underline{n} \leq \underline{P}$. On a donc $A_J(\underline{n} - A_J^{-1}\underline{P}) \leq 0$ qui implique $\underline{n} - A_J^{-1}\underline{P} \leq 0$ par le théorème de Vinberg–Kac ([6, 4.3]). Pour finir, on a les inégalités $0 \leq \underline{n} \leq A_J^{-1}\underline{P}$, qui prouvent que Y est fini. ■

Démonstration. Comme V est supposé de type fini et vérifie les conditions (ii) et (iii) de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, le sous-$\mathfrak{p}$-module engendré par les générateurs de V est de dimension finie. Donc, par le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, V admet un nombre fini de générateurs comme $\mathfrak{u}^-(J)$-module ; pour la suite on suppose qu'il n'y en a qu'un, de poids λ pour $\mathfrak{z}$: $V = \mathcal{U}(\mathfrak{u}^-(J))v$ et $P_{\mathfrak{z}}(V) = \lambda - Q_{\mathfrak{z}}^+(\mathfrak{p})$. Le $\mathfrak{g}$-module V admet une décomposition en espaces de poids par rapport à $\mathfrak{t}$ par restriction de celle par rapport à $\mathfrak{z}$, d'où la condition (i). Pour prouver les conditions (ii) et (iii) de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$, il suffit de montrer que, pour $\mu \in \mathfrak{z}^*$, la somme directe des V_ν, pour $\nu \in \mathfrak{z}^*$ et $\nu(T) \geq \mu(T)$, est de dimension finie. Mais celle-ci est engendrée comme espace vectoriel par les $(\prod_{k=1}^p \phi_k)v$ avec $\phi_k \in \mathfrak{g}_{\beta_k}$, $\beta_k \in -\Delta^{\mathfrak{u}}(J)$ et $\lambda(T) + \sum_{k=1}^p \beta_k(T) \geq \mu(T)$. Or, si $\beta \in -\Delta^{\mathfrak{u}}(J)$, $\beta = -\sum_{i\in I} n_i(\beta)\alpha_i$ avec $n_i(\beta) \in \mathbb{N}$ et $\beta(T) \leq -(\sum_{i\notin J} n_i(\beta))\epsilon \leq -\epsilon < 0$, où $\epsilon = \inf\{\alpha_i(T) \mid i \notin J\}$. Comme les espaces $\mathfrak{g}_\beta$ sont de dimensions finies, il suffit donc de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de racines $\beta \in -\Delta^{\mathfrak{u}}(J)$ telles que $\sum_{i\notin J} n_i(\beta) \leq (\lambda(T)-\mu(T))/\epsilon$. Cela résulte du lemme 2.13 ci-dessus. ■

La proposition suivante nous fournit une égalité entre les deux catégories $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{b},\mathfrak{t}}$ dans le cas où $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}$, modulo une condition "de finitude" (on rappelle que le parabolique $\mathfrak{p}$ est supposé de type fini) :

Proposition 2.14. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module. On a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

(i) $V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ et vérifie : (F) $\forall v \in V$, $\mathcal{U}(\mathfrak{l}) \cdot v$ est de dimension finie.

(ii) $V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Remarque 2.15. Comme les actions de $\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{z}$ commutent, la condition (F) est équivalente à la condition (F$'$) suivante pour les modules de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$:

(F$'$) $\qquad \forall v \in V, \mathcal{U}(\mathfrak{m}) \cdot v$ est de dimension finie.

De plus, si $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(J)$, alors la condition (F) (ou (F$'$)) est équivalente à la condition (F$_J$) $\forall i \in J$, $\rho(e_i)$ et $\rho(f_i)$ sont localement nilpotents, où ρ est la représentation associée à V.

Démonstration. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est claire, car (F) est vérifiée dès que V appartient à $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{l}$ stabilise les espaces de poids de $\mathfrak{z}$). Montrons l'implication réciproque (i) $\Rightarrow$ (ii) : il suffit de montrer qu'un module V de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ satisfaisant (F), vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de la définition de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{z}}$. Pour cela, nous avons besoin du résultat suivant. Rappelons qu'il existe $J \subset I$, de type fini, tel que : $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(J) = \mathrm{Ker}_{\mathfrak{h}}(\alpha_i \mid i \in J)$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(J)$ est engendrée par les e_i, f_i pour $i \in J$. De plus, pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $\bar{\lambda} = \lambda \mid_{\mathfrak{z}}$.

Lemme 2.16. *Soit $V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ vérifiant (F). Alors, pour tout $\bar{\mu} \in \mathfrak{z}^*$, l'ensemble $X = \{\lambda \in P_{\mathfrak{h}}(V) \mid \bar{\lambda} \in \bar{\mu} + Q^+_{\mathfrak{z}}$ et $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}\ \forall i \in J\}$ est fini.*

Démonstration. Soit $\lambda \in X$; on complète $(\alpha_i)_{i\in I}$ en une base $(\alpha_i)_{i\in I'}$ de $\mathfrak{h}^*$, avec $I' \supset I \supset J$, et on écrit $\lambda = \sum_{i\in I'} x_i\alpha_i$. Alors pour $i \notin I$, $x_i = x_i^0$ est bien déterminé par $\bar{\mu}$ et pour $i \in I \setminus J$, x_i est également bien déterminé par $\bar{\mu}$ modulo $\mathbb{N}$. Donc pour $i \notin J$, $x_i = x_i^0 + m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$. Pour $j \in J$, $\lambda(\alpha_j^\vee) = \sum_{i\notin J} x_i\alpha_i(\alpha_j^\vee) + \sum_{i\in J} x_i\alpha_i(\alpha_j^\vee) \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{i\notin J} x_i\alpha_i(\alpha_j^\vee) = \underbrace{\sum_{i\notin I} x_i^0\alpha_i(\alpha_j^\vee)}_{=-a_j} + \underbrace{\sum_{i\in I\setminus J} m_i \underbrace{\alpha_i(\alpha_j^\vee)}_{\leq 0}}_{\in -\mathbb{N}}$$

donc on a $\sum_{i\in J} x_i\alpha_i(\alpha_j^\vee) = a_j + n_j$, avec $n_j \in \mathbb{N}$. On note $\underline{x}$, $\underline{a}$, $\underline{n}$ les matrices colonnes des $(x_i)_{i\in J}$, $(a_i)_{i\in J}$, et $(n_i)_{i\in J}$; on a alors $A_J\underline{x} = \underline{a} + \underline{n}$, et donc $\underline{x} = A_J^{-1}\underline{a} + A_J^{-1}\underline{n}$. La matrice A_J est une matrice de type fini, en particulier $\det(A_J) \neq 0$ et appartient à $\mathbb{Z}$. Donc on a $A_J^{-1}\underline{n} \in (\det A_J)^{-1}\mathbb{Z}^J$ et d'après [6, 4.3] $A_J^{-1}(\mathbb{R}^J_+) \subset \mathbb{R}^J_+$. On a alors $A_J^{-1}\underline{n} \in |\det A_J|^{-1}\mathbb{N}^J$, et on obtient bien un nombre fini de possibilitées modulo $\mathbb{N}^J$ pour les x_i, $i \in J$. Ainsi $X \subset P_{\mathfrak{h}}(V) \cap (\bigcup_{\text{fini}} \lambda_j + Q^+)$, qui est fini d'après la condition sur les poids de $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$. ∎

Montrons que V vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$: on obtient une graduation de V par $\mathfrak{z}^*$ par restriction : $V = \bigoplus_{\bar{\mu}\in\mathfrak{z}^*} V_{\bar{\mu}}$, où $V_{\bar{\mu}}$ est la somme des V_μ avec $\bar{\mu} = \mu_{|\mathfrak{z}}$ et $\mu \in \mathfrak{h}^*$ poids de V, d'où (i). Pour montrer à la fois (ii) et (iii), il suffit de montrer que, pour $\mu \in \mathfrak{h}^*$, la somme des V_ν avec $\bar{\nu} \in \bar{\mu} + Q^+_{\mathfrak{z}}$ est de dimension finie. Soit $v \in V_\nu$, avec $\nu \in \mathfrak{h}^*$; par hypothèse (F), $\mathcal{U}(\mathfrak{l}) \cdot v$ est de dimension finie, donc quitte à le décomposer, v appartient au $\mathfrak{l}$-module engendré par un $v' \in V_\lambda \subset V_{\bar{\nu}}$, avec λ un poids de V par rapport à $\mathfrak{h}$ tel que $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}$ $\forall i \in J$. D'après le lemme 2.16, l'ensemble de ces λ est fini, donc v' varie dans un espace de dimension finie et, d'après (F), la somme des V_ν avec $\bar{\nu} \in \bar{\mu} + Q^+_{\mathfrak{z}}$ est de dimension finie. ∎

Corollaire 2.17. *Soit V un module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Le sous-groupe $W(J)$ de W engendré par les réflexions r_i pour $i \in J$ agit sur l'ensemble $P_{\mathfrak{z}}(V)$ des poids de V. Plus précisément, pour tout $w \in W(J)$, il existe $\tilde{w}$ agissant sur V, qui permute les poids de V comme w et stabilise les sous-$\mathfrak{g}$-modules de V.*

Démonstration. Si $r_i \in W(J)$ et si on note ρ la représentation associée à V, on peut poser $r_i^\rho = \exp\rho(e_i)\exp(-\rho(f_i))\exp\rho(e_i)$, d'après (F$_J$). Alors r_i^ρ agit sur V et $r_i^\rho(V_\lambda) = V_{r_i(\lambda)}$ [6, 3.8]. ∎

3. Formes presque-anisotropes et catégories $\mathcal{O}$

Nous étudions dans cette partie des représentations des formes presque-anisotropes qui appartiennent à une certaine catégorie $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}$ ou encore $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{b}}$.

Soient $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle et $\overline{\mathbf{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbf{K}$. On considère $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ une $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre de Kac–Moody, où A est une matrice de Cartan généralisée sans facteur de type fini. On note $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ une $\mathbf{K}$-forme presque anisotrope de $\mathfrak{g}$.

On considère les catégories $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ relatives à un couple $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenue dans une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}^+$ de $\mathfrak{g}$ et définie sur $\mathbf{K}$. Alors il existe un élément σ du groupe de Galois Γ de $\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}$ tel que : $\sigma(\mathfrak{b}^+) = w\mathfrak{b}^-$ pour $w \in W$. On a alors aussi $\sigma Q_+ = wQ_-$.

On note $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}^{\mathbf{K}}$) la catégorie dont les objets sont les $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules $V_{\mathbf{K}}$ vérifiant $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} \in \mathcal{O}$ (resp. $\in \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$) et dont les morphismes sont les homomorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules.

Théorème 3.1. *Les $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}$ sont des $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules de dimension finie ; plus précisément, ce sont des modules sur l'abélianisé $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}/[\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{g}_{\mathbf{K}}]$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$. Réciproquement, tout $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module de dimension finie est dans $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}$.*

Remarque 3.2. Tout sous-$\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module de type fini d'un module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}^{\mathbf{K}}$ est dans $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}$, donc de dimension finie. Ainsi un module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}^{\mathbf{K}}$ est réunion croissante de modules de dimension finie.

Démonstration. Soit $V_{\mathbf{K}} \in \mathcal{O}^{\mathbf{K}}$; on note $V = V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$. Comme $V \in \mathcal{O}$ et que l'ensemble des poids de V, noté $P(V)$, est stable par σ, on a :

$$P(V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\lambda_i - Q_+) \cap \bigcup_{i=1}^{n} (\sigma\lambda_i - wQ_-)$$

On note ρ la représentation associée à V. Une racine réelle α est dite bonne si $\rho(e_\alpha)$ et $\rho(f_\alpha)$ sont localement nilpotents. Si α est une racine réelle positive telle que $\sigma\alpha < 0$ (c.-à-d. $w\alpha > 0$), alors α et $-\alpha$ sont bonnes. On note Δ_b^{re} l'ensemble des bonnes racines. Soit W' le sous-groupe du groupe de Weyl W engendré par les réflexions fondamentales par rapport aux bonnes racines ; W' agit sur V et stabilise $P(V)$. De plus W' stabilise Δ_b^{re}. Et si on note $\Delta_m = \Delta^{re} \setminus \Delta_b^{re}$, W' stabilise aussi Δ_m. On a $\Delta_m^+ \subset \Delta^+ \cap w\Delta^-$ donc Δ_m est fini. On peut en fait montrer le lemme suivant :

Lemme 3.3. *L'ensemble Δ_m est vide.*

Démonstration. Supposons que $\Delta_m \neq \emptyset$. On peut alors supposer que $\Delta_m \cap \Pi \neq \emptyset$, sinon $\Pi \subset \Delta_b^{re}$, $W' = W$ et $\Delta^{re} = \Delta_b^{re}$.

Si Π est infini. Soit S la réunion (finie) des supports des racines dans Δ_m et soit α une racine de Δ_m telle que : $\mathrm{supp}(\alpha) \subset S$ et il existe $\alpha_i \in \Delta_b^{re} \cap \Pi$ telle que α et α_i soient liés. Alors $r_i(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$ appartient à Δ_m et on a $\mathrm{supp}(r_i(\alpha)) = \mathrm{supp}(\alpha) \cup \{i\} \not\subset S$, ce qui est absurde.

Si Π est fini. On suppose de plus que A est indécomposable. Soit $\alpha_i \in \Delta_m \cap \Pi$; on note N la hauteur maximale des racines dans Δ_m^+ : on a $-N \leq \mathrm{ht}(\Delta_m) \leq N$. Soit $\Delta^{N+2} = \{\alpha \in \Delta^{re} \mid \mathrm{ht}(\alpha) \geq N+2\}$; $\Delta^{N+2} \neq \emptyset$ car Δ^{re} est infini et $\Delta^{N+2} \subset \Delta_b^{re}$. On a $\langle \alpha_i, (\Delta^{N+2})^\vee \rangle \not\equiv 0$; sinon $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle = 0$ sauf au plus pour un nombre fini de racines réelles. Ce qui implique que α_i appartient au cône de Tits fermé [6, 3.12]. Donc il existe $w_0 \in W$ tel que $w_0\alpha_i \in \overline{C}$, où $\overline{C}$ désigne l'adhérence de la chambre fondamentale C, autrement dit $Aw_0\alpha_i \geq 0$.

- Si A est de type affine, cela implique que $w_0\alpha_i$ est une racine imaginaire, ce qui

est absurde car $w_0\alpha_i$ est par hypothèse une racine réelle.
. Si A est de type indéfini, alors : si $w_0\alpha_i > 0$, c'est absurde par le théorème de Vinberg–Kac ([6, 4.3]), car on a aussi $Aw_0\alpha_i \geq 0$; si $w_0\alpha_i < 0$, alors $w_0 r_i \alpha_i > 0$ et $Aw_0 r_i \alpha_i \leq 0$, ce qui est également absurde car $\langle w_0 r_i \alpha_i, w_0 r_i \alpha_i^\vee \rangle = 2$.

Donc il existe $\alpha \in \Delta^{N+2}$ tel que $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle \neq 0$. On considère $r_\alpha(\alpha_i) = \alpha_i - \langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle \alpha$; c'est une racine telle que $\mathrm{ht}(r_\alpha(\alpha_i)) > N+2$ si $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle < 0$ et $\mathrm{ht}(r_\alpha(\alpha_i)) < -(N+1)$ si $\langle \alpha_i, \alpha^\vee \rangle > 0$. Dans les deux cas, $r_\alpha(\alpha_i)$ n'appartient donc pas à Δ_m, ce qui contredit le fait que W' stabilise Δ_m. ■

Grâce au lemme, on obtient que $W = W'$ et donc que W stabilise $P(V)$. On a alors

$$P(V) \subset \bigcup_{i=1}^n (\lambda_i - Q_+) \cap \bigcup_{i=1}^n (w^{-1}\sigma\lambda_i - Q_-)$$

et donc

$$P(V) \subset \bigcup_{i=1}^n (\lambda_i - Q_+) \cap \bigcup_{i=1}^n (\mu_i + Q_+)$$

avec $\mu_i = w^{-1}\sigma\lambda_i$. Les poids du $\mathfrak{g}$-module V, qui sont de multiplicités finies, sont en nombre fini ; V est donc un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. On conclut grâce à la remarque suivante, puisque la réciproque est évidente. ■

Les modules de dimension finie d'une algèbre de Kac–Moody $\mathfrak{g}$ (sans facteur de type fini) sont des modules sur l'abélianisé $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$, ils sont donc de dimension 1 quand ils sont simples et si $\mathbf{K} = \overline{\mathbf{K}}$. En effet si (V, ρ) est une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\rho$ est de dimension finie. Donc l'idéal $\operatorname{Ker}\rho$ contient $\mathfrak{g}'$ [6, 1.7] et (V, ρ) est une représentation de l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$.

Les conditions d'une catégorie $\mathcal{O}$ ou même $\mathcal{O}_\mathfrak{b}$ s'avèrent trop fortes pour obtenir des résultats intéressants pour les modules sur une forme presque anisotrope.

Par contre nous pouvons obtenir [2] des représentations irréductibles de dimension finie aussi grande que l'on veut pour une forme réelle presque-anisotopre de l'algèbre dérivée d'une algèbre de Kac–Moody affine (non tordue).

Nous obtenons aussi [2], sous les conditions d'une catégorie $\mathcal{O}$ non standard (voir par exemple [5]), des représentations de dimension infinie (et monogènes) pour une forme réelle presque anisotrope d'une algèbre de Kac–Moody affine (non tordue).

4. Formes presque déployées et catégorie $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\mathbf{K}$

Dans toute cette partie, on considère $\mathfrak{g}_\mathbf{K}$ une $\mathbf{K}$-forme presque déployée de $\mathfrak{g}$. Le résultat essentiel de cette partie se montre en deux temps, tout d'abord (paragraphe 4.4.) on construit des modules simples de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\mathbf{K}$, et ensuite (paragraphe 4.5.) on montre que ces modules sont les seuls objets simples de cette catégorie. Mais commençons par la mise en place des différents outils.

4.1. On considère $\mathfrak{t}_\mathbf{K}$ une sous-algèbre torique $\mathbf{K}$-déployée maximale de $\mathfrak{g}_\mathbf{K}$, c'est-à-dire une sous-algèbre pour laquelle la représentation adjointe dans $\mathfrak{g}_\mathbf{K}$ est diagonalisable, et $\mathfrak{p}_\mathbf{K}^\epsilon$ une $\mathbf{K}$-sous-algèbre parabolique minimale de signe ϵ de $\mathfrak{g}_\mathbf{K}$ (il en existe).

Pour tout signe ϵ, le groupe $G_{\mathbf{K}}$ agit transitivement sur les paires $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{\epsilon}_{\mathbf{K}})$, avec $\mathfrak{t}_{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{p}^{\epsilon}_{\mathbf{K}}$ [10, 3.5]. On dit alors qu'une paire $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{\epsilon}_{\mathbf{K}})$, avec $\mathfrak{t}_{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{p}^{\epsilon}_{\mathbf{K}}$, est une standardisation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ de signe ϵ.

Proposition 4.1. *Pour toute standardisation $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{+}_{\mathbf{K}})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbf{K}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ et une sous-algèbre de Borel positive $\mathfrak{b}^+$ de $\mathfrak{g}$ telles que : $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}^+$. Il existe une partie de type fini I_0 de I telle que $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{p}^+(I_0)$ pour la standardisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ de $\mathfrak{g}$. La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p}^-(I_0)$ est définie sur $\mathbf{K}$ et minimale ; elle ne dépend que de $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{p}^+$.*

On peut touver la preuve de ce résultat dans [1, 2.2] et [9, 4.3 et 4.7b].

On dit alors que la standardisation $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{-}_{\mathbf{K}})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ est opposée à $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{+}_{\mathbf{K}})$ et que la standardisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ de $\mathfrak{g}$ est compatible avec $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{+}_{\mathbf{K}})$.

Pour toute la suite, on fixe une standardisation $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{+}_{\mathbf{K}})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ et une standardisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$ de $\mathfrak{g}$ compatible.

Proposition 4.2. *L'algèbre dérivée $\mathfrak{l}_{\mathbf{K}}$ du centralisateur $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$ de $\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}$ est la sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}^{+}_{\mathbf{K}}$ relative à $\mathfrak{h}_{\mathbf{K}}$. C'est une sous-algèbre de Lie semi-simple définie sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}$-anisotrope. Le système de racines Δ_0 de $\mathfrak{l}$ par rapport à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ admet pour base $\Pi_0 = \{\alpha_i \mid i \in I_0\}$. Le groupe de Weyl W_0 de $\mathfrak{l}$ par rapport à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l}$ est engendré par les r_i pour $i \in I_0$; il agit simplement transitivement sur les sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}^+_1$ de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^+_1 \subset \mathfrak{p}^+$.*

On peut touver la preuve de ce résultat dans [1, 2.3], [9, 3.5e et 4.7b] et [10, 3.11].

La sous-algèbre $\mathfrak{l}_{\mathbf{K}}$ s'appelle le noyau anisotrope de $(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{K}})$.

Remarque 4.3. La forme $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$ est dite quasi-déployée s'il existe une sous-algèbre de Borel définie sur $\mathbf{K}$, c'est-à-dire si $\mathfrak{p}^{+}_{\mathbf{K}}$ est une sous-algèbre de Borel, ce qui équivaut à $I_0 = \emptyset$, ou encore à $\mathfrak{l}_{\mathbf{K}} = \{0\}$.

Dans la suite, on note $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(I_0)$, et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{h}(I_0)$ (engendré par les $\alpha_i^\vee$ pour $i \in I_0$). On a $\Delta_0 = \Delta \cap (\bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}\alpha_i)$. On peut écrire la décomposition de $\mathfrak{p}^+(I_0)$: $\mathfrak{p}^+(I_0) = \mathfrak{p}(I_0) = \mathfrak{u}(I_0) \oplus \mathfrak{m}(I_0)$, avec $\mathfrak{u}(I_0) = \mathfrak{u}^+(I_0) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_0} \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{m}(I_0) = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta_0} \mathfrak{g}_\alpha)$ le centralisateur de $\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}$. On a donc aussi la décomposition : $\mathfrak{m}(I_0) = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}(I_0)$, où $\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{m}(I_0)$.

Par définition, Γ est formé d'automorphismes (semi-linéaires) de première espèce ; donc, pour γ dans Γ, $\gamma\mathfrak{b}^+$ est une sous-algèbre de Borel positive vérifiant $\mathfrak{h} \subset \gamma\mathfrak{b}^+ \subset \mathfrak{p}(I_0)$. Il existe alors, d'après la proposition 4.2, un unique élément w_γ de W_0 tel que $w_\gamma\gamma\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{b}^+$. On note $\gamma^* = w_\gamma\gamma$, cet élément stabilise les sous-algèbres $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}$. On définit donc une action, notée $*$, de Γ sur Δ, Π et I, qui stabilise I_0 [1, 2.4].

Remarque 4.4. L'action $*$ de Γ sur I est indépendante du choix du signe $+$ et des standardisations compatibles $(\mathfrak{t}_{\mathbf{K}}, \mathfrak{p}^{+}_{\mathbf{K}})$ et $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}^+)$.

4.2. Nous allons maintenant nous intéresser aux représentations des $\mathbf{K}$-formes presque déployées, et plus particulièrement à celles qui, une fois tensorisées par $\overline{\mathbf{K}}$, appartiennent à la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$.

Définition 4.5. Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}^{\mathbf{K}}$) la catégorie dont les objets sont les $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules $V_{\mathbf{K}}$ vérifiant $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$) et dont les morphismes sont les homomorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules.

D'après la proposition 2.10, pour tout $V_{\mathbf{K}}$ dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$, $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ est dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ (quelle que soit la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{p}$). La proposition suivante nous fournit la réciproque de ce résultat.

Proposition 4.6. *Soit $V_{\mathbf{K}}$ un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module. Si $V = V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$, alors $V_{\mathbf{K}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$.*

Démonstration. Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.7. *Si $i \in I_0$, il existe γ dans Γ tel que $\gamma\alpha_i < 0$.*

Démonstration. Notons Φ l'orbite de α_i sous Γ. On suppose que $\gamma\alpha_i > 0$ $\forall\gamma \in \Gamma$ et $\forall i \in I_0$. Alors Φ est un sous-ensemble fini (remarque 1.3) non vide de Δ_0^+, stable par Γ. On note $\rho^\vee = \sum_{\alpha\in\Phi} \alpha^\vee$. Alors $\rho^\vee$ est non nul, fixe par Γ et $\alpha(\rho^\vee) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$. Donc $\rho^\vee$ est un élément $\mathbf{K}$-diagonalisable de $\mathfrak{h}(I_0)$. On a alors une sous-algèbre torique déployée $\mathbf{K}\rho^\vee$ de $\mathfrak{l}_{\mathbf{K}}$, qui est une sous-algèbre semi-simple et $\mathbf{K}$-anisotrope de $\mathfrak{g}$, ce qui est absurde. ■

Soit $V = V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ et $V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$; il suffit de montrer que le $\mathfrak{g}$-module V vérifie la condition suivante : (F_{I_0}) $\rho(e_i)$ et $\rho(f_i)$ sont localement nilpotents $\forall i \in I_0$, où ρ est la représentation associée à V. En effet, on a vu à la partie 2. (proposition 2.14) que : $V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$ et V vérifie $(\mathrm{F}_{I_0}) \Rightarrow V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Comme $V = V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ appartient à la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$, on a d'une part $P(V) \cap (\lambda + Q^+)$ fini $\forall\lambda \in \mathfrak{h}^*$, et d'autre part $P(V)$ stable par Γ. Si $\mu \in P(V)$ et $\alpha \in \Delta$ est tel qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma\alpha < 0$, alors $\{n \in \mathbb{N} \mid \mu - n\gamma\alpha \in P(V)\}$ est un ensemble fini. Donc $\{n \in \mathbb{N} \mid \mu - n\alpha \in P(V)\}$ est fini, pour tout $\mu \in P(V)$ et tout $\alpha \in \Delta$ tel qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma\alpha < 0$. Grâce au lemme 4.7, on obtient que $\{n \in \mathbb{N} \mid \mu - n\alpha_i \in P(V)\}$ est fini, pour tout $\mu \in P(V)$ et pour tout $i \in I_0$. Comme $\{n \in \mathbb{N} \mid \mu + n\alpha_i \in P(V)\}$ est fini, ceci implique que $\rho(e_i)$ et $\rho(f_i)$ sont localement nilpotents $\forall i \in I_0$. ■

Les représentations des $\mathbf{K}$-formes presque déployées que l'on va étudier sont associées aux $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$.

4.3. Le but de ce paragraphe est de mettre en évidence une correspondance bijective, décrite dans la proposition 4.9, entre les $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules simples de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ et les modules simples de la sous-algèbre réductive $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$.

On se donne une sous-algèbre $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{z}$ dont le centralisateur est $\mathfrak{m}(I_0)$.

On note L_{λ,I_0} le sous-$\mathfrak{l}(I_0)$-module engendré par v_λ, vecteur de plus haut poids de L_λ ; c'est un quotient du $\mathfrak{l}(I_0)$-module de Verma de plus haut poids $\lambda\mid_{\mathfrak{h}(I_0)}$ (on va voir que c'est en fait le quotient irréductible).

On utilise la notation $(L_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)} = \{v \in L_\lambda \mid \mathfrak{u}(I_0) \cdot v = 0\}$.

Proposition 4.8. *Le module L_λ appartient à la catégorie $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ si et seulement si $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in I_0$. Alors L_λ est l'unique quotient irréductible de $M_{\lambda,I_0} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} L_{\lambda,I_0}$ et $L_{\lambda,I_0} = (L_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)}$ est un $\mathfrak{l}(I_0)$-module simple de plus haut poids $\lambda|_{\mathfrak{h}(I_0)}$. De plus, L_{λ,I_0} est dans L_λ (ou M_{λ,I_0}) l'espace propre de poids $\bar{\lambda} = \lambda\,|_\mathfrak{z}$ pour l'action de $\mathfrak{z}$.*

Démonstration. L'hypothèse $L_\lambda \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ implique que L_{λ,I_0} est de dimension finie et donc que $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in I_0$. Réciproquement supposons maintenant cette hypothèse. L'espace propre de L_λ de poids $\bar{\lambda}$ est $X = \bigoplus_{\bar{\mu}=\bar{\lambda}}(L_\lambda)_\mu$, avec $\bar{\mu} = \mu\,|_\mathfrak{z}$. Si $(L_\lambda)_\mu \neq \{0\}$, on a $\mu = \lambda - \sum_{i\in I} n_i\alpha_i$ et $\bar{\mu} = \bar{\lambda} \Leftrightarrow n_i = 0$ pour $i \notin I_0$. Alors montrons que $L_{\lambda,I_0} = X$: on a déjà $L_{\lambda,I_0} \subset X$. Soit $v \in (L_\lambda)_\mu$, avec $\mu = \lambda - \sum_{i\in I_0} n_i\alpha_i$; alors v peut s'écrire $\prod_{k=1}^p f_{jk}v_\lambda$, avec $\sum_{k=1}^p \alpha_{jk} = \sum_{i\in I_0} n_i\alpha_i$. D'où $j_k \in I_0$ pour tout k, et donc $v \in L_{\lambda,I_0}$.

Le sous-$\mathfrak{l}(I_0)$-module L_{λ,I_0} (et tout sous-$\mathfrak{l}(I_0)$-module) est en fait un $\mathfrak{p}(I_0)$-module, la sous-algèbre $\mathfrak{z}$ agissant de façon scalaire (par $\bar{\lambda}$), et la sous-algèbre $\mathfrak{u}(I_0)$ agissant trivialement sur L_{λ,I_0}. En particulier un sous-$\mathfrak{l}(I_0)$-module propre P de L_{λ,I_0} engendre un sous-$\mathfrak{g}$-module de L_λ dont la partie de poids $\bar{\lambda}$ par rapport à $\mathfrak{z}$ est P, ce sous-$\mathfrak{g}$-module est donc propre. Or L_λ est un $\mathfrak{g}$-module simple donc L_{λ,I_0} est un $\mathfrak{l}(I_0)$-module simple et à plus haut poids. La condition sur les $\lambda(\alpha_i^\vee)$ implique que L_{λ,I_0} est de dimension finie.

On obtient le $\mathfrak{g}$-module L_λ comme un quotient irréductible de $M_{\lambda,I_0} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} L_{\lambda,I_0}$. Mais L_{λ,I_0} est dans ce module M_{λ,I_0} l'espace propre de poids $\bar{\lambda}$ pour $\mathfrak{z}$, donc la somme de tous les sous-$\mathfrak{g}$-modules d'intersection nulle avec L_{λ,I_0} est encore un sous-$\mathfrak{g}$-module d'intersection nulle avec L_{λ,I_0}, et on la note N. De plus, comme L_{λ,I_0} est $\mathfrak{l}(I_0)$-irréductible, tout sous-$\mathfrak{g}$-module d'intersection non nulle avec L_{λ,I_0} n'est pas propre car il contient L_{λ,I_0} et en particulier v_λ, donc M_{λ,I_0}. L'unicité du quotient irréductible vient du fait que l'on quotiente par N.

Montrons que L_λ est dans la catégorie $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Il suffit de montrer les conditions (ii) et (iii) ; pour cela il suffit de montrer que pour $\bar{\mu} \in \mathfrak{z}^*$, la somme directe des $(L_\lambda)_{\bar{\nu}}$ pour $\bar{\nu} \in \bar{\mu} + Q_\mathfrak{z}^+(\mathfrak{p})$ est de dimension finie. Mais celle-ci est engendrée comme espace vectoriel par les $(\prod_{k=1}^p \phi_k)v$ avec $v \in L_{\lambda,I_0}$, $\phi_k \in \mathfrak{g}_{\beta_k}$, $\beta_k \in -\Delta^\mathfrak{u}(I_0)$ et $\bar{\lambda} + \sum_{k=1}^p \bar{\beta}_k \in \bar{\mu} + Q_\mathfrak{z}^+(\mathfrak{p})$. Choisissons $T \in \mathfrak{z}$ tel que $\alpha_i(T) = 1$ $\forall i \in I - I_0$. La relation précédente implique $\lambda(T) + \sum_{k=1}^p \beta_k(T) \geq \mu(T)$. Comme les espaces $\mathfrak{g}_\beta$ sont de dimension finie, il suffit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de racines $\bar{\beta} \in -\Delta^u(I_0)$ telle que $\beta(T) \geq \mu(T) - \lambda(T)$. Mais cela résulte du lemme 2.13.

Le dernier point consiste à montrer que l'on a $L_{\lambda,I_0} = (L_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)}$. On sait déjà que $L_{\lambda,I_0} \subset (L_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)}$; montrons l'inclusion inverse. On a $(M_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)} \supset L_{\lambda,I_0}$, et comme $(M_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)}$ est stable par $\mathfrak{z}$, on a :

$$(M_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)} = L_{\lambda,I_0} \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{\mu\in\mathfrak{z}^* \\ \mu<\bar{\lambda}}}((M_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)})_\mu\Big)$$

On note $V_\mu = ((M_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)})_\mu$ pour $\mu \in \mathfrak{z}^*$, $\mu < \bar{\lambda}$. V_μ est annulé par $\mathfrak{u}(I_0)$, stable par $\mathfrak{m}(I_0)$, donc V_μ est stable par $\mathfrak{p}(I_0)$. On a alors : $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot V_\mu = \mathcal{U}(\mathfrak{u}^-(I_0)) \cdot \mathcal{U}(\mathfrak{p}(I_0)) \cdot V_\mu = \mathcal{U}(\mathfrak{u}^-(I_0)) \cdot V_\mu$, ce qui montre que $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot V_\mu$ n'admet que des poids strictement inférieurs à $\bar{\lambda}$. Donc $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot V_\mu$ est d'intersection nulle avec L_{λ,I_0} pour tout $\mu \in \mathfrak{z}^*$. Alors $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cdot V_\mu \subset N$ et $(L_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)} \subset L_{\lambda,I_0}$. ∎

On va maintenant utiliser le résultat précédent dans le cadre des $\mathfrak{g}_\mathbf{K}$-modules. Cela nous fournit la correspondance bijective cherchée qui sera utilisée pour la construction des modules simples de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$.

Proposition 4.9. *(i) Soit $V_{\mathbf{K}}$ un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module (resp. simple) de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ tel que $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L_\lambda^{n(\lambda)}$, avec les $n(\lambda)$ entiers et presque tous nuls. Alors $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$ est un $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module semi-simple (resp. simple) de dimension finie et $V_{\mathbf{K}}$ est induit à partir de $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$: c'est le quotient (resp. irréductible) de $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} (V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$ par le plus grand sous-module propre d'intersection nulle avec $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$. En particulier, si $V_{\mathbf{K}}$ est un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module tel que $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = L_\lambda \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, alors $V_{\mathbf{K}}$ est le quotient irréductible de $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} L_{\lambda,I_0,\mathbf{K}}$, avec $L_{\lambda,I_0,\mathbf{K}} = (L_{\lambda,I_0})^\Gamma$ pour une action de Γ sur L_{λ,I_0}.*

(ii) Soit $W_{\mathbf{K}}$ un $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module simple de dimension finie. Alors il existe un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module simple $V_{\mathbf{K}}$ de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ tel que $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L_\lambda^{n(\lambda)}$ et $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)} = W_{\mathbf{K}}$. De plus, ce $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module est unique à isomorphisme près.

Remarque 4.10. Un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ qui, sur $\overline{\mathbf{K}}$, est de la forme $\bigoplus L_\lambda^{n(\lambda)}$ sera dit décomposé sur $\overline{\mathbf{K}}$; on verra (Corollaire 4.14) que tout $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module simple est en fait décomposé.

Démonstration. On va prouver dans un premier temps le résultat (i) dans le cas particulier d'un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module $V_{\mathbf{K}}$ tel que $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = L_\lambda \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Comme $L_\lambda \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, on peut écrire, d'après la proposition 4.8, L_λ comme le quotient irréductible de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} L_{\lambda,I_0}$. Il faut s'assurer que l'on a la compatibilité avec l'action de Γ. Mais comme $L_{\lambda,I_0} = (L_\lambda)^{\mathfrak{u}(I_0)}$, L_{λ,I_0} est stable par Γ. Il reste à montrer que $(L_\lambda)^\Gamma$ est bien le quotient irréductible de $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} L_{\lambda,I_0,\mathbf{K}}$: si $(e_i)_{i \in J}$ est une base sur $\overline{\mathbf{K}}$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{u}^-(I_0))$ formée d'éléments fixes par Γ, on a : $M_{\lambda,I_0} = \bigoplus_{i \in J} e_i \otimes L_{\lambda,I_0}$, et donc :

$$(M_{\lambda,I_0})^\Gamma = \bigoplus_{i \in J} e_i \otimes L_{\lambda,I_0,\mathbf{K}} = \mathfrak{m}!athcalU_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} L_{\lambda,I_0,\mathbf{K}}.$$

Ainsi M_{λ,I_0} est engendré par $(M_{\lambda,I_0})^\Gamma$ sur $\overline{\mathbf{K}}$.
Comme N est un sous-$\overline{\mathbf{K}}$-espace vectoriel de M_{λ,I_0} stable par Γ, N^Γ engendre N sur $\overline{\mathbf{K}}$. On a donc $(L_\lambda)^\Gamma = (M_{\lambda,I_0})^\Gamma / N^\Gamma$, d'où le résultat.

Supposons maintenant le $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module $V_{\mathbf{K}}$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ tel que $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L_\lambda^{n(\lambda)}$, avec les $n(\lambda)$ entiers et presque tous nuls. On a, d'après la proposition 4.8, $(V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}(I_0)} = \bigoplus_\lambda L_{\lambda,I_0}^{n(\lambda)}$, ce qui montre que $(V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}(I_0)}$ est un $\mathfrak{m}(I_0)$-module semi-simple de dimension finie (l'action de $\mathfrak{z}$ sur L_{λ,I_0} est scalaire), stable par Γ, et donc engendré par $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$. Donc $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$ est un $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module semi-simple de dimension finie. On a aussi (encore d'après la proposition 4.8)

$$V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \mathrm{quot}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} (V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}(I_0)})$$

et donc

$$V_{\mathbf{K}} = \mathrm{quot}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} (V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)})$$

où l'on quotiente par le plus grand sous-module propre d'intersection nulle avec $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$.

Supposons de plus! que $V_{\mathbf{K}}$ est simple et $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)} = V_1 \oplus V_2$, avec V_1 et V_2 deux sous-$\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-modules, on a alors :

$$V_{\mathbf{K}} = \mathrm{quot}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} V_1) \oplus \mathrm{quot}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} V_2)$$

ce qui contredit l'irréductibilité de $V_{\mathbf{K}}$. Donc $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$ est un $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module simple de dimension finie.
(ii) Soit $W_{\mathbf{K}}$ un $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module simple de dimension finie (l'action de $\mathfrak{z}_{\mathbf{K}}$ sur $W_{\mathbf{K}}$ est semi-simple) et on pose $W = W_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$. Alors W est un $\mathfrak{m}(I_0)$-module de dimension finie, avec une action diagonalisable de $\mathfrak{z}$. On a donc : $W = \bigoplus_{\nu \in \mathfrak{z}^*} W_\nu$ Or, pour tout $\nu \in \mathfrak{z}^*$, W_ν est stable sous l'action de $\mathfrak{l}(I_0)$, donc on obtient :

$$W_\nu = \bigoplus_{\substack{\mu \in \mathfrak{h}(I_0)^* \\ \mu(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N} \forall i \in I_0}} L_{\mu, I_0, \nu}^{n(\mu,\nu)},$$

où $L_{\mu,I_0,\nu}$ est le $\mathfrak{l}(I_0)$-module simple, de plus haut poids $\mu \in \mathfrak{h}(I_0)^*$, de dimension finie et contenu dans W_ν. On peut écrire :

$$W = \bigoplus_{\substack{\nu \in \mathfrak{z}^* \\ \mu \in \mathfrak{h}(I_0)^* \\ \mu(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N} \forall i \in I_0}} L_{\mu,I_0,\nu}^{n(\mu,\nu)} = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N} \forall i \in I_0}} L_{l!ambda, I_0}^{n(\lambda)}$$

la correspondance $\lambda \leftrightarrow (\mu, \nu)$ vient de ce que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(I_0) \oplus \mathfrak{z}$. On note $V_{\mathbf{K}}$ le quotient simple de $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} W_{\mathbf{K}}$, où l'on quotiente par la somme $N_{\mathbf{K}}$ de tous les sous-modules d'intersection nulle avec $W_{\mathbf{K}}$: cette somme est d'intersection nulle avec $W_{\mathbf{K}}$, donc $V_{\mathbf{K}} \neq \{0\}$; et comme $W_{\mathbf{K}}$ est simple, tout sous-module propre est d'intersection nulle avec $W_{\mathbf{K}}$, donc $V_{\mathbf{K}}$ est simple. Si on note N l'analogue de $N_{\mathbf{K}}$ dans V vis à vis de W, il est clair que N est stable par Γ donc $N_{\mathbf{K}} = N^\Gamma$ et $N = N_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$, on a alors :

$$\begin{aligned} V &= V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \mathrm{quot}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} W) \\ &= \mathrm{quot}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N} \forall i \in I_0}} L_{\lambda, I_0}^{n(\lambda)}) \\ &= \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N} \forall i \in I_0}} \mathrm{quot}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} L_{\lambda, I_0}^{n(\lambda)}) \\ &= \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathfrak{h}^* \\ \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N} \forall i \in I_0}} L_\lambda^{n(\lambda)} \end{aligned}$$

Le $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module $V_{\mathbf{K}}$, construit ci-dessus, vérifie bien les conditions souhaitées : $V_{\mathbf{K}}$ est simple et $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} L_\lambda^{n(\lambda)} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ car, d'après la proposition 4.8, $\lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}\ \forall i \in I_0 \Rightarrow L_\lambda \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. L'unicité vient du fait que, dans le point (i), le $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module $V_{\mathbf{K}}$ est bien tel que l'on vient de le construire. ∎

4.4. Dans ce paragraphe, nous allons construire des $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules irréductibles de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$. Nous utilisons dans la suite les résultats de J. Tits sur les représentations d'une algèbre de Lie réductive sur un corps quelconque [11].

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ poids dominant de $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}} = \mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$, on note ${}^{\mathbf{K}}V_\lambda$ le $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$-module associé à la représentation ${}^{\mathbf{K}}\rho_\lambda$ définie par J. Tits [11, 7.1]. Cette représentation est irréductible sur $\mathbf{K}$ et toute $\mathbf{K}$-représentation irréductible de $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}$ est $\mathbf{K}$-isomorphe à une représentation de la forme ${}^{\mathbf{K}}\rho_\lambda$ [11, 7.2].

On va construire un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module que l'on notera $L_{\Gamma^*\lambda,\mathbf{K}}$, à partir de ce $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module. En effet, grâce à la proposition 4.9 (ii), on construit, à partir du $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module ${}^{\mathbf{K}}V_\lambda$, un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module simple $V_{\mathbf{K}}$ qui vérifie : $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} L_\lambda^{n(\lambda)} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ et $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)} =^{\mathbf{K}} V_\lambda$. Ainsi $V_{\mathbf{K}}$ est le quotient irréductible de $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}) \otimes_{\mathcal{U}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}_{\mathbf{K}})} ({}^{\mathbf{K}}V_\lambda)$, et $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \mathrm{quot}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} ({}^{\mathbf{K}}V_\lambda \otimes_{\mathbf{k}} \overline{\mathbf{K}}))$ (La notation “quot” est introduite dans la démonstration du résultat précédent). Or, d'après [11, 7.4], ${}^{\mathbf{K}}V_\lambda \otimes_{\mathbf{k}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\mu\in\Gamma^*\lambda} L^d_{\mu,I_0}$, donc $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus_{\mu\in\Gamma^*\lambda} L^d_\mu$ et on note $L_{\Gamma^*\lambda}$ ce $\mathfrak{g}$-module. On a construit un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module simple de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$; on a $V_{\mathbf{K}} = (L_{\Gamma^*\lambda})^\Gamma$ pour une action du group! e de Galois et on note $V_{\mathbf{K}} = L_{\Gamma^*\lambda,\mathbf{K}}$. D'après [11, 7.2], ce $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module simple $L_{\Gamma^*\lambda,\mathbf{K}}$ ne dépend que de $\Gamma^*\lambda$ et $\mathbf{K}$.

Le résultat suivant nous fournit des modules simples de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$:

Théorème 4.11. *Soit $V_{\mathbf{K}}$ un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module simple tel que*

$$V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \bigoplus\nolimits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} L_\lambda^{n(\lambda)} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}},$$

où les $n(\lambda)$ sont des entiers presque tous nuls. Alors il existe un poids dominant $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ de $V = V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ tel que $V_{\mathbf{K}} = L_{\Gamma^*\lambda,\mathbf{K}}$.

Remarque 4.12. On verra au paragraphe suivant que l'on obtient ainsi tous les $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules simples de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$.

Démonstration. On a montré à la proposition 4.9 que, sous les hypothèses choisies dans le théorème 4.11, $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)}$ est un $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module simple de dimension finie. Il existe donc, d'après [11, 7.2], un poids dominant $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $(V_{\mathbf{K}})^{\mathfrak{u}_{\mathbf{K}}(I_0)} =^{\mathbf{K}} V_\lambda$. Il suffit alors de reprendre la construction ci-dessus pour conclure la démonstration. ∎

4.5. Dans ce paragraphe, nous allons adapter à la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ la notion de suite de composition locale qui existe dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{b}}$.

Théorème 4.13. *Soient $V_{\mathbf{K}}$ un $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$; on note $\Gamma^*\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Alors $V_{\mathbf{K}}$ admet une suite de composition locale en $\Gamma^*\lambda$ dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$, c'est-à-dire : il existe une filtration de $V_{\mathbf{K}}$ par une suite de sous-$\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules $(V^i_{\mathbf{K}})_{i=0,\dots,n}$, $V_{\mathbf{K}} = V^0_{\mathbf{K}} \supset V^1_{\mathbf{K}} \supset \cdots \supset V^n_{\mathbf{K}} = (0)$, et un sous-ensemble $I \subset \{0, \dots, n\}$ tels que :*

(i) si $i \in I$, alors il existe $\mu_i \in \mathfrak{h}^*$ et $j \in \{1 \dots, k\}$ tel que $\mu_i \geq \lambda_j$ et $V^i_{\mathbf{K}}/V^{i+1}_{\mathbf{K}} \cong L_{\Gamma^*\mu_i,\mathbf{K}}$;

(ii) si $i \notin I$, alors pour tout $j \in \{1 \dots, k\}$ on a $(V^i_{\mathbf{K}}/V^{i+1}_{\mathbf{K}})_\mu = (0)\ \forall\mu \geq \lambda_j$.

Corollaire 4.14. *Les objets simples de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ sont les $\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules simples $L_{\Gamma^*\mu,\mathbf{K}}$ construits en 4.4. En particulier, le théorème 0.1 est démontré.*

Démonstration. Soient $V = V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Comme $V \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, on peut trouver une suite de composition pour V qui soit locale en $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Soient $V^0, \dots, V^n$ des sous-$\mathfrak{g}$-modules de V et un sous-ensemble $I \subset \{0, \dots, n\}$ tels que $V = V^0 \supset V^1 \supset \cdots \supset V^n = (0)$ et

(i) si $i \in I$, $\exists \mu_i \in \mathfrak{h}^*$ et $j \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $\mu_i \geq \lambda_j$ et $V^i/V^{i+1} \cong L_{\mu_i}$;

(ii) si $i \notin I$, $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$ on a $(V^i/V^{i+1})_\mu = (0)$ $\forall \mu \geq \lambda_j$.

On va construire par récurrence sur n, à partir de cette suite de composition locale, une filtration de V définie sur $\mathbf{K}$.

Premier pas: $V = V^0 \supset V^1$ sous-$\mathfrak{g}$-module. On va étudier séparément les deux cas qui peuvent se présenter.

(ii) Si $0 \notin I$, alors pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ on a $(V/V^1)_\mu = (0)$ $\forall \mu \geq \lambda_j$. On pose $V^{1,\gamma} = \gamma V^1$ pour $\gamma \in \Gamma$. D'après le corollaire 2.17, on a alors, pour $\gamma \in \Gamma$ et $w_\gamma \in W_0$ tel que $w_\gamma \gamma = \gamma^*$, $V^{1,\gamma} = w_\gamma \gamma V^1 = \gamma^* V^1$. On pose $W^1 = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} V^{1,\gamma}$; c'est un sous-$\mathfrak{g}$-module de V défini sur $\mathbf{K}$. On a le morphisme injectif de $(\mathfrak{g}, \Gamma)$-modules :

$$V/W^1 \hookrightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} (V/V^{1,\gamma})$$

Comme pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ on a $(V/V^1)_\mu = (0)$ $\forall \mu \geq \lambda_j$, alors pour tout $j \in \{1, \cdots, k\}$ on a $(V/V^{1,\gamma})_\mu = (0)$ $\forall \mu \geq \gamma^* \lambda_j$. On a donc $(V/W^1)_\mu = (0)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ et tout $\mu \geq \lambda_j$.

(i) Si $0 \in I$, alors il existe $\mu_0 \in \mathfrak{h}^*$ et $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\mu_0 \geq \lambda_j$ et $V/V^1 \cong L_{\mu_0}$. Le lemme suivant va nous permettre de travailler sur une extension finie du corps $\mathbf{K}$ et donc avec un groupe de Galois fini.

Lemme 4.15. *Sous les hypothèses du cas (i), le sous-$\mathfrak{g}$-module V^1 est défini sur une extension galoisienne finie $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$.*

Démonstration. On peut supposer qu'il existe un corps $\mathbf{L}$, extension galoisienne finie de $\mathbf{K}$, qui vérifie les points suivants :

- $\mathfrak{g}$ est déployée sur $\mathbf{L}$ (proposition 1.2) ;
- v_{μ_0}, représentant dans V du vecteur de plus haut poids μ_0 dans V/V^1, est défini sur $\mathbf{L}$;
- le $\mathfrak{g}$-module de dimension finie $V^1 \cap V_{\mu_0}$ est défini sur $\mathbf{L}$.

On a $V_{\mu_0} = \mathbf{L} v_{\mu_0} \oplus (V^1 \cap V_{\mu_0})$; soit W le plus grand sous-$\mathfrak{g}$-module de V qui vérifie $(*)$ $W \cap V_{\mu_0} \subset V^1 \cap V_{\mu_0}$. W existe car c'est la somme de tous les sous-$\mathfrak{g}$-modules de V qui vérifient $(*)$. De plus $W = V^1$. En effet V^1 vérifie $(*)$, et si $V^1 \subset W$, alors V/W est un quotient non nul de $V/V^1 = L_{\mu_0}$ qui est simple et donc $V^1 = W$. On en déduit alors que $V^1 = W$ est défini sur le corps $\mathbf{L}$. ∎

On pose, comme dans le cas (ii), $W^1 = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} V^{1,\gamma}$, mais on travaille cette fois avec une intersection finie. En effet, si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{L})$, on a $V^{1,\gamma} = V^1$. Le sous-$\mathfrak{g}$-module W^1 de V est défini sur $\mathbf{K}$. On a le morphisme injectif de $(\mathfrak{g}, \Gamma)$-modules :

$$V/W^1 \hookrightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma_{\mathbf{K}}} (V/V^{1,\gamma})$$

où $\Gamma_{\mathbf{K}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ est un groupe fini. On a aussi l'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules :

$$X = \prod_{\gamma \in \Gamma_{\mathbf{K}}} (V/V^{1,\gamma}) \simeq \prod_{\gamma \in \Gamma_{\mathbf{K}}} L_{\gamma\mu_0, \gamma\mathfrak{b}^+}$$

où $L_{\lambda, \mathfrak{b}_1^+}$ désigne le $\mathfrak{g}$-module de Verma irréductible de plus haut poids λ associé au couple $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1^+)$ d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans une sous-algèbre de Borel positive $\mathfrak{b}_1^+$ de $\mathfrak{g}$ (Rappel : $L_\lambda = L_{\lambda,\mathfrak{b}^+}$). On note $X_{\mathbf{K}} = X^\Gamma$. D'après la proposition 4.9 (i), $X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)}$ est un $\mathfrak{m}_{\mathbf{K}}(I_0)$-module semi-simple de dimension finie, on peut donc l'écrire $X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} = \prod_{i=1}^n ({}^{\mathbf{K}}V_{\xi_i})$ [11, 7.2]. En utilisant [11, 7.4], on obtient :

$$(*) \qquad X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \prod_{i=1}^{n} (\bigoplus_{\xi\in\Gamma^*\xi_i} L_{\xi,I_0}^{t_i})$$

où t_i^2 est le degré d'un corps gauche D_{ξ_i} sur son centre $\mathbf{K}_{\xi_i} = \{x \in \mathbf{L} \mid \gamma x = x \ \forall\gamma \in \Gamma_{\mathbf{K}}$ tel que $\gamma^*\xi_i = \xi_i\}$. D'autre part : $X_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \prod_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{K}}} L_{\gamma\mu_0,\gamma\mathfrak{b}^+}$, donc on a :

$$X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \prod_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{K}}} (L_{\gamma\mu_0,\gamma\mathfrak{b}^+})^{\mathfrak{u}(I_0)} = \prod_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{K}}} L_{\gamma\mu_0,\gamma\mathfrak{b}^+,I_0}$$

Or $L_{\gamma\mu_0,\gamma\mathfrak{b}^+,I_0} = L_{w\gamma\mu_0,w\gamma\mathfrak{b}^+,I_0}$ pour tout $w \in W_0$, donc

$$X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \prod_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{K}}} L_{w_\gamma\gamma\mu_0,w_\gamma\gamma\mathfrak{b}^+,I_0}$$

où w_γ est l'unique élément de W_0 tel que $w_\gamma\gamma\mathfrak{b}^+ = \gamma^*\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{b}^+$. On obtient alors :

$$(**) \qquad X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = \prod_{\gamma\in\Gamma_{\mathbf{K}}} L_{\gamma^*\mu_0,I_0}.$$

En identifiant les formules $(*)$ et $(**)$, on trouve que $\xi_i \in \Gamma^*\mu_0$ pour tout $i = 1,\ldots,n$ et que tous les t_i sont égaux. On pose $t_i = d_0$ $\forall i = 1,\ldots,n$. $(*)$ s'écrit alors $X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = (\bigoplus_{\mu\in\Gamma^*\mu_0} L_{\mu,I_0}^{d_0})^n$, avec $d_0^2 = [D_{\mu_0} : \mathbf{K}_{\mu_0}]$. Le groupe de Galois de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{K}_{\mu_0}$ est $\Gamma_{\mu_0}^{\mathbf{K}} = \{\gamma \in \Gamma_{\mathbf{K}} \mid \gamma^*\mu_0 = \mu_0\}$ et on a $|\Gamma_{\mu_0}^{\mathbf{K}}| = [\mathbf{L} : \mathbf{K}_{\mu_0}] = m_0 d_0$, multiple entier de d_0 puisque $\mathbf{L}$ est un corps neutralisant de D_{μ_0}. En comparant les dimensions de $(X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}})_{\mu_0}$ dans $(*)$ et $(**)$, on obtient que $n = m_0$. Donc on a $X_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{u}(I_0)} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = (\bigoplus_{\mu\in\Gamma^*\mu_0} L_{\mu,I_0}^{d_0})^{m_0}$. Enfin, en utilisant la proposition 4.9 (ii), on obtient :

$$X_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} = (\bigoplus_{\mu\in\Gamma^*\mu_0} L_\mu^{d_0})^{m_0}$$

On a alors $V/W^1 \hookrightarrow (\bigoplus_{\mu\in\Gamma^*\mu_0} L_\mu^{d_0})^{m_0}$, sous-$(\mathfrak{g},\Gamma)$-module. Or $L_{\Gamma^*\mu_0} = \bigoplus_{\mu\in\Gamma^*\mu_0} L_\mu^{d_0}$ est un $(\mathfrak{g},\Gamma)$-module irréductible, donc $V/W^1 = (L_{\Gamma^*\mu_0})^{n_0}$, avec $1 \le n_0 \le m_0$ et $\mu_0 \ge \lambda_j$ pour un $j \in \{1,\ldots,k\}$. En posant $V_{\mathbf{K}}^1 = (W^1)^\Gamma$, on a $V_{\mathbf{K}}/V_{\mathbf{K}}^1 \cong (L_{\Gamma^*\mu_0,\mathbf{K}})^{n_0}$. On obtient les n_0 premiers sous-$\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules de $V_{\mathbf{K}}$ de la filtration cherchée par un raffinement évident.

Récurrence : On suppose construit $V_{\mathbf{K}}^l$, $l \le n$, le l-ième sous-$\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-module de $V_{\mathbf{K}}$ de la filtration cherchée. On considère $W^l = V_{\mathbf{K}}^l \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$, $\mathfrak{g}$-module défini sur $\mathbf{K}$. Ce $\mathfrak{g}$-module admet une filtration par des sous-$\mathfrak{g}$-modules : $W^l = X^l \supset X^{l+1} \supset \cdots \supset X^n = (0)$ où $X^j = W^l \cap V^j$ pour $j = l,\ldots,n$. Comme $X^j/X^{j+1} \subset V^j/V^{j+1}$, cette filtration de W^l admet les propriétés d'une suite de composition locale en $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, avec un terme de moins. On peut donc appliquer la récurrence pour construire W^{l+1} et donc $V_{\mathbf{K}}^{l+1}$. On obtient alors une suite de composition pour $V_{\mathbf{K}}$ locale en $\Gamma^*\lambda$ dans la catégorie $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$. ■

Remarque 4.16. Les modules $L_{\Gamma^*\mu_i,\mathbf{K}}$ qui interviennent dans le théorème 4.13 sont dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{\mathbf{K}}$ (et même dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}^{\mathbf{K}}$), on a donc, d'après la proposition 4.8, $\mu_i(\alpha_j^\vee) \in \mathbb{N}$ $\forall j \in I_0$.

Remarque 4.17. Si on suppose, dans le théorème 4.13, que $V_{\mathbf{K}}$ est dans la catégorie $\mathcal{O}^{\mathbf{K}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{t}}$, on peut modifier la démonstration précédente pour trouver une filtration de $V_{\mathbf{K}}$ par des sous-$\mathfrak{g}_{\mathbf{K}}$-modules et un sous-ensemble $I' \subset \{1, \dots, n\}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i)' si $i \in I'$, alors il existe $\mu_i \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\mu_i' \geq \lambda'$ et $V^i_{\mathbf{K}}/V^{i+1}_{\mathbf{K}} \cong L_{\Gamma^*\mu_i,\mathbf{K}}$;

(ii)' si $i \notin I'$, alors $(V_i/V_{i+1})_\mu = (0)$ pour tout μ tel que $\mu' \geq \lambda'$.

On utilise les notations $\lambda' = \lambda\mid_{\mathfrak{t}}$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\lambda_1' \geq \lambda_2'$ si $\lambda_1' - \lambda_2' \in Q^+_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{p})$. Comme $\lambda_1' = \dots = \lambda_k' = \lambda'$ d'après [1, 2.7], (i)' est moins forte que (i) (strictement) et (ii)' est plus forte que (ii) (strictement).

Références

[1] Back-Valente, V., N. Bardy-Panse, H. Ben Messaoud, and G. Rousseau, *Formes presque déployées des algèbres de Kac–Moody: classification et racines relatives*, J. of Algebra **171** (1995), 43–96.

[2] Barlet-Mathieu, C., "Représentations des formes d'une algèbre de Kac–Moody," Thèse de l'Université H. Poincaré Nancy (2002).

[3] Ben Messaoud, H., and G. Rousseau, *Classification des formes réelles presque compactes des algèbres de Kac–Moody affines*, Les prépublications de l'Institut Élie Cartan **31** (2000), A paraître au *J. of Algebra.*

[4] Bernstein, J., I. M. Gelfand, and S. I. Gelfand, *Structure of representations generated by vectors of highest weight*, Functional Anal. Appl. **5** (1971), 1–8.

[5] Futorny, V., *Verma type modules of level zero for affine algebras*, Trans. Amer. Math. Soc, **349** (1997), 2663–2685.

[6] Kac, V. G., "Infinite-dimensional Lie algebras," Cambridge University Press, 1990.

[7] Moody, R., and A. Pianzola, "Lie algebras with triangular decompositions," Wiley-Interscience Publications, 1995.

[8] Peterson, D., and V. G. Kac, *Infinite flag varieties and conjugacy theorems*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **80** (1983), 1778–1782.

[9] Rousseau, G., *Almost split K-forms of Kac–Moody algebras*, in: V. G. Kac Ed., "Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups," Adv. Ser. in Math. Physics **7**, World Scientific (1989), 70–85.

[10] —, *L'immeuble jumelé d'une forme presque-déployée d'une algèbre de Kac–Moody*, Bull. Soc. Math. Belg. **42** (1990), 673–694.

[11] Tits, J., *Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*, J. für die reine und angewandte Math. **248** (1971), 196–220.

Cécile Barlet-Mathieu
Laboratoire Géométrie, Topologie et Algèbre
Université Montpellier 2
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5 France
mathieu@math.univ-montp2.fr

Received December 13, 2002
and in final form March 3, 2003