Journal of Lie Theory
Volume **15** (2005) 13–25

Une propriété des idéaux de codimension finie des algèbres de Lie de champs de vecteurs

Mohammed Benalili et Azzeddine Lansari

Communicated by G. Mauceri

Résumé. On montre que les idéaux de codimension finie d'une ample classe d'algèbres de Lie de germes de champs de vecteurs contiennent l'idéal des germes infiniment plats à l'origine.

1. Introduction

Les nombreux travaux sur le théorème de Pursel-Shanks et ses généralisations ont provoqué l'étude des idéaux et des sous-algèbres de codimension finie des algèbres de Lie de champs de vecteurs sur une variété M. En particulier, dans les algèbres de Lie de germes de champs de vecteurs en un point (voir [2] , [3] , [4] et [5]) on prend $M = R^n$ et les germes à l'origine 0. Le problème en question a été considéré seulement dans le cas des algèbres de Lie contenant un germe de champs de vecteurs X_0 ne s'annulant pas.

Dans ce travail, nous généralisons une propriété essentielle des travaux cités ci-dessus à savoir: *si X_0 est le germe d'un champ de vecteurs en 0 sur R^n ne s'annulant pas en* 0*, alors pour tout germe Y en* 0 *il existe un germe X tel que* $Y = [X_0, X]$, au cas où les germes de champs de vecteurs s'annulent en 0. Si l'expression du germe est $X_0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i x_i + \beta_i x_i^{1+m_i}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ où $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ et m_i un entier naturel pair, alors l'expression de X est donnée en termes de Y. On donne une caractérisation des idéaux de codimension finie dans une large classe d'algèbres de Lie en question, plus précisément, on montre qu'elles contiennent l'idéal des germes de champs de vecteurs infiniment plats à l'origine 0. Notre résultat principal s'applique immédiatement à l'étude des homomorphismes du groupe des germes de difféomorphismes de R^n dans un groupe de Lie de dimension finie: il s'agit de la version infinitésimale du problème (voir [1])

Notations. Notons par R^n l'espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et par $\|\cdot\|$ la norme induite par ce produit scalaire. Notons aussi par

χ_0 l'algèbre de Lie des germes de champs de vecteurs sur R^n s'annulant à l'origine,

ISSN 0949–5932 / \$2.50

χ_0^∞ l'idéal de χ_0 des germes X infiniment plats à l'origine, i.e. tels que pour tout multi-indice $\gamma \in N^n$, $D^\gamma X(0) = 0$.

Pour les champs de vecteurs X, Y, Z l'égalité $ad_X(Y) = [X,Y] = Z$ est comprise au sens des germes à l'origine 0. En coordonnées, si $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ alors $Z = ad_X(Y) = \sum_{i,j=1}^n \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Si ϕ_t est le groupe local à un paramètre engendré par le champ de vecteurs X_0 alors on définit $(\phi_t)_*$ par $(\phi_t)_* X = D\phi_t(\phi_{-t})X(\phi_t) = (D\phi_t.X) \circ \phi_{-t}$.

Algèbre admissible

Soit A une sous-algèbre de Lie de χ_o; A sera dite admissible si elle satisfait les conditions suivantes:

(i) A contient les champs de vecteurs de la forme $X_0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i x_i + \beta_i x_i^{1+m_i}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ où $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ et m_i un entier naturel pair.

(ii) A est localement fermée dans le sens suivant : si une suite de champs de vecteurs X_n dans A est telle que les supports de X_n sont contenus dans un compact K et que la suite X_n converge vers X dans la topologie de classe C^∞ alors $X \in A$.

(iii) A est invariante par rapport aux difféomorphismes $\phi_t = \exp(tX_0)$ pour tout $t \geq 0$ i.e. $(\phi_t)_*.A \subset A$ pour tout $t \geq 0$.

Les conditions (ii) et (iii) méritent des explications.
La condition (ii) est tout à fait naturelle de point de vue la théorie des groupes de Lie, quoiqu'il existe des algèbres de Lie sans cette condition (voir [2]). Cette condition n'est pas une restriction forte comme le montrent les exemples qui suivent.
Soit M une variété différentiable de classe C^∞ et $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M. Notons par $\gamma(T^{p,q})$ l'espace des tenseurs p-covariants et q-contravariants sur M. Le groupe de difféomorphismes sur M opére naturellement sur $\gamma(T^{p,q})$ et si on notera par $L_X : \gamma(T^{p,q}) \to \gamma(T^{p,q})$ la dérivée de Lie par rapport aux champs de vecteurs X, on a (voir [2]) :

Proposition 1. *Les sous algèbres de Lie suivantes satisfont à la condition (ii)*
(a) $g_T = \{X \in \chi(M) : L_X T = 0\}$
(b) $g_S = \{X \in \chi(M) : L_X S \subset S\}$
où T *est un sous-espace vectoriel de* $\gamma(T^{p,q})$ *et* S *un sous-module de l'anneau des fonctions de classe* C^∞ *sur* M*, engendré par un nombre fini de générateurs* $T_1, \ldots, T_n$ *et fermé pour la topologie de classe* C^∞.

Proposition 2. *Soit g une algèbre de Lie vérifiant la condition* $(\exp X)_* g = g$ *et h une sous-algèbre fermée de codimension finie de g, alors h satisfait la condition (ii) d'admissibilité.*

La condition (iii) d'admissibilité peut être remplacée par la condition plus faible suivante: pour tout champ de vecteurs $Y \in A$ à support compact,

$$\int_0^\infty (\phi_t)_* Y dt \in A$$

où $(\phi_t)_t$ est le flot engendré par un champ de vecteurs X_o et $-\infty < a \leq b < +\infty$. Nous pouvons donc conclure que du point de vue géométrique, seule la condition (i) d'admissibilité constitue une restriction.

2. Surjectivité des opérateurs adjoints

1^{er} cas: $X_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i^{1+m_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $m_i > 0$ pair et $\beta_i > 0$.

Notons par

$$w_i(t, x_i) = 1 + \beta_i m_i t x_i^m i \tag{2.1}$$

et

$$u_i(x) = \int_0^\infty (w_i(t, x_i))^{1+\frac{1}{m_i}} f_i(x_1 w_1^{-\frac{1}{m_1}}, \ldots, x_n w_n^{-\frac{1}{m_n}}) dt \tag{2.2}$$

Lemme 1. *Si un germe de champs de vecteurs $Y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ appartient à l'algèbre de Lie χ_0^∞ des germes de champs de vecteurs infiniments plats à l'origine 0, alors le germe de champs de vecteurs $F(Y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ appartient à χ_0^∞.*

Démonstration. Nous allons prouver que:

(1) l'intégrale singulière $u_i(x)$ donnée par (2.2) converge uniformément dans un voisinage V de l'origine 0.

(2) $u_i(x)$ est une fonction de classe C^∞ sur V

(3) $u_i(x)$ est infiniment plate à l'origine 0 i.e. $D^\gamma u_i(0) = 0$ pour tout multi-indice $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in N^n$

1 ^{er} pas. On pose

$$h_i(t, x) = w_i^{1+\frac{1}{m_i}} f_i(\phi_{-t}(x)) \tag{2.3}$$

et

$$y_i = \phi_i(-t, x) = x_i w_i^{-\frac{1}{m_i}}. \tag{2.4}$$

Puisque f_i est infiniment plate à l'origine 0, alors pour tout entier naturel m il existe $\delta_m > 0$ et une constante $M_m > 0$ tels que pour tout x vérifiant $\|x\| \leq \delta_m$ on ait $|f_i(x)| \leq M_m \|x\|^m$. Cela donne

$$|f_i(\phi_{-t}(x))| \leq M_m \|\phi_{-t}(x)\|^m \leq M_m \left(\sup_{i=1,\ldots,n} |\phi_i(-t, x)|^m \right)$$

d'où on obtient une majoration pour $h_i(t, x)$:

$$|h_i(t, x)| \leq (1 + \beta_i m_i t x_i^{m_i})^{1+\frac{1}{m_i}} M_m \sup \left\{ |x_i|^m (1 + \beta_i m_i t x_i^{m_i})^{-\frac{m}{m_i}}, \ i = 1, \ldots, n \right\} \tag{2.5}$$

$$\leq M_m (\delta_m)^m (1 + \beta_{i_0} m_{i_0} t x_{i_0}^{m_{i_0}})^{\frac{m_{i_0}+1-m}{m_{i_0}}} = k_m(t) \quad \text{pour un } i_0 \in \{1, \ldots, n\}.$$

Comme m est arbitraire, on choisira m assez grand pour que l'intégrale $\int_0^\infty k_m(t) dt$ converge i.e. $m > m_{i_0} + 1$ d'où l'intégrale $\int_0^{+\infty} h_i(t, x) dt$ converge uniform ément par rapport à x dans un voisinage de 0. *2^{ième} pas.* Notons par $1_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ où 1 est à la $j^{ième}$ colonne. Nous avons pour tout multi-indice $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \in N^n$

$$D_x^\gamma h_j(t,x) = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1}\ldots\partial x_n^{\gamma_n}} h_j(t,x) \tag{2.6}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial^{\gamma_i}}{\partial x_i^{\gamma_i}} h_j(t,x) \text{ avec avec } |\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n.$$

On pose

$$g_j(t,x_j) = w_j^{1+1/m_j}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} D_x^\gamma h_j(t,x) &= \tfrac{\partial^{\gamma_j}}{\partial x_j^{\gamma_j}} \left(g_j(t,x_j).D_x^{\gamma-\gamma_j.1_j} f_j(y(t,x)) \right) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\gamma_j} C_k^{\gamma_j} D_{x_j}^k g_j(t,x_j).D_x^{\gamma-k.1_j} f_j(y(t,x)). \end{aligned}$$

Par ailleurs pour $k \geq 1$, on a

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} g_j(t,x_j) = x_j^{-k+1} w_j^{1+1/m_j} \sum_{l=1}^{k} a_{kl} \left(\frac{w_j - 1}{w_j}\right)^l \tag{2.7}$$

où les a_{kl} sont des polynômes en m_j.De même

$$\frac{\partial^{\gamma_i}}{\partial x_i^{\gamma_i}} f_j(y(t,x)) = \sum_{\iota=1}^{\gamma_i} z_{\iota,\gamma_i}(x) \frac{\partial^\iota}{\partial y_i^\iota} f_j(y(t,x)) \tag{2.8}$$

où

$$y(t,x) = (y_1,\ldots,y_n) = \left(x_1 w_1^{-1/m_1}, \ldots, x_n w_n^{-1/m_n} \right), \tag{2.9}$$

$$D_{x_i} y_i = w_i^{-1-1/m_i}$$

$$D_{x_j}^k y_j = x_j^{1-k} w_j^{-1-1/m_j} \left(\sum_{l=1}^{k-1} b_{kl} \left(\frac{w_j - 1}{w_j}\right)^l \right) \qquad \text{pour } k \geq 2 \tag{2.10}$$

$$z_{\iota,\gamma_i}(x) = \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_\iota=\gamma_i;\nu_s>0} D_{x_i}^{\nu_1} y_i \ldots D_{x_i}^{\nu_\iota} y_i$$

$$= \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_\iota=\gamma_i;\ \nu_s>0} x_i^{\iota-\gamma_i} w_i^{-\iota(1+1/m_i)} \left(\prod_{l=1}^{\iota} \left(\sum_{\varsigma_l=1}^{\nu_l-1} b_{\varsigma_l \nu_l} \left(\frac{w_i - 1}{w_i}\right)^{\varsigma_l} \right) \right)$$

où les b_{ν_ι,γ_i} sont des constantes dépendantes des paramètres m_j. Finalement, on obtient

$$D_x^\gamma h_j(t,x) = \sum_{k=0}^{\gamma_j} C_k^{\gamma_j} D_{x_j}^k g_j(t,x_j).D_x^{\gamma-k.1_j} f_j(y(t,x)) \tag{2.11}$$

$$= \sum_{k=0}^{\gamma_j} C_k^{\gamma_j} x_j^{-k} w_j^{1+1/m_j} \left(\sum_{l=1}^{k} a_{kl} \left(\frac{w_j - 1}{w_j}\right)^l \right) \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{\iota=1}^{\gamma_s - k.\delta_s^j} z_{\iota,\gamma_s - k.\delta_s^j}(x_s).D_{y_s}^\iota f_j(y(t,x)) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\gamma_j} C_k^{\gamma_j} x_j^{-k} w_j^{1+1/m_j} \left(\sum_{l=1}^{k} a_{kl} (\frac{w_j - 1}{w_j})^l \right) \sum z_{\alpha_1} \ldots z_{\alpha_n} . D_y^\alpha f_j(y(t,x))$$

où la troisième somme est étendue à tous les indices α_i vérifiant $1 \leq \alpha_i \leq \gamma_i - k.\delta_i^j$ et $i = 1, \ldots, n$. Comme $\lim_{t \to 0} D_x^\gamma h_j(t,x)$ est finie, l'intégrale $\int_0^\infty D_x^\gamma h_j(t,x) dt$ sera la somme d'intégrales de la forme

$$I_j(x) = \int_0^{+\infty} \psi_j(t,x) . D_y^\alpha f_j(y(t,x)) dt. \tag{2.12}$$

D'autre part lorsque t tend vers $+\infty$, y tend vers 0 uniformément par rapport à x et comme f_i est infiniment plate en 0, il en est de même pour $D_y^\alpha f_i$ et par conséquent pour tout entier naturel m, il existe un $\delta_m > 0$ et $M_m > 0$ tels que pour tout x vérifiant $\|x\| \leq \delta_m$ on ait

$$\left\| D_y^\alpha f_j(y(t,x)) \right\| \leq M_m \left\| y(t,x) \right\|^m \tag{2.13}$$

$$\leq M_m \frac{|x_i|^m}{(1 + \beta_i m_i t x_i^{m_i})^{\frac{m}{m_i}}}.$$

Or

$$|\psi_j(t,x)| \leq A_j t^{s_j} \quad \text{avec} \quad s_j = 1 - |\gamma| + \frac{1}{m_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{m_i}$$

par conséquent

$$\left| \psi_j(t,x) . D_y^\alpha f_j(y(t,x)) \right| \leq A_j M_m \frac{|x_i|^m t^{s_j}}{(1 + \beta_i m_i t x_i^{m_i})^{\frac{m}{m_i}}} = k_m(t) \tag{2.14}$$

avec A_j, q_j et M_m des constantes. Comme m est arbitraire, on choisira $m > m_j(s_j + 1)$ pour que l'intégrale $\int_0^{+\infty} k_m(t) dt$ converge. L'intégrale $I_j(x)$ converge donc uniformément par rapport à x dans un voisinage U de l'origine 0. Par conséquent $D^\gamma u_i$ est continue dans U c'est à dire $F(Y)$ est de classe C^∞ dans U.

$3^{ième}$ *pas.* Comme pour tout multi-indice γ, l'intégrale $D_x^\gamma F(Y)$ converge uniformément par rapport à x dans un voisinage de 0, alors on peut passer à la limite quand x tend vers 0 et on obtient

$$D_x^\gamma u_i(0) = 0$$

■

Lemme 2. *Pour tout X_0, on a*

$$ad_{X_0}(\chi_0^\infty) \subset \chi_0^\infty.$$

La preuve est évidente.

Théorème 1. *Si $X_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i^{1+m_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, où $\beta_i > 0$ et $m_i \geq 0$ un entier pair alors l'endomorphisme ad_{X_0} défini sur χ_o^∞ est surjectif.*

Démonstration. Soit

$$Y=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\in\chi_0^{\infty} \tag{2.15}$$

cherchons un germe

$$X=\sum_{i=1}^{n} u_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\in\chi_0^{\infty} \tag{2.16}$$

tel que

$$Y=[X_0,X]\,.$$

En coordonnées, cette équation s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{1+m_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)-(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j}u_j(x)=f_j(x),\quad j=1,\ldots,n$$

et admet pour solution la fonction

$$u_j(x)=\int_0^{+\infty} w_j^{1+\frac{1}{m_i}} f_i\left(x_1w_1^{-1/m_1},\ldots,x_nw_n^{-1/m_n}\right)dt \tag{2.17}$$

où

$$w_j=1+\beta_j m_j t x_j^{m_j}.$$

En effet, d'après le Lemme 1, $u_j(x)$ est de classe C^{∞}. Par ailleurs nous avons

$$\frac{\partial f_j}{\partial\tau}(\phi_{-t}(x))=-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{1+m_i}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\phi_{-t}(x)) \tag{2.18}$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{1+m_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)=-\int_0^{+\infty} w_j^{1+\frac{1}{m_j}}.\frac{\partial}{\partial t}f_j(\phi_{-t}(x))\,dt$$

$$+\beta_j^2 m_j(1+m_j)x_j^{2m_j}\int_0^{+\infty} t w_j^{\frac{1}{m_j}} f_j\left(x_1w_1^{-1/m_1},\ldots,x_nw_n^{-1/m_n}\right)dt$$

$$=\left[(w_i(t,x_i))^{1+\frac{1}{m_i}} f_i\left(x_1w_1^{-1/m_1},\ldots,x_nw_n^{-1/m_n}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$+\beta_j(1+m_j)x_j^{m_j}\int_0^{+\infty} w_j^{1+\frac{1}{m_j}}.f_j\left(x_1w_1^{-1/m_1},\ldots,x_nw_n^{-1/m_n}\right)dt.$$

Comme f_j est infiniment plate en 0, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}(w_i(t,x_i))^{1+\frac{1}{m_i}} f_i\left(x_1w_1^{-1/m_1},\ldots,x_nw_n^{-1/m_n}\right)=0$$

et par conséquent

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i^{1+m_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)=f_j(x)+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j}u_j(x).$$

■

2 ieme cas : $X_0 = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i + \beta_i x_i^{1+m_i})\frac{\partial}{\partial x_i}$. Pour $j = 1, \ldots, n$, soient $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$ et $m_j > 0$ un entier pair. Posons

$$v_j = 1 + \frac{\beta_j}{\alpha_j} x_j^{m_j}(1 - e^{-\alpha_j m_j t})$$

et

$$u_j(t,x) = \int_0^{\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t) v_j^{1+\frac{1}{m_j}} f_j(x_1 e^{-\alpha_1 t} v_1^{-\frac{1}{m_1}}, \ldots, x_n e^{-\alpha_n t} v_n^{-\frac{1}{m_n}}) dt.$$

où $R(t)$ est une fonction bornée pour tout $t \in R^+$

Lemme 3. *Soit* $Y = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ *un germe de champs de vecteurs appartenant à l'algèbre de Lie* χ_0^{∞} *des germes de champs de vecteurs infiniments plats à l'origine* 0*, alors le germe de champs de vecteurs* $F(Y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ *appartient à* χ_0^{∞}*.*

Démonstration. Même raisonnement que celui dans la preuve du Lemme 2. ■

3. Surjectivité de certains opérateurs linéaires.

Dans cette section, on étudie l'inversibilité de certains opérateurs linéaires. Notons par $\psi = ad_{X_0}$ l'endomorphisme adjoint et I l'application identité.

Lemme 4. *Pour tout* $b \in R$*, l'opérateur* $\psi + bI$ *est surjectif sur l'idéal* χ_0^{∞} *des germes de champs de vecteurs infiniment plats à l'origine* 0*.*

Démonstration. Soit $Y = \sum_{j=1}^{n} f(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \in \chi_0^{\infty}$; cherchons un germe de champs de vecteurs $X = \sum_{j=1}^{n} u_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ de l'idéal χ_0^{∞} tel que

$$Y = (\psi + bI)(X) = [X_0, X] + bX.$$

Ceci s'écrit en coordonnées

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i + \beta_i x_i^{1+m_i})\frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} - \left\lceil \alpha_j - b + (1+m_j)\beta_j x_j^{m_j} \right\rceil u_j(x) = f_j(x),\ j = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Cette dernière équation admet pour solution la fonction

$$u_j(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} v_j^{1+\frac{1}{m_j}} f_j\left(\phi_{-t}(x)\right) dt$$

où

$$v_j(t,x) = 1 + x_j^{m_j}\frac{\beta_j}{\alpha_j}(1 - e^{-\alpha_j m_j t})$$

et

$$\phi_t(x) = (x_1 e^{\alpha_1 t} v_1^{-1/m_1}, \ldots, x_n e^{\alpha_n t} v_n^{-1/m_n}).$$

En effet d'aprés le Lemme 3, u_j est infiniment plate à l'origine 0 et de la relation (2.18) on déduit

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i+\beta_i x_i^{1+m_i})\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=-\int_0^{+\infty}e^{-(b-\alpha_j)t}v_j^{1+\frac{1}{m_j}}\frac{\partial}{\partial t}f_j\left(\phi_{-t}(x)\right)dt \tag{3.2}$$

$$+(1+m_j)(\alpha_j+\beta_j x_j^{m_j})\int_0^{+\infty}e^{-(b-\alpha_j)t}(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}}f_j\left(\phi_{-t}(x)\right)dt$$

$$=-\left[e^{-(b-\alpha_j)t}v_j^{1+\frac{1}{m_j}}f_j(\phi_{-t}(x))\right]_0^{+\infty}$$

$$+(\alpha_j-b+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j})\int_0^{+\infty}e^{-(b-\alpha_j)t}v_j^{1+\frac{1}{m_j}}f_j\left(\phi_{-t}(x)\right)dt.$$

Comme il est facile de voir que $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-(b-\alpha_j)t}v_j^{1+\frac{1}{m_j}}f_j(\phi_{-t}(x))=0$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i+\beta_i x_i^{1+m_i})\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)=\left[\alpha_j-b+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j})\right]u_j(x)+f_j(x),$$

ce qui achève la preuve du Lemme 4. ■

Remarque 1. *Ce résultat reste valable si, pour $i=1,\dots,n$, $\alpha_i<0$, $\beta_i<0$ et m_i est un entier naturel pair.*

Lemme 5. *Pour tous nombres réels b,c tels que $b^2-4c<0$, l'opérateur $\psi^2+b\psi+cI$ est surjective sur l'idéal χ_0^∞.*

Démonstration. Soit $Y=\sum_{j=1}^{n}f_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\in\chi_0^\infty$, cherchons un germe de champs de vecteurs

$$X=\sum_{j=1}^{n}u_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\in\chi_0^\infty$$

vérifiant l'équation

$$Y=\left(\psi^2+b\psi+cI\right)(X)=[X_0,[X_0,X]]+b\,[X_0,X]+cX, \tag{3.3}$$

ce qui s'écrit en coordonnées

$$\sum_{i,k}^{n}(\alpha_k x_k+\beta_k x_k^{1+m_k})(\alpha_i x_i+\beta_i x_i^{1+m_i})\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\partial x_i}(x) \tag{3.4}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i+\beta_i x_i^{1+m_i})(\alpha_i+(1+m_i)\beta_i x_i^{m_i}-2(\alpha_j+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j})+b)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)$$

$$+\left((1+m_j)\beta_j x_j^{m_j}(1+(2-m_j)-b)+\alpha_j^2-b\alpha_j+c\right)u_j(x)=f_j(x)$$

et admet pour solution la fonction

$$u_j(x)=\int_0^{+\infty}e^{-(b-\alpha_j)t}v_j^{1+\frac{1}{m_j}}R(t)f_j\left(\phi_{-t}(x)\right)dt \tag{3.5}$$

où

$$R(t) = \frac{2e^{-\frac{bt}{2}}}{\sqrt{4c-b^2}} \sin\left(t\sqrt{4c-b^2}/2\right),$$

la fonction $R(t)$ étant solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} R''(t) - bR'(t) + cR(t) = 0 \\ R(0) = 0;\ R'(0) = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

$$v_j(t,x) = 1 + x_j^{m_j}\frac{\beta_j}{\alpha_j}(1 - e^{-\alpha_j m_j t})$$

et

$$\phi(x) = (x_1 e^{\alpha_1 t} v_1^{-1/m_1}, \ldots, x_n e^{\alpha_n t} v_n^{-1/m_n}).$$

En effet, d' après le Lemme 3, u_j est de classe C^∞, infiniment plate à l'origine 0, et d'après l'égalité(3.2), on a

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i + \beta_i x_i^{1+m_i})\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} v_j^{1+\frac{1}{m_j}} R(t)\frac{\partial}{\partial t} f_j\left(\phi_{-t}(x)\right) dt \tag{3.7}$$

$$+(1+m_j)(\alpha_j + \beta_j x_j^{m_j})\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t)(v_j - 1) v_j^{\frac{1}{m_j}} f_j\left(\phi_{-t}(x)\right) dt,$$

ce qui donne

$$\sum_k(\alpha_k x_k + \beta_k x_k^{1+m_k})\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_i(\alpha_i x_i + \beta_i x_i^{1+m_i})\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t) v_j^{1+\frac{1}{m_j}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f_j(\phi_{-t}(x))\right) dt$$

$$-2(1+m_j)(\alpha_j + \beta_j x_j^{m_j})\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t)(v_j - 1) v_j^{\frac{1}{m_j}} \frac{\partial}{\partial t} f_j\left(\phi_{-t}(x)\right) dt$$

$$+(1+m_j)(\alpha_j+\beta_j x_j^{m_j})\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t)(m_j\beta_j x_j^{m_j} + 2v_j - 1)(v_j - 1) v_j^{\frac{1}{m_j}} f_j\left(\phi_{-t}(x)\right) dt.$$

Posons

$$I_j^1(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t) v_j^{1+\frac{1}{m_j}} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f_j(\phi_{-t}(x))\right) dt.$$

Une intégration par parties nous donne

$$I_j^1(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t)\left[-(b-\alpha_j) v_j^{1+\frac{1}{m_j}} + (1+m_j)\beta_j x_j^{m_j} v_j^{\frac{1}{m_j}}\right.$$

$$\left. -\alpha_j(1+m_j)(v_j - 1) v_j^{\frac{1}{m_j}} + R'(t) v_j^{1+\frac{1}{m_j}}\right] \frac{\partial}{\partial t}\left(f_j(\phi_{-t}(x))\right) dt.$$

Posons encore une fois

$$h_i(t,x) = R(t)\left[-(b-\alpha_j) v_j^{1+\frac{1}{m_j}} + (1+m_j)\beta_j x_j^{m_j} v_j^{\frac{1}{m_j}} - \alpha_j(1+m_j)(v_j - 1) v_j^{\frac{1}{m_j}}\right]$$

$$+R'(t) v_j^{1+\frac{1}{m_j}}.$$

Alors, en intégrant par parties et en tenant compte des conditions initiales dans (3.6), on obtient

$$I_j^1(x) = f_j(x) + \int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} \left[-(b-\alpha_j)h_i(t,x) + h_i'(t,x)\right] f_j(\phi_{-t}(x))dt$$

où

$$h_i'(t,x) = R(t)\Bigg[-(b-\alpha_j)(m_j+1)\beta_j x_j^{m_j} e^{-\alpha_j m_j t} v_j^{\frac{1}{m_j}} + (m_j+1)\beta_j^2 x_j^{2m_j} e^{-\alpha_j m_j t} v_j^{\frac{1}{m_j}-1}$$

$$-\alpha_j m_j(m_j+1)\beta_j x_j^{m_j} e^{-\alpha_j m_j t} v_j^{\frac{1}{m_j}} - \alpha_j(m_j+1)\beta_j x_j^{m_j} e^{-\alpha_j m_j t}(v_j-1) v_j^{\frac{1}{m_j}-1}\Bigg]$$

$$+R'(t)\left[-(b-\alpha_j)v_j^{\frac{1}{m_j}+1} + (m_j+1)\beta_j x_j^{m_j} v_j^{\frac{1}{m_j}} + (m_j+1)\beta_j x_j^{m_j}(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}}\right]$$

$$+R''(t)v_j^{1+\frac{1}{m_j}}.$$

Puisque

$$\beta_j x_j^{m_j} e^{-\alpha_j m_j t} = \beta_j x_j^{m_j} - \alpha_j(v_j - 1)$$

alors

$$h_i'(t,x) = R(t)\Bigg[-(b-\alpha_j)(1+m_j)v_j^{\frac{1}{m_j}} + (1+m_j)\beta_j x_j^{m_j} v_j^{\frac{1}{m_j}-1}$$

$$-\alpha_j(1+m_j)^2 v_j^{\frac{1}{m_j}-1}\Bigg] (\beta_j x_j^{m_j} - \alpha_j(v_j-1))$$

$$+R'(t)\left[-(b-\alpha_j)v_j^{1+\frac{1}{m_j}} + 2(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j} v_j^{\frac{1}{m_j}} - 2(1+m_j)\alpha_j(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}}\right]$$

$$+R''(t)v_j^{1+\frac{1}{m_j}}.$$

Posons

$$I_j^2(x) = -2(1+m_j)(\alpha_j + \beta_j x_j^{m_j}) \int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t)(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}} \frac{d}{dt} f_j(\phi_{-t}(x))dt.$$

Par intégration par parties, nous obtenons

$$I_j^2(x) = 2(1+m_j)(\alpha_j + \beta_j x_j^{m_j}) \int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} \times$$

$$\Bigg[R(t)\Big(-(b-\alpha_j(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}} + \beta_j m_j x_j^{m_j} e^{-\alpha_j m_j t} v_j^{\frac{1}{m_j}} + \beta_j x_j^{m_j} e^{-\alpha_j m_j t}(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}-1}\Big)$$

$$+R'(t)(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}}\Bigg] f_j(\phi_{-t}(x))dt$$

$$= 2(1+m_j)(\alpha_j+\beta_j x_j^{m_j})\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t}\times$$

$$\left[R(t)\left(-(b-\alpha_j(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}}+((1+m_j)v_j-1)(\beta_j x_j^{m_j}-\alpha_j(v_j-1))v_j^{\frac{1}{m_j}-1}\right)\right.$$

$$\left.+R'(t)(v_j-1))v_j^{\frac{1}{m_j}}\right] f_j(\phi_{-t}(x))dt.$$

Soient $C_1=(1+m_j)(\alpha_j+\beta_j x_j^{m_j})$, $C_2=\left[-2(\alpha_j+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j})+b\right]$,

$$I_j^3(x)=C_1\cdot\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t}R(t)\left(\beta_j m_j x_j^{m_j}+2v_j-1\right)(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}}f_j(\phi_{-t}(x))dt$$

et

$$I_j^4(x)=C_2\cdot\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t}R(t)(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}+1}\frac{d}{dt}f_j(\phi_{-t}(x))dt$$

$$+\left[-2(\alpha_j+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j})+b\right](1+m_j)(1+\frac{\beta_j}{\alpha_j}x_j^{m_j})$$

$$\times\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t}R(t)(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}+1}f_j(\phi_{-t}(x))dt.$$

$$=\left[-2(\alpha_j+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j})+b\right]\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t}$$

$$\times\left[R(t)\left(-(b-\alpha_j)v_j^{\frac{1}{m_j}+1}+(1+m_j)\beta_j x_j^{m_j}e^{-\alpha_j m_j t}v_j^{\frac{1}{m_j}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1+m_j)(1+\frac{\beta_j}{\alpha_j}x_j^{m_j})(v_j-1)v_j^{\frac{1}{m_j}}\right)+R'(t)v_j^{\frac{1}{m_j}+1}f_j(\phi_{-t}(x))\right]dt.$$

D'où

$$I_j^1(x)+I_j^2(x)+I_j^3(x)+I_j^4(x)$$

$$+\left[(1+m_j)\beta_j^2 x_j^{2m_j}+(1+m_j)\beta_j(2\alpha_j-m_j\alpha_j-b)x_j^{m_j}+\alpha_j^2-b\alpha_j+c\right]u_j$$

$$=f_j(x)+\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t}R(t)(v_j-1)v_j^{1+\frac{1}{m_j}}\left(R''(t)-bR'(t)+cR(t)\right)f_j(\phi_{-t}(x))dt.$$

En tenant compte de (3.6), on voit que $u_j(x)$ définie par (3.5) est bien solution de l'équation différentielle (3.4). ■

4. Théorème fondamental.

Notre théorème principal se formule comme suit

Théorème 2. *Soit A une sous -algèbre de Lie admissible de χ_o et $\jmath$ un idéal de A de codimension finie. Alors $\jmath$ contient l'idéal de A constitué des germes de champs de vecteurs infiniment plats à l'origine* 0.

La preuve du théorème ci-dessus repose sur le lemme suivant (voir [1])

Lemme 6. *Soit V un sous-espace de codimension finie d'un espace vectoriel réel E et ψ un endomorphisme sur E satisfaisant aux conditions suivantes*

(1) $\psi(V) \subset V$

(2) Pour tout $b \in R$, $\psi + bI$ est surjectif sur V

(3) Pour tous $b, c \in R$ tels que $b^2 - 4c < 0$, $\psi^2 + b\psi + cI$ est surjectif sur V.

Alors $V = E$.

Démonstration. (du théorème fondamental) Notons par A^∞ l'idéal des germes de champs de vecteurs infiniment plats à l'origine 0 de la sous-algèbre admissible A. On applique le lemme ci-dessus à $E = A^\infty$ et $V = \jmath^\infty = A^\infty \cap \jmath$. Remarquons d'abord que si $\operatorname{codim}(\jmath) = \dim(A/\jmath) = m$, alors $\operatorname{codim}(\jmath^\infty) = \dim(A^\infty/\jmath^\infty) = m$. En effet soient $X_1, \ldots, X_{m+1}$ dans A^∞; comme $A^\infty \subset A$, il existe des nombres réels $a_1, \ldots, a_{m+1}$ tels que $a_1X_1 + \ldots + a_{m+1}X_{m+1} \in \jmath$. Mais $X_1, \ldots, X_{m+1}$ étant infiniment plats en 0, cette combinaison linéaire l'est aussi, elle est donc dans $\jmath^\infty$, ce qui prouve que la codimension de $\jmath^\infty$ dans A^∞ est inférieure ou égale à m.
Il nous reste à vérifier que l' opérateur $\psi = ad_{X_o}$ satisfait les conditions du Lemme 6.
Soit $Y \in A^\infty$, d'après le Lemme 3, les champs de vecteurs

$$F_b(Y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(b-\alpha_j)t} v_j^{1+\frac{1}{m_j}} f_j \left(e^{-\alpha_1 t} x_1 v_1^{-1/m_1}, \ldots, e^{-\alpha_n t} x_n v_n^{-1/m_n} \right) dt \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

et $F_{b,c}(Y) =$

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\int_0^{+\infty} v_j^{1+\frac{1}{m_j}} e^{-(b-\alpha_j)t} R(t) f_j(e^{-\alpha_1 t} x_1 v_1^{-1/m_1}, \ldots, e^{-\alpha_n t} x_n v_n^{-1/m_n}) dt \Big) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

sont de classe C^∞ et infiniment plats à l'origine 0 et par les Lemmes 4 et 5, ils sont solutions des équations différentielles

$$[X_o, F_b(Y)] + bF_b(Y) = Y \qquad \text{pour tout } b \in R$$

et $[X_o, [X_o, F_{b,c}(Y)]] + b\,[X_o, F_{b,c}(Y)] + cF_{b,c}(Y) = Y$ pour tous $b, c \in R$ tels que $b^2 - 4c < 0$. En plus, $F_b(Y)$ et $F_{b,c}(Y)$ appartiennent à l'idéal $\jmath^\infty$. Les hypothèses du Lemme 6 se trouvent ainsi vérifiées, et par suite, $\jmath^\infty = A^\infty$ ce qui achève la preuve du théorème. ∎

Références

[1] Benalili, M., et A. Lansari, *Ideals of finite codimension in contact Lie algebra*, J. of Lie Theory **1** (2001), 129–134.

[2] Koriyama, A., *On Lie algebras of vectors fields with invariant submanifolds*, Nagoya Math. J. **55** (1974), 91–110.

[3] Koriyama, A., Maeda, Y., et H. Omori, *On Lie algebras of vector fields*, Trans. Am. Math. Soc. **226** (1977), 95–117.

[4] Omori, H., *Infinite dimensional Lie Transformation groups*, Lecture notes in Math. **427**, Springer Verlag Berlin 1974.

[5] Pursell, L. E., et M. E. Shanks, *The Lie algebra of smooth manifolds*, Proc. Am. Math. Soc. **5** (1954), 468–472.

M. Benalili
Faculté des Sciences
Dept. Math. B.P. 119
Université Aboubekr-Belkaïd
Tlemcen, Algérie.
m_benalili@mail.univ-tlemcen.dz

A. Lansari
Faculté des Sciences
Dept. Math. B.P. 119
Université Aboubekr-Belkaïd
Tlemcen, Algérie.
a_lansari@mail.univ-tlemcen.dz

Received May 21, 2003
and in final form October 6, 2003