Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **16** (2004), 487–518

On the binary expansions of algebraic numbers

par David H. BAILEY, Jonathan M. BORWEIN,
Richard E. CRANDALL et Carl POMERANCE

Résumé. En combinant des concepts de théorie additive des nombres avec des résultats sur les développements binaires et les séries partielles, nous établissons de nouvelles bornes pour la densité de 1 dans les développements binaires de nombres algébriques réels. Un résultat clef est que si un nombre réel y est algébrique de degré $D > 1$, alors le nombre $\#(|y|, N)$ de 1 dans le développement de $|y|$ parmi les N premiers chiffres satisfait

$$\#(|y|, N) > CN^{1/D}$$

avec un nombre positif C (qui dépend de y), la minoration étant vraie pour tout N suffisamment grand. On en déduit la transcendance d'une classe de nombres réels $\sum_{n\geq 0} 1/2^{f(n)}$ quand la fonction f, à valeurs entières, crot suffisamment vite, disons plus vite que toute puissance de n. Grce à ces méthodes on redémontre la transcendance du nombre de Kempner–Mahler $\sum_{n\geq 0} 1/2^{2^n}$; nous considérons également des nombres ayant une densité sensiblement plus grande de 1. Bien que le nombre $z = \sum_{n\geq 0} 1/2^{n^2}$ ait une densité de 1 trop grande pour que nous puissions lui appliquer notre résultat central, nous parvenons à développer une analyse fine de théorie des nombres avec des calculs étendus pour révéler des propriétés de la structure binaire du nombre z^2.

Abstract. Employing concepts from additive number theory, together with results on binary evaluations and partial series, we establish bounds on the density of 1's in the binary expansions of real algebraic numbers. A central result is that if a real y has algebraic degree $D > 1$, then the number $\#(|y|, N)$ of 1-bits in the expansion of $|y|$ through bit position N satisfies

$$\#(|y|, N) > CN^{1/D}$$

Manuscrit reçu le 20 mars 2003.
Bailey's work is supported by the Director, Office of Computational and Technology Research, Division of Mathematical, Information, and Computational Sciences of the U.S. Department of Energy, under contract number DE-AC03-76SF00098.
Borwein's work is funded by NSERC and the Canada Research Chair Program.

for a positive number C (depending on y) and sufficiently large N. This in itself establishes the transcendency of a class of reals $\sum_{n\geq 0} 1/2^{f(n)}$ where the integer-valued function f grows sufficiently fast; say, faster than any fixed power of n. By these methods we re-establish the transcendency of the Kempner–Mahler number $\sum_{n\geq 0} 1/2^{2^n}$, yet we can also handle numbers with a substantially denser occurrence of 1's. Though the number $z = \sum_{n\geq 0} 1/2^{n^2}$ has too high a 1's density for application of our central result, we are able to invoke some rather intricate number-theoretical analysis and extended computations to reveal aspects of the binary structure of z^2.

David H. Bailey
Lawrence Berkeley National Laboratory
1 Cyclotron Road
Berkeley, CA 94720, USA
E-mail : dhbailey@lbl.gov

Jonathan M. Borwein
Dalhousie University
Department of Computer Science
Halifax, NS B3H 4R2, Canada
E-mail : jborwein@cs.dal.ca

Richard E. Crandall
Center for Advanced Computation
Reed College
Portland, OR 97202, USA
E-mail : crandall@reed.edu

Carl Pomerance
Dartmouth College
Department of Mathematics
6188 Bradley Hall
Hanover, NH 03755-3551, USA
E-mail : carl.pomerance@dartmouth.edu